УДК 517.956.35, 537.84

О ЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ БЕЗ УЧЕТА И С УЧЕТОМ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Ю. Л. Трахинин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: trakhin@math.nsc.ru

Представлены данные о локальной по времени разрешимости задач со свободными границами для системы уравнений магнитной гидродинамики идеальной сжимаемой жидкости. Рассматриваются задача со свободной границей плазма — вакуум и задача с граничными условиями на контактном разрыве. Приводится схема доказательства локального существования и единственности гладких решений этих задач без учета и с учетом поверхностного натяжения.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, задача со свободной границей, поверхностное натяжение, локальная теорема существования и единственности.

DOI: 10.15372/PMTF20210418

1. Постановка задач со свободными границами. Рассматриваются уравнения магнитной гидродинамики (МГД), описывающие течение невязкой сжимаемой идеально проводящей жидкости (в частности, плазмы) в магнитном поле [1]:

$$\partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0; \tag{1}$$

$$\partial_t(\rho\boldsymbol{v}) + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v} - \boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{H}) + \nabla q = 0; \tag{2}$$

$$\partial_t\boldsymbol{H} - \nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}) = 0; \tag{3}$$

$$\partial_t(\rho e + |\boldsymbol{H}|^2/2) + \operatorname{div}((\rho e + p)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{H}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})) = 0. \tag{4}$$

Здесь $\partial_t = \partial/\partial t$; $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$; $\partial_i = \partial/\partial x_i$; t — время; $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — пространственные координаты; ρ — плотность; $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — скорость; $\boldsymbol{H} = (H_1, H_2, H_3)$ — напряженность магнитного поля; $q = p + |\boldsymbol{H}|^2/2$ — полное давление; p — давление; S — энтропия; $E = E(\rho, S)$ — внутренняя энергия; $e = E + |\boldsymbol{v}|^2/2$. С учетом термодинамического тождества

$$\vartheta\, dS = dE - (p/\rho^2)\, d\rho,$$

где ϑ — абсолютная температура, система (1)–(4) является замкнутой системой восьми уравнений законов сохранения. В качестве вектора неизвестных можно выбрать, например,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 19-01-00261).

$\boldsymbol{U} = (q, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{H}, S)$. При этом соотношение $\rho = \rho(p, S)$ рассматривается в качестве уравнения состояния среды. Более того, система (1)–(4) дополняется дивергентным ограничением

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 \tag{5}$$

на начальные данные $\boldsymbol{U}|_{t=0} = \boldsymbol{U}_0(\boldsymbol{x})$ (если условие (5) выполнено при $t = 0$, то, как следует из (3), оно справедливо и при $t > 0$).

С использованием (5) можно записать (1)–(4) в неконсервативном виде

$$\frac{\rho_p}{\rho}\Big(\frac{dq}{dt} - \boldsymbol{H} \cdot \frac{d\boldsymbol{H}}{dt}\Big) + \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \qquad \rho\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - (\boldsymbol{H} \cdot \nabla)\boldsymbol{H} + \nabla q = 0,$$

$$\frac{d\boldsymbol{H}}{dt} - (\boldsymbol{H} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} - \frac{\rho_p}{\rho}\,\boldsymbol{H}\Big(\frac{dq}{dt} - \boldsymbol{H} \cdot \frac{d\boldsymbol{H}}{dt}\Big) = 0, \qquad \frac{dS}{dt} = 0.$$

Эти уравнения являются симметрической системой вида

$$A_0(\boldsymbol{U})\,\partial_t \boldsymbol{U} + \sum_{j=1}^{3} A_j(\boldsymbol{U})\,\partial_j \boldsymbol{U} = 0, \tag{6}$$

где $\rho_p = \partial\rho/\partial p$; $d/dt = \partial_t + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)$; A_α ($\alpha = \overline{0,3}\,$) — симметрические матрицы. Условие гиперболичности $A_0 > 0$ симметрической системы (6) выполняется при имеющих физический смысл ограничениях

$$\rho(p, S) > 0, \qquad \rho_p(p, S) > 0, \tag{7}$$

второе из которых является требованием положительности квадрата скорости звука: $a^2 = 1/\rho_p > 0$.

Рассмотрим сначала классическую постановку [2] задачи со свободной границей плазма — вакуум. Пусть $\Omega^+(t)$ и $\Omega^-(t)$ — области, занятые плазмой и вакуумом соответственно. Течение плазмы в $\Omega^+(t)$ описывается системой уравнений МГД (1)–(4), а напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}^-(t, \boldsymbol{x})$ в вакууме удовлетворяет системе уравнений предмаксвелловской динамики

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H}^- = 0, \qquad \nabla \times \boldsymbol{H}^- = 0 \qquad \text{в } \Omega^-(t). \tag{8}$$

При этом свободная граница $\Gamma(t) = \{F(t, \boldsymbol{x}) = 0\}$ движется со скоростью, равной скорости частиц плазмы на ней:

$$\frac{dF}{dt} = 0 \quad \text{на } \Gamma(t). \tag{9}$$

Остальные граничные условия означают, что полное давление имеет нулевой скачок, а магнитные поля с напряженностью $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{H}^-$ на границе параллельны ей:

$$[q] = 0; \tag{10}$$

$$\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{N} = 0; \tag{11}$$

$$\boldsymbol{H}^- \cdot \boldsymbol{N} = 0 \quad \text{на } \Gamma(t) \tag{12}$$

($\boldsymbol{N} = \nabla F$ — нормаль к Γ; $[q] = q|_\Gamma - |\boldsymbol{H}^-|_\Gamma|^2/2$). При этом можно показать, что (11) является ограничением на начальные данные задачи (см. [3]).

Задача со свободной границей плазма — вакуум используется для моделирования магнитного удержания плазмы (см., например, [4]). В астрофизике эта задача может моделировать движение звезды (например, солнечной короны), в случае когда необходимо учитывать влияние магнитных полей.

Пусть область вакуума $\Omega^-(t)$ имеет внешнюю неподвижную границу Γ_- со стандартным граничным условием на ней:

$$\boldsymbol{H}^- \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma_- \tag{13}$$

($\boldsymbol{\nu}$ — нормаль к Γ_-). Если область $\Omega^-(t)$ односвязная, то эллиптическая задача (8), (12), (13) имеет единственное решение $\boldsymbol{H}^- = 0$. Так как в данной работе исследуется локальная по времени корректность задачи, а не устойчивость течения со свободной границей, то геометрия областей не существенна и можно считать, что $\Gamma(t) = \{x_1 = \varphi(t, \boldsymbol{x}')\}$, где $\boldsymbol{x}' = (x_2, x_3)$. Тогда для односвязной области вакуума рассматриваемая задача со свободной границей сводится к задаче для системы уравнений МГД (1)–(4) в области $\Omega(t) = \Omega^+(t) = \{x_1 > \varphi(t, \boldsymbol{x}')\}$ с граничными условиями

$$q = 0, \qquad \partial_t \varphi = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{N} \quad \text{на } \Gamma(t). \tag{14}$$

Как отмечено выше, условие (11) является ограничением на начальные данные и поэтому не включено в (14). Более того, из первого условия в (14) следует $p|_\Gamma = 0$. В случае газа (например, политропного) это равенство означает, что $\rho|_\Gamma = 0$. Иными словами, требуя выполнения условий гиперболичности (7) во всей области вплоть до границы, будем предполагать, что, как и в [5, 6], рассматривается случай сжимаемой жидкости, для которой $\rho|_\Gamma > 0$.

Однако даже в случае односвязной области $\Omega^-(t)$ магнитное поле в вакууме тождественно не равно нулю, если система плазма — вакуум не изолирована от окружающей среды, поскольку на границе Γ_- задана сила поверхностного тока J (см. [4]). В этом случае в указанной выше эллиптической задаче для $\boldsymbol{H}^-$ граничное условие (13) заменяется на условие

$$(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{H}^-)\big|_{\Gamma_-} = J \quad \text{на } \Gamma_-, \tag{15}$$

а для $\Gamma(t) = \{x_1 = \varphi(t, \boldsymbol{x}')\}$ граничные условия (9), (10), (12) принимают вид

$$[q] = 0, \quad \partial_t \varphi = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{N}, \quad \boldsymbol{H}^- \cdot \boldsymbol{N} = 0 \quad \text{на } \Gamma(t), \tag{16}$$

где $\boldsymbol{N} = (1, -\partial_2 \varphi, -\partial_3 \varphi)$.

В случае если учитывается поверхностное натяжение, граничные условия (14), (16) заменяются соответственно на условия

$$q = \mathfrak{s}\mathcal{H}(\varphi), \quad \partial_t \varphi = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{N} \quad \text{на } \Gamma(t); \tag{17}$$

$$[q] = \mathfrak{s}\mathcal{H}(\varphi), \quad \partial_t \varphi = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{N}, \quad \boldsymbol{H}^- \cdot \boldsymbol{N} = 0 \quad \text{на } \Gamma(t), \tag{18}$$

где

$$\mathcal{H}(\varphi) = \nabla' \cdot \Big(\frac{\nabla' \varphi}{\sqrt{1 + |\nabla' \varphi|^2}} \Big),$$

$\nabla' = (\partial_2, \partial_3)$; $\mathfrak{s} > 0$ — коэффициент поверхностного натяжения. Следует отметить, что учет влияния поверхностного натяжения необходим при моделировании МГД-течений жидких металлов (см., например, работы [7, 8] и библиографию к ним). В то же время даже при МГД-моделировании крупномасштабных явлений, например процессов в астрофизической плазме, когда влиянием поверхностного натяжения (и диффузии) можно пренебречь, следует учитывать поверхностное натяжение как стабилизирующий параметр при численном моделировании магнитной неустойчивости Рэлея — Тейлора [9, 10].

Рассмотрим течения с поверхностью сильного разрыва $\Gamma(t) = \{x_1 = \varphi(t, \boldsymbol{x}')\}$, по обе стороны от которого, т. е. в областях $\Omega^\pm(t) = \{\pm(x_1 - \varphi(t, \boldsymbol{x}')) > 0\}$, векторы $U^\pm$ являются гладкими решениями системы (1)–(4). В идеальной сжимаемой МГД-жидкости существует два типа сильных разрывов, поток массы через которые равен нулю ($\partial_t\varphi = (\boldsymbol{v}^{\pm} \cdot \boldsymbol{N})|_\Gamma$): тангенциальные и контактные разрывы [1, 11]. С математической точки зрения эти разрывы являются свободными характеристическими поверхностями для гиперболической системы (6).

В [12] найдено достаточное условие корректности задачи о тангенциальном разрыве, локальная по времени разрешимость которой в пространствах Соболева была доказана в [13] при выполнении этого условия в начальный момент времени. В данной работе исследуются контактные разрывы. В отличие от тангенциального разрыва в каждой точке поверхности контактного разрыва $\Gamma(t)$ магнитное поле не параллельно ему: $(\boldsymbol{H}^{\pm}\cdot\boldsymbol{N})|_\Gamma \neq 0$. Из общих соотношений на сильном разрыве, изучаемых в МГД [1, 11], выводятся граничные условия на контактном разрыве

$$[p] = 0, \quad [\boldsymbol{v}] = 0, \quad [\boldsymbol{H}] = 0, \quad \partial_t\varphi = \boldsymbol{v}^+ \cdot \boldsymbol{N} \quad \text{на } \Gamma(t), \tag{19}$$

где $[\,\cdot\,]$ — скачки величин на разрыве. Иными словами, на контактном МГД-разрыве давление, скорость и магнитное поле непрерывны. В то же время плотность, энтропия и температура могут иметь произвольный скачок: $[\rho] \neq 0$, $[S] \neq 0$, $[\vartheta] \neq 0$. Граничные условия для контактных разрывов являются типичными при моделировании процессов, происходящих в космической плазме. Контактные разрывы наблюдаются, например, за ударными волнами, ограничивающими остатки сверхновой.

В случае если учитывается влияние поверхностного натяжения, граничные условия (19) заменяются на условия [14–16]

$$[p] = \mathfrak{s}\mathcal{H}(\varphi), \quad [\boldsymbol{v}] = 0, \quad [\boldsymbol{H}] = 0, \quad \partial_t\varphi = \boldsymbol{v}^+ \cdot \boldsymbol{N} \quad \text{на } \Gamma(t). \tag{20}$$

При этом, вообще говоря, предполагается, что области $\Omega^+(t)$ и $\Omega^-(t)$ заполнены двумя различными невязкими сжимаемыми идеально проводящими жидкостями.

2. Локальная разрешимость задач без учета поверхностного натяжения. Задачи со свободной границей плазма — вакуум активно изучались в 50–70-е гг. XX в. Однако основные теоретические исследования были посвящены поиску критериев устойчивости положений равновесия [2]. Математическое исследование локальной по времени разрешимости данных задач начато в работе [3], в которой предложены два альтернативных условия корректности задачи со свободной границей (1)–(4), (8), (15), (16): условие неколлинеарности магнитных полей в каждой точке свободной границы

$$\left|\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}^-\right|_\Gamma \geqslant \delta_0 > 0 \tag{21}$$

и обобщенное условие Рэлея — Тейлора для скачка производной по нормали от полного давления

$$\Big[\frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\mathcal{N}}}\Big] \leqslant -\delta_1 < 0, \tag{22}$$

где $\boldsymbol{\mathcal{N}} = -\boldsymbol{N}$ — внешняя нормаль к Γ; δ_0, δ_1 — фиксированные постоянные. Заметим, что в классической гидродинамике (при $\boldsymbol{H} \equiv 0$ и $\boldsymbol{H}^- \equiv 0$) условие Рэлея — Тейлора является единственным условием корректности соответствующей задачи со свободной границей (см. работы [5, 6, 17–21] и библиографию к ним). Условие (21) означает, что магнитное поле может выполнять стабилизирующую функцию.

В [22] на основе примера некорректности линеаризованной задачи с замороженными коэффициентами, аналогичного примеру Адамара, показано, что одновременное нарушение обоих условий (21) и (22) приводит к возникновению неустойчивости Рэлея — Тейлора. Заметим, что доказательство некорректности исходной нелинейной задачи является сложным (см. работы [20, 21, 23], в которых рассмотрены задачи в отсутствие магнитного поля). В [22] сформулирована естественная гипотеза, согласно которой задача (1)–(4), (8), (15), (16) локально-корректна тогда и только тогда, когда в каждой точке начальной свободной границы выполняется условие (21) либо условие (22). Эта гипотеза до сих пор не доказана. Более того, даже при доказательстве корректности задачи при выполнении условия Рэлея — Тейлора (22) в каждой точке начальной границы возникают определенные сложности, которые пока не преодолены (см. [22]). В то же время в работе [24] показана локальная разрешимость задачи при выполнении условия неколлинеарности (21) на начальной свободной границе. Заметим, что условие неколлинеарности принято в [3] в качестве требования разрешимости граничных условий (11), (12) (при $F = x_1 - \varphi$) для $\nabla' \varphi$. Что касается более простой задачи со свободной границей (1)–(4), (14) с нулевым магнитным полем в вакууме, то в работе [25] доказана ее локальная разрешимость при выполнении условия Рэлея — Тейлора (22) при $\boldsymbol{H}^- \equiv 0$.

Приведем краткую схему доказательства локального по времени существования и единственности гладких решений задач со свободными границами [24, 25] (та же схема использовалась в [6] в случае задачи со свободной границей для уравнений Эйлера сжимаемой жидкости).

1. "Распрямление" свободной границы, т. е. сведение исходной задачи к начально-краевой задаче в фиксированной области (при этом задача продолжает рассматриваться в эйлеровых координатах).

2. Вывод базовой априорной оценки решений линеаризованной задачи (обычно из нее следует единственность решения исходной нелинейной задачи) при определенных и часто заранее неизвестных условиях корректности, налагаемых на невозмущенное течение.

3. Доказательство существования решений линеаризованной задачи при найденных условиях корректности.

4. Вывод так называемых ручных априорных оценок (tame estimates) решений линеаризованной задачи, необходимых для доказательства сходимости итераций Нэша — Мозера [26].

5. Доказательство существования решений нелинейной задачи с помощью итераций Нэша — Мозера.

Необходимость использования метода Нэша — Мозера обусловлена тем, что для рассматриваемых задач со свободными границами не удается вывести, по крайней мере в рамках используемого подхода, априорные оценки решений линеаризованной задачи без потери производных от правых частей и коэффициентов. Поэтому невозможно применить принцип сжимающих отображений, т. е. доказывать существование решений нелинейной задачи с помощью итераций Пикара.

"Распрямление" свободной границы можно осуществить наиболее простым способом, т. е. выполнить замену $\tilde{x}_1 = x_1 - \varphi(t, \boldsymbol{x}')$, сводящую рассматриваемую задачу к начально-краевой задаче в полупространстве $\mathbb{R}^3_+ = \{\tilde{x}_1 > 0,\ \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^2\}$. Однако в работах [24, 25] использовались более сложные замены. Например, в [25] в приведенной выше замене перед φ стоит множитель, представляющий собой бесконечно гладкую функцию срезки $\chi(x_1)$. Это позволяет не делать предположение о финитности начальных данных в направлении, нормальном к свободной границе. Далее будем считать, что $\chi \equiv 1$. Тогда после замены система (6) сводится к уравнениям

$$\mathbb{L}(\boldsymbol{U}, \varphi) = 0 \quad \text{в } \Omega_T, \tag{23}$$

где

$$\Omega_T = [0, T] \times \mathbb{R}^3_+, \qquad \mathbb{L}(\boldsymbol{U}, \varphi) = L(\boldsymbol{U}, \varphi) U,$$

$$L(\boldsymbol{U}, \varphi) := A_0(\boldsymbol{U})\, \partial_t + \tilde{A}_1(\boldsymbol{U}, \varphi)\, \partial_1 + A_2(\boldsymbol{U})\, \partial_2 + A_3(\boldsymbol{U})\, \partial_3,$$

$\tilde{A}_1$ — граничная матрица:

$$\tilde{A}_1(\boldsymbol{U}, \varphi) := A_1(\boldsymbol{U}) - A_0(\boldsymbol{U})\, \partial_t \varphi - A_2(\boldsymbol{U})\, \partial_2 \varphi - A_3(\boldsymbol{U})\, \partial_3 \varphi,$$

знак "$\sim$" над $\boldsymbol{x}$ опущен. Следует отметить, что в силу вторых граничных условий в (14), (16) $\det \tilde{A}_1|_{x_1=0} = 0$, т. е. граница является характеристической. Аналогичная замена выполнена в системе (8), граничные условия сохраняют прежний вид, но формулируются на границе $\Sigma_T = [0,T] \times \{x_1 = 0\} \times \mathbb{R}^2$.

Поскольку далее используется метод Нэша — Мозера, необходимо провести линеаризацию задачи в окрестности некоторого заданного основного состояния, т. е. рассмотреть первую вариацию нелинейного оператора. Рассмотрим задачу (1)–(4), (14). Предполагается, что основное состояние $(\hat{\boldsymbol{U}}(t,\boldsymbol{x}), \hat{\varphi}(t,\boldsymbol{x}'))$ является достаточно гладкой ограниченной вектор-функцией, удовлетворяющей условиям гиперболичности (7) и второму граничному условию в (14). Линеаризованная система (23) имеет вид

$$\frac{d}{d\varepsilon}\,\mathbb{L}(\hat{\boldsymbol{U}} + \varepsilon\,\boldsymbol{U}, \hat{\varphi} + \varepsilon\,\varphi)\big|_{\varepsilon=0} = L(\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\varphi})\boldsymbol{U} + \mathcal{C}(\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\varphi})\boldsymbol{U} - \{L(\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\varphi})\varphi\}\,\partial_1\hat{\boldsymbol{U}} = f,$$

где $\boldsymbol{U}$, φ — возмущения; $\mathcal{C}$ — матрица; $f = f(t,\boldsymbol{x})$ — искусственно введенная правая часть, включение которой необходимо для использования линеаризации при доказательстве существования решений исходной нелинейной задачи.

Слагаемое $\{L(\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\varphi})\varphi\}\,\partial_1\hat{\boldsymbol{U}}$ в линеаризованной системе содержит производные функции φ, что нежелательно, так как проще исследовать линейную систему только для возмущения $\boldsymbol{U}$. Эта трудность преодолевается путем перехода к неизвестному вектору Алиньяка [27] вида

$$\dot{\boldsymbol{U}} := \boldsymbol{U} - \varphi\,\partial_1\hat{\boldsymbol{U}}. \tag{24}$$

В результате такого сдвига неизвестного вектора линеаризованные уравнения принимают вид

$$L(\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\varphi})\dot{\boldsymbol{U}} + \mathcal{C}(\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\varphi})\dot{\boldsymbol{U}} - \varphi\,\partial_1\{\mathbb{L}(\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\varphi})\} = f. \tag{25}$$

Последнее слагаемое в левой части системы (25) равно нулю, если основное состояние $(\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\varphi})$ является решением исходной нелинейной системы (23). Тогда, отбросив это слагаемое и рассматривая далее линейные уравнения

$$L(\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\varphi})\dot{\boldsymbol{U}} + \mathcal{C}(\hat{\boldsymbol{U}},\hat{\varphi})\dot{\boldsymbol{U}} = f \quad \text{в } \Omega_T, \tag{26}$$

можно ожидать, что отброшенное слагаемое, которое при анализе нелинейной задачи должно рассматриваться как дополнительная ошибка итераций Нэша — Мозера, будет стремиться к нулю при стремлении индекса итераций к бесконечности.

Аналогично линеаризуем граничные условия (14) и запишем результат с использованием неизвестного вектора (24). В результате получаем линейную задачу для системы (26) с граничными условиями

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_N - \partial_t\varphi - \hat{v}_2\,\partial_2\varphi - \hat{v}_3\,\partial_3\varphi + (\partial_1\hat{v}_N)\varphi \\ \dot{q} + (\partial_1\hat{q})\varphi \end{pmatrix} = g \quad \text{на } \Sigma_T, \tag{27}$$

где $\dot{v}_N = \dot{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{N}}$; $\hat{v}_N = \hat{\boldsymbol{v}}\cdot\hat{\boldsymbol{N}}$; $\hat{\boldsymbol{N}} = (1, -\partial_2\hat{\varphi}, -\partial_3\hat{\varphi})$; $g = g(t,\boldsymbol{x}')$ — искусственно введенная правая часть. От знака множителя $\partial_1\hat{q}$ в (27) существенно зависит корректность задачи (в "распрямленных" переменных условие Рэлея — Тейлора $\partial q/\partial\boldsymbol{\mathcal{N}} < 0$, записанное на основном состоянии, принимает вид $\partial_1\hat{q} > 0$). Именно условие Рэлея — Тейлора $\partial_1\hat{q} > 0$ позволяет оценить норму φ в пространстве L^2 и получить базовую априорную оценку для возмущений $(\boldsymbol{U},\varphi)$ в пространстве L^2 (см. [25]):

$$\|\boldsymbol{U}\|_{L^2(\Omega_T)} + \|\varphi\|_{L^2(\Sigma_T)} \leqslant C\{\|f\|_{L^2(\Omega_T)} + \|g\|_{H^1(\Sigma_T)}\}. \tag{28}$$

Здесь начальные данные для $(\boldsymbol{U}, \varphi)$ выбираются равными нулю, а случай ненулевых начальных данных исследуется при нелинейном анализе (построение так называемого аппроксимационного решения [6, 25]). Таким образом, в оценке (28) утеряна одна производная от правой части g.

Существование решений линеаризованной задачи (26), (27) доказывается в [25] с помощью стандартного принципа двойственности, основанного на применении оценки в L^2 (вида (28) при $g = 0$) для исходной линейной задачи и аналогичной оценки в L^2 для сопряженной задачи (см., например, [28]). Однако аналогичное рассуждение не применимо в случае линеаризации задачи (1)–(4), (8), (15), (16), так как в [29] удалось "замкнуть" оценку только в пространстве H^1 (точнее, в весовом анизотропном пространстве Соболева H^1_* (см. работу [13] и библиографию к ней). Эта трудность преодолевается в [29] с использованием некоторой "гиперболической" регуляризации задачи, предложенной в [30] вторичной симметризации уравнений Максвелла в вакууме, а также в результате перехода к пределу по малому параметру регуляризации (в качестве регуляризации эллиптической системы для $\boldsymbol{H}^-$ рассматриваются уравнения Максвелла для $\boldsymbol{H}^-$ и искусственно введенного электрического поля $\boldsymbol{E}$ [29]).

Существование решений исходных нелинейных задач доказано в [24, 25] с помощью итераций Нэша — Мозера. Подробное описание метода Нэша — Мозера, а также ссылки на их работы приведены в [26]. Идея этого метода состоит в решении нелинейного уравнения $\mathcal{F}(u) = 0$ с использованием итерационной схемы

$$\mathcal{F}'(S_{\theta_n} u_n)(u_{n+1} - u_n) = -\mathcal{F}(u_n),$$

где $\mathcal{F}'$ — линеаризация (первая вариация) функционала $\mathcal{F}$; S_{θ_n} — последовательность сглаживающих операторов со свойством $S_{\theta_n} \to I$ при $n \to \infty$. Эта схема является классической схемой Ньютона, если $S_{\theta_n} = I$. Применение сглаживающего оператора на каждом шаге схемы Нэша — Мозера позволяет компенсировать потерю производных не только от правых частей (как в оценке (28)), но и от коэффициентов линеаризации (в данном случае от основного состояния $(\hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\varphi})$).

Ошибками классической схемы Нэша — Мозера являются "квадратичная" ошибка схемы Ньютона и "подстановочная" ошибка, обусловленная применением сглаживающих операторов S_{θ_n}. Для задач (1)–(4), (14) и (1)–(4), (8), (15), (16) реализация метода Нэша — Мозера является нестандартной, поскольку необходимо учитывать дополнительную ошибку, возникающую при введении промежуточного (модифицированного) состояния $u_{n+1/2}$, удовлетворяющего некоторым нелинейным ограничениям. Основным таким ограничением является требование выполнения вторых граничных условий в (14), (16) (поскольку предполагалось, что $\partial_t \hat{\varphi} - \hat{v}_N|_{x_1=0} = 0$). Наличие еще одной дополнительной ошибки вызвано отбрасыванием последнего слагаемого в левой части системы (25).

Для доказательства сходимости итераций Нэша — Мозера недостаточно базовых априорных оценок вида (28). Требуется вывести некоторые более точные априорные оценки линеаризованной задачи в старших нормах пространств Соболева H^s, которые учитывают количество "потерянных" производных не только от правых частей, но и от коэффициентов, т. е. от $(\hat{\boldsymbol{U}}, \hat{\varphi})$. Основными свойствами таких оценок, называемых "ручными", являются линейность по старшим нормам и фиксированная потеря производных, т. е. количество "потерянных" производных должно быть одним и тем же для любого индекса s пространства H^s.

Что касается общей схемы доказательства локальной по времени однозначной разрешимости задачи (1)–(4), (19) для контактного МГД-разрыва [32], то она такая же, как и в [24, 25]. Однако имеются трудности, которые удалось преодолеть в работе [31], для того чтобы получить базовую априорную оценку линеаризованной задачи в H^1. В [31, 32] рассмотрено двумерное течение с контактным разрывом, в трехмерном случае локальная разрешимость указанной задачи не доказана. Еще одна трудность возникала при доказательстве существования решений линеаризованной задачи, поскольку для нее не удается получить априорную оценку в L^2. Эта трудность преодолена в работе [31] путем "строго диссипативной" регуляризации задачи, доказательства существования решений регуляризованной задачи в пространстве L^2 и перехода к пределу по малому параметру регуляризации с использованием равномерной по этому параметру оценки в H^1.

Следует отметить, что при математическом анализе задачи (1)–(4), (19) естественным образом возникает не "магнитогидродинамическое" условие Рэлея — Тейлора (22), а его классическая гидродинамическая версия

$$\Big[\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\mathcal{N}}}\Big] \leqslant -\delta_1 < 0 \tag{29}$$

для давления p (а не для полного давления q). Условие (29) является основным требованием в [32] на начальные данные, гарантирующим локальное по времени существование контактного МГД-разрыва в двумерном случае.

3. Локальная разрешимость задач с учетом поверхностного натяжения. Рассмотрим проблему доказательства локальной разрешимости задач со свободными границами с учетом поверхностного натяжения, сформулированных в п. **1**. Заметим, что для доказательства теорем существования и единственности для этих задач следует использовать схему, описанную в п. **2**. Наличие слагаемого $\mathcal{H}(\varphi)$ в граничных условиях позволяет при выводе базовых априорных оценок соответствующих линеаризованных задач использовать оценки производных по пространственным переменным функции φ. Это, в свою очередь, позволяет получить в [16, 33] априорные оценки для линеаризации задач (1)–(4), (17) и (1)–(4), (20) без наложения соответствующих условий Рэлея — Тейлора ((22) при $\boldsymbol{H}^- \equiv 0$ и (29)) для невозмущенного течения.

В случае задач с учетом поверхностного натяжения основной трудностью является доказательство существования решений соответствующих линеаризованных задач. Эта трудность преодолевается в работах [16, 33] путем определенной регуляризации этих задач. Рассмотрим задачу (1)–(4), (17). При линеаризации этой задачи в [33] удалось "замкнуть" оценку только в пространстве H^1_* (поэтому в силу отсутствия оценки в L^2 не применим принцип двойственности). В систему (26) добавляется "строго диссипативное" слагаемое $(0, -\varepsilon\, \partial_1 \dot{v}_N, 0, \dots, 0)$, позволяющее оценить $\dot{v}_N|_{x_1=0}$, а в левую часть первого граничного условия в (27) добавляется "параболическое" слагаемое четвертого порядка $-\varepsilon(\partial_2^4 + \partial_3^4)\varphi$, где $\varepsilon > 0$ — параметр регуляризации (см. [33]). Ясно, что второе граничное условие в (27) содержит дополнительное слагаемое, обусловленное линеаризацией $\mathcal{H}(\varphi)$. Для такой регуляризованной задачи, а также для сопряженной с ней задачи можно вывести оценки в L^2 и доказать существование решений с использованием принципа двойственности для любого фиксированного ε.

Однако полученная априорная оценка в L^2 линеаризованной задачи не является равномерной по ε. Для того чтобы перейти к пределу $\varepsilon \to 0$ и доказать существование решений исходной линейной задачи, в работе [33] выведена равномерная по ε оценка в H^1_*. Аналогичные рассуждения проведены в [16] для контактного МГД-разрыва с учетом поверхностного натяжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ландау Л. Д.** Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, М.: Наука, 1982.

2. **Bernstein I. B., Frieman E. A., Kruskal M. D., Kulsrud R. M.** An energy principle for hydromagnetic stability problems // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1958. V. 244. P. 17–40.
3. **Trakhinin Y.** On the well-posedness of a linearized plasma — vacuum interface problem in ideal compressible MHD // J. Different. Equat. 2010. V. 249. P. 2577–2599.
4. **Goedbloed J. P.** Advanced magnetohydrodynamics: with applications to laboratory and astrophysical plasmas / J. P. Goedbloed, R. Keppens, S. Poedts. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010.
5. **Lindblad H.** Well-posedness for the motion of a compressible liquid with free surface boundary // Comm. Math. Phys. 2005. V. 260. P. 319–392.
6. **Trakhinin Y.** Local existence for the free boundary problem for nonrelativistic and relativistic compressible Euler equations with a vacuum boundary condition // Comm. Pure Appl. Math. 2009. V. 62. P. 1551–1594.
7. **Samulyak R., Du J., Glimm J., Xu Z.** A numerical algorithm for MHD of free surface flows at low magnetic Reynolds numbers // J. Comput. Phys. 2007. V. 226. P. 1532–1549.
8. **Yang F., Khodak A., Stone H. A.** The effects of a horizontal magnetic field on the Rayleigh — Taylor instability // Nuclear Materials Energy. 2019. V. 18. P. 175–181.
9. **Stone J. M., Gardiner T.** Nonlinear evolution of the magnetohydrodynamic Rayleigh — Taylor instability // Phys. Fluids. 2007. V. 19. 094104.
10. **Stone J. M., Gardiner T.** The magnetic Rayleigh — Taylor instability in three dimensions // Astrophys. J. 2007. V. 671. P. 1726–1735.
11. **Блохин А. М.** Устойчивость сильных разрывов в магнитной гидродинамике и электрогидродинамике / А. М. Блохин, Ю. Л. Трахинин. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2004.
12. **Trakhinin Y.** On existence of compressible current-vortex sheets: variable coefficients linear analysis // Arch. Ration. Mech. Anal. 2005. V. 177. P. 331–366.
13. **Trakhinin Y.** The existence of current-vortex sheets in ideal compressible magnetohydrodynamics // Arch. Ration. Mech. Anal. 2009. V. 191. P. 245–310.
14. **Delhaye J. M.** Jump conditions and entropy sources in two-phase systems. Local instant formulation // Intern. J. Multiphase Flow. 1974. V. 1. P. 395–409.
15. **Ishii M.** Thermo-fluid dynamics of two-phase flow. 2nd ed. / M. Ishii, T. Hibiki. N. Y.: Springer, 2011.
16. **Trakhinin Y., Wang T.** Nonlinear stability of MHD contact discontinuities with surface tension. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: https://arxiv.org/pdf/2105.04977.pdf.
17. **Налимов В. И.** Задача Коши — Пуассона // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1974. Вып. 18. С. 104–210.
18. **Налимов В. И.** Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей / В. И. Налимов, В. В. Пухначев. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1975.
19. **Налимов В. И.** Обоснование приближенных моделей теории плоских неустановившихся волн // Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985. С. 97–127.
20. **Плотников П. И.** Некорректность нелинейной задачи о развитии неустойчивости Рэлея — Тейлора // Зап. науч. семинаров / Мат. ин-т АН СССР. Ленингр. отд-ние. 1980. Т. 96. С. 240–296.
21. **Guo Y., Tice I.** Compressible, inviscid Rayleigh — Taylor instability // Indiana Univ. Math. J. 2011. V. 60. P. 677–711.
22. **Trakhinin Y.** On well-posedness of the plasma — vacuum interface problem: The case of non-elliptic interface symbol // Comm. Pure Appl. Anal. 2016. V. 15. P. 1371–1399.

23. **Ebin D.** The equations of motion of a perfect fluid with free boundary are not well-posed // Comm. Part. Different. Equat. 1987. V. 12. P. 1175–1201.
24. **Secchi P., Trakhinin Y.** Well-posedness of the plasma — vacuum interface problem // Nonlinearity. 2014. V. 27. P. 105–169.
25. **Trakhinin Y., Wang T.** Well-posedness of free boundary problem in non-relativistic and relativistic ideal compressible magnetohydrodynamics // Arch. Ration. Mech. Anal. 2021. V. 239. P. 1131–1176.
26. **Hörmander L.** The boundary problems of physical geodesy // Arch. Ration. Mech. Anal. 1976. V. 62. P. 1–52.
27. **Alinhac S.** Existence d'ondes de raréfaction pour des systèmes quasilinéaires hyperboliques multidimensionnels // Comm. Part. Different. Equat. 1989. V. 14. P. 173–230.
28. **Lax P. D., Phillips R. S.** Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators // Comm. Pure Appl. Math. 1960. V. 13. P. 427–455.
29. **Secchi P., Trakhinin Y.** Well-posedness of the linearized plasma — vacuum interface problem // Interfaces Free Bound. 2013. V. 15. P. 323–357.
30. **Trakhinin Y.** Stability of relativistic plasma — vacuum interfaces // J. Hyperbolic Different. Equat. 2012. V. 9. P. 469–509.
31. **Morando A., Trakhinin Y., Trebeschi P.** Well-posedness of the linearized problem for MHD contact discontinuities // J. Different. Equat. 2015. V. 258. P. 2531–2571.
32. **Morando A., Trakhinin Y., Trebeschi P.** Local existence of MHD contact discontinuities // Arch. Ration. Mech. Anal. 2018. V. 228. P. 691–742.
33. **Trakhinin Y., Wang T.** Well-posedness for the free-boundary ideal compressible magnetohydrodynamic equations with surface tension // Math. Ann. 2021. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: https://doi.org/10.1007/s00208-021-02180-z.

Поступила в редакцию 11/V 2021 г.,
после доработки — 17/V 2021 г.
Принята к публикации 31/V 2021 г.