

УДК 534-13:[534.26+534.83]+517.958

## СОБСТВЕННЫЕ АЭРОАКУСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗА ВБЛИЗИ ДВУХ ПЛАСТИН В КАНАЛЕ

А. П. Константинов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия  
E-mail: avtomorfizm@gmail.com

В двумерной постановке исследованы собственные аэроакустические колебания газа вблизи двух тонких пластин, расположенных по схеме “тандем” в прямоугольном канале. Обнаружена бифуркация собственных частот, зависящая от расстояния между пластинами, найдены зависимости частоты собственных колебаний от длины пластин и расстояния до стенок канала. Найдены поля давления и скоростей газа в исследуемой области колебаний.

**Ключевые слова:** собственные колебания в неограниченных областях, акустический резонанс, тонкостенные препятствия в каналах и трубах.

DOI: 10.15372/PMTF20180206

**Введение.** При обтекании газом различных препятствий в каналах и трубах возможно появление аэроакустических резонансных явлений. Существование аэроакустических колебаний обусловлено резонансными свойствами неограниченного объема и наличием источника автоколебаний. Естественным источником колебаний в таких системах обычно являются вихревые структуры, возникающие при обтекании препятствия потоком газа (дорожка Кармана). В настоящей работе исследуются только резонансные свойства системы.

Впервые экспериментальные и численные исследования собственных колебаний вблизи симметричной решетки пластин в прямоугольном канале проведены в работах [1, 2]. В частности, показано, что изучаемые резонансные явления имеют акустическую природу и не связаны с упругими колебаниями пластин. Точная математическая формулировка задачи о собственных акустических колебаниях газа в окрестности пластины в канале приведена в работах [3–7], в которых теоретически обоснована математическая модель, описывающая собственные акустические колебания вблизи произвольной решетки пластин, и доказано существование собственных колебаний. В работах [7, 8] экспериментально и теоретически исследованы собственные акустические колебания газа вблизи пластины в канале, на основе численно-аналитического подхода [9] проведены расчеты собственных частот и показано, что результаты этих расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными.

В указанных выше и других работах изучались акустические колебания в тракте турбокомпрессоров газотурбинных двигателей и других технических устройств, поскольку акустические резонансы являются источником сильного шума и могут вызывать разрушение лопаток турбокомпрессора [10].

Простейшей моделью, используемой при изучении влияния взаимодействия ротора-статора на собственные акустические колебания, является система двух пластин, расположенных по схеме “тандем” в канале. При экспериментальном исследовании акустических колебаний, возникающих при обтекании пластин в потоке газа, установлено, что добавление второй пластины оказывает существенное влияние на амплитуду и частоту возбуждаемых колебаний [11]. В частности, увеличение расстояния между пластинами приводит к увеличению частоты генерируемого звука. Подобные результаты получены в работе [12] при изучении акустического резонанса вблизи тандема пластин в прямоугольном канале. В эксперименте варьировались скорость потока и расстояние между пластинами, которые имели разную длину и располагались в середине канала. Расчет собственных частот (как и в работе [2]) проводился с помощью метода конечных разностей при решении краевой задачи в ограниченной области, в то время как исходная задача сформулирована для бесконечной области, что является некорректным. Такой метод расчета собственных частот в случае пластин небольшой длины может иметь существенную погрешность. В работе [13] с помощью метода идеально согласованного слоя для заданных в эксперименте [12] параметров области колебаний вычислены резонансные частоты. Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными. Численный расчет резонансных частот и соответствующих собственных функций для тандема двух пластин одинаковой длины в середине канала выполнен в работе [14].

**Постановка задачи.** Ниже приводятся постановка задачи об аэроакустических колебаниях и метод ее решения.

*Геометрия области колебаний.* Геометрия области колебаний и система координат представлены на рис. 1. Пластины имеют одинаковую длину  $L$  и параллельны оси бесконечного однородного канала высотой  $H$ . Прямоугольная система координат выбрана таким образом, что положение стенок канала задается уравнениями  $y = 0$  и  $y = H$ . Рассматриваются два варианта расположения пластин в канале: 1) пластины расположены на расстоянии  $h$  от стенки канала и на расстоянии  $d$  друг от друга (см. рис. 1, а); 2) пластины расположены симметрично относительно некоторой точки на средней линии канала (см. рис. 1, б). При решении задачи толщина пластин не учитывалась, поскольку для тонких пластин ее влияние на резонансные свойства системы пренебрежимо мало. Вводятся следующие обозначения:  $\Omega = \mathbb{R} \times (0, H) \setminus \Sigma$  — область колебаний,  $\Sigma$  — граница области колебаний (стенки канала и пластины).

*Уравнения, описывающие акустические колебания в потоке газа.* Акустические колебания считаются установившимися по времени. Потенциал  $U(x, y, t)$  акустического возмущения скорости имеет вид

$$U(x, y, t) = u(x, y) e^{-i\omega t}.$$

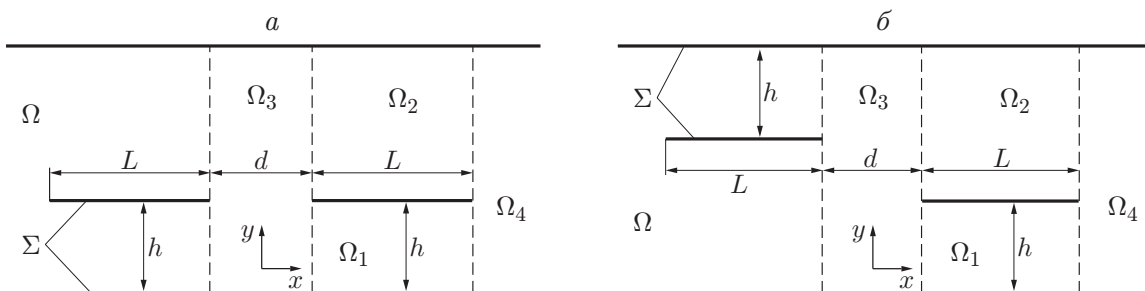


Рис. 1. Область колебаний:

$a$  — пластины, расположенные на расстоянии  $h$  от стенок канала,  $b$  — пластины, расположенные на расстоянии  $h$  от верхней и нижней стенок канала

Уравнение для потенциала акустического возмущения скорости, описывающее акустические колебания  $u(x, y)$  стационарного потока газа, записывается в виде [15]

$$(1 - M^2)u_{xx} + u_{yy} - \frac{2i\omega M}{c} u_x + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

где  $M$  — число Маха основного потока;  $c$  — скорость звука;  $\omega$  — круговая частота акустических колебаний. Уравнение (1) справедливо во всей области течения  $\Omega$ . На стенках канала и пластинах выполнено условие непротекания

$$u_y|_{\Sigma} = 0. \quad (2)$$

Проводя замену

$$u(x, y) = \bar{u}(x, y) \exp\left(\frac{i\omega M x}{c(1 - M^2)}\right)$$

и вводя безразмерные переменные  $x' = x/(\sqrt{1 - M^2} H)$ ,  $y' = y/H$ , исходные уравнения (1), (2) преобразуем в уравнение Гельмгольца с аналогичными граничными условиями:

$$\bar{u}_{x'x'} + \bar{u}_{y'y'} + k^2 \bar{u} = 0 \quad \text{в } \Omega', \quad \bar{u}'_y|_{\Sigma'} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $k = \omega H/(c\sqrt{1 - M^2})$  — безразмерная частота акустических колебаний. Далее черта и штрих опускаются.

*Условия излучения и конечности энергии.* Согласно физическому содержанию задачи для функции  $u$  в любой конечной подобласти  $\Omega_0 \subset \Omega$  должно выполняться условие локальной конечности энергии колебаний  $E$

$$E(u) = \int_{\Omega_0} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx dy < \infty. \quad (4)$$

Решение  $u$  задачи (3), (4) будем искать в классе функций, имеющих нулевую проекцию на поршневую моду  $Y_0 = e^{ikx}$ :

$$\int_{\Omega} u(x, y) Y_0 dx dy = \int_{\Omega} u(x, y) e^{ikx} dx dy = 0.$$

Это условие выполняется тогда и только тогда, когда для всех значений  $x$  справедливо тождество

$$\int_0^1 u(x, y) dy \equiv 0. \quad (5)$$

Решение уравнения (3) удовлетворяет условиям излучения, если для некоторого достаточно большого числа  $R$  при всех  $|x| \geq R$  справедливы представления

$$u(x, y) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n y) C_n^+ e^{ix\sqrt{k^2 - (\pi n)^2}}, & x \geq R, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n y) C_n^- e^{-ix\sqrt{k^2 - (\pi n)^2}}, & x \leq -R. \end{cases} \quad (6)$$

Предполагается, что при  $k^2 < (\pi n)^2$  знак перед квадратным корнем выбран таким образом, что  $i\sqrt{k^2 - (\pi n)^2} < 0$ . Выполнение условия излучения означает отсутствие приходящих

волн. Если функция удовлетворяет условиям излучения, то по мере удаления от начала координат (препятствия) она затухает либо возрастает по экспоненциальному закону [6].

*Сужение пространства решений.* Задача, описывающая собственные колебания вблизи пластин в канале, имеет непрерывный спектр, совпадающий с интервалом  $(0, \infty)$ , что затрудняет исследование резонансных явлений. Однако при сужении пространства допустимых решений с помощью условия (5) нижняя грань непрерывного спектра сдвигается от начала координат до значения  $\pi$  (частота отсечки). Это позволяет применять для нахождения собственных частот в интервале  $(0, \pi)$  известные методы.

Поскольку геометрия задачи обладает зеркальной симметрией (см. рис. 1,а), функция  $u(x, y)$  удовлетворяет одному из следующих условий:

$$u(x, y) = u(-x, y); \tag{7}$$

$$u(x, y) = -u(-x, y). \tag{8}$$

Варианту расположения пластин в канале, показанному на рис. 1,б, соответствуют следующие условия симметрии:

$$u(x, y) = -u(-x, 1 - y); \tag{9}$$

$$u(x, y) = u(-x, 1 - y). \tag{10}$$

Таким образом, для решения задачи (3), (4) достаточно рассмотреть полуполосу  $x \geq 0$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Все последующие расчеты проведены для пластин, расположенных по схеме “тандем” (см. рис. 1,а). Вычисления для второго варианта расположения пластин можно выполнить аналогично, используя соответствующее представление функции  $u$ .

*Существование собственных колебаний вблизи тандема пластин в канале.* Доказательство существования собственных частот колебаний вблизи двух пластин в канале проводится с использованием метода вилки Дирихле — Неймана [16]. С помощью вариационных оценок показано, что собственные значения рассматриваемой задачи находятся между собственными значениями вспомогательных задач, которые в свою очередь принадлежат интервалу  $(0, \pi)$ .

Ниже приводится полная формулировка задачи. Собственные колебания вблизи пластины (пластин) в канале описываются с помощью потенциала  $u$  акустического возмущения скорости основного потока газа. Функция  $u$  должна удовлетворять системе соотношений

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + k^2 u &= 0, & (x, y) \in \Omega, \\ u_y &= 0, & (x, y) \in \Sigma, \\ \int_{\Omega_R} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dx dy &< \infty, & \Omega_R = \Omega \cap \{|x| < R\}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$u(x, y) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n y) C_n^+ e^{ix\sqrt{k^2 - (\pi n)^2}}, & x \geq R, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n y) C_n^- e^{-ix\sqrt{k^2 - (\pi n)^2}}, & x \leq -R, \end{cases}$$

где  $\Omega = \{(x, y): -\infty < x < \infty, 0 < y < 1\} \setminus \Sigma$  — область колебаний;  $\Sigma$  — границы области колебаний (стенки канала и поверхности пластин).

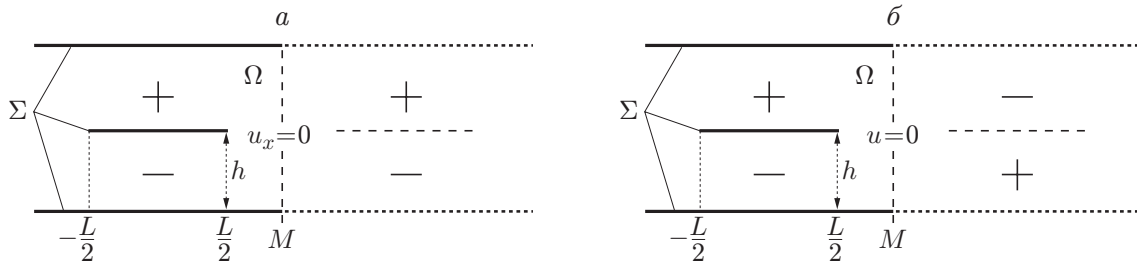


Рис. 2. Симметричные (а) и антисимметричные (б) собственные колебания вблизи тандема пластин в канале

Для доказательства существования собственных колебаний вблизи тандема пластин в канале рассмотрим задачу (11) для одной пластины в канале  $(\Sigma = (-\infty, \infty) \times \{0, 1\} \cup (-L/2, L/2) \times \{h\})$  с дополнительными условиями

$$u_x(x, y) = 0, \quad x = M > L/2; \quad (12)$$

$$u(x, y) = 0, \quad x = M > L/2. \quad (13)$$

Задачи (11), (12) и (11), (13) эквивалентны задаче (3)–(6) с условиями (7) и (8) соответственно, которые описывают симметричные и антисимметричные колебания вблизи тандема двух пластин (рис. 2).

Так как условие (12) сужает пространство решений задачи (11), а условие (13) расширяет его, имеем неравенства, которые можно получить с помощью вариационной формулировки задачи [16]:

$$k^\alpha < k^* < k^\beta \quad (14)$$

( $k^*$ ,  $k^\alpha$ ,  $k^\beta$  — собственные значения задачи (11) без дополнительных условий и с условиями (12) и (13) соответственно). Из условия ортогональности (5) следует, что  $k^\alpha > 0$ . Поскольку в [7] доказано, что существует значение  $k^* \in (0, \pi)$ , из вариационной оценки (14) следует существование собственной частоты  $k^\alpha$  для симметричных колебаний вблизи тандема двух пластин.

Так как решения задачи (11) удовлетворяют условиям  $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, y) = \lim_{x \rightarrow \infty} u_x(x, y) = 0$ , то при  $M \rightarrow \infty$  задачи (11), (12) и (11), (13) переходят в задачу (11) без дополнительных условий. Следовательно,  $\lim_{M \rightarrow \infty} k^\alpha = \lim_{M \rightarrow \infty} k^\beta = k^*$ . Иными словами, если расстояние между пластинами в тандеме больше некоторого значения  $d^*$ , то существует собственная частота  $k^\beta < \pi$  в задаче об антисимметричных колебаниях вблизи тандема двух пластин в канале. С увеличением расстояния между пластинами частоты антисимметричных колебаний уменьшаются, а частоты симметричных — увеличиваются, стремясь к собственной частоте колебаний вблизи одной пластины такой же длины, расположенной на том же расстоянии от стенок канала. Таким образом, имеет место бифуркация собственной частоты колебаний в окрестности тандема пластин в канале. При этом значение параметра  $d = \infty$  является точкой бифуркации частот  $k = k(L, h, d)$ . Заметим, что вследствие отсутствия ограничений для вариационных оценок (14) бифуркация частот имеет место для каждой моды колебаний.

Ниже с использованием метода частичных областей, подробно описанного в [9], получено численное решение задачи (3)–(6).

**Вид собственных функций и дискретизация задачи.** Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mu_n &= \pi n, & \mu_n^{(1)} &= \pi n/h, & \mu_n^{(2)} &= \pi n/(1-h), \\ \alpha_n &= \sqrt{\mu_n^2 - k^2}, & \alpha_n^{(1)} &= \sqrt{\mu_n^{(1)2} - k^2}, & \alpha_n^{(2)} &= \sqrt{\mu_n^{(2)2} - k^2}, & n \in \mathbb{N}, \\ & & \alpha_0^{(1)} &= \alpha_0^{(2)} &= ik. \end{aligned}$$

Обозначим через  $u_m$  представление потенциала акустического возмущения скорости в области  $\Omega_m$ ,  $m = 1, 2, 3, 4$ . С учетом условий (5)–(7) имеем

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^{(1)} e^{\alpha_n^{(1)} x} + b_n^{(1)} e^{-\alpha_n^{(1)} x}) \cos(\mu_n^{(1)} y), & (x, y) \in \Omega_1, \\ u_2(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^{(2)} e^{\alpha_n^{(2)} x} + b_n^{(2)} e^{-\alpha_n^{(2)} x}) \cos(\mu_n^{(2)}(y-h)), & (x, y) \in \Omega_2, \\ u_3(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi(\alpha_n x) \cos(\mu_n y), & (x, y) \in \Omega_3, \\ u_4(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\alpha_n x} \cos(\mu_n y), & (x, y) \in \Omega_4, \end{aligned}$$

где  $\varphi(x) = \operatorname{ch} x$  либо  $\varphi(x) = \operatorname{sh} x$  для четных и нечетных по переменной  $x$  колебаний соответственно.

Из условия (5) равенства нулю проекции собственной функции на поршневую моду следует отсутствие нулевого члена в разложениях  $u_3$  и  $u_4$ , а также в следующих двух соотношениях, связывающих коэффициенты  $a_0^{(1)}, a_0^{(2)}, b_0^{(1)}, b_0^{(2)}$ :

$$a_0^{(1)} h + a_0^{(2)}(1-h) = 0, \quad b_0^{(1)} h + b_0^{(2)}(1-h) = 0. \quad (15)$$

Для того чтобы функция являлась решением задачи на собственные колебания на границах областей  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), должны быть выполнены условия непрерывности решения и его нормальной производной

$$\begin{aligned} u_{2+j}(x, y) &= \begin{cases} u_1(x, y), & 0 \leq y \leq h, \\ u_2(x, y), & h \leq y \leq 1, \end{cases} & x = L_j, \\ \partial_x u_{2+j}(x, y) &= \begin{cases} \partial_x u_1(x, y), & 0 \leq y \leq h, \\ \partial_x u_2(x, y), & h \leq y \leq 1, \end{cases} & x = L_j, \\ L_1 &= l/2, & L_2 &= l/2 + L, & j &= 1, 2, \end{aligned}$$

эквивалентные системе интегральных равенств

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_{2+j}(L_j, y) \cos(\mu_n y) dy &= \int_0^h u_1(L_j, y) \cos(\mu_n y) dy + \int_h^1 u_2(L_j, y) \cos(\mu_n y) dy, \\ \int_0^1 \partial_x u_{2+j}(L_j, y) \cos(\mu_n y) dy &= \int_0^h \partial_x u_1(L_j, y) \cos(\mu_n y) dy + \\ &+ \int_h^1 \partial_x u_2(L_j, y) \cos(\mu_n y) dy, & j &= 1, 2, & n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя ортогональность функций  $\cos(\mu_n y)$  на отрезке  $[0, 1]$  и условия сшивания в интегральной форме (16), можно перейти к бесконечной системе линейных уравнений относительно коэффициентов  $a_n^{(1)}$ ,  $a_n^{(2)}$ ,  $b_n^{(1)}$ ,  $b_n^{(2)}$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Полученная таким образом система принимает вид

$$\int_0^h (\alpha_n u_1(L_2, y) + \partial_x u_1(L_2, y)) \cos(\mu_n y) dy +$$

$$+ \int_h^1 (\alpha_n u_2(L_2, y) + \partial_x u_2(L_2, y)) \cos(\mu_n y) dy = 0,$$

$$\int_0^h (\alpha_n \psi(\alpha_n L_1) u_1(L_1, y) - \partial_x u_1(L_1, y)) \cos(\mu_n y) dy +$$

$$+ \int_h^1 (\alpha_n \psi(\alpha_n L_1) u_2(L_1, y) - \partial_x u_2(L_1, y)) \cos(\mu_n y) dy = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$
(17)

где  $\psi(x) = \operatorname{th} x$  и  $\psi x = \operatorname{cth} x$  для четных и нечетных по переменной  $x$  колебаний соответственно.

Для решения системы (17) использовался метод редукции: из этой системы выбирается конечная подсистема уравнений ( $n = 1, \dots, K$ ), которая дополняется условиями ортогональности поршневой моде (15) и условиями непрерывности давления на кромке

$$u_1(L_j, h) - u_2(L_j, h) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (18)$$

обеспечивающими учет конечности энергии и увеличение скорости сходимости решения. При этом в представлении функций  $u_1$ ,  $u_2$  выбираются первые ( $N_1$  и  $N_2$ ) члены разложения в ряд Фурье. В [9] показано, что для достижения сходимости решения редуцированной системы к решению бесконечной системы должно быть увеличено количество членов разложения и выполнено соотношение

$$\lim_{N_1, N_2 \rightarrow \infty} \frac{N_1}{N_2} = \frac{h}{1-h}.$$

Следует отметить, что условия (18) не являются обязательными и используются для улучшения сходимости системы. При расчете частот симметричных колебаний вблизи тандема пластин условие на кромке  $x = L_1$  исключалось и заменялось дополнительным уравнением системы (17).

Полученная таким образом система является однородной системой линейных уравнений относительно коэффициентов  $a_n^{(1)}$ ,  $b_n^{(1)}$  ( $n = 0, \dots, N_1$ ) и  $a_n^{(2)}$ ,  $b_n^{(2)}$  ( $n = 0, \dots, N_2$ ). Существование ненулевого решения полученной однородной системы уравнений эквивалентно равенству нулю определителя этой системы. Соответствующие значения параметра  $k$ , при которых достигается указанное равенство, являются собственными частотами задачи.

**Свойства собственных аэроакустических колебаний газа.** Ниже представлены результаты решения задачи о собственных акустических колебаниях.

*Предварительные замечания.* Мода характеризует пространственную конфигурацию собственного колебания. В данной работе моды разделяются на симметричные и антисимметричные ( $\alpha$ - и  $\beta$ -моды соответственно), их номера соответствуют количеству пучностей

по длине пластины. Первой моде соответствует одна пучность по длине пластины, второй моде — две и т. д.

Собственные колебания вблизи двух пластин в канале можно рассматривать как возмущение собственных колебаний вблизи одной пластины, обусловленное наличием другой пластины в области колебаний. Эти колебания являются локализованными и экспоненциально убывают по мере удаления от пластин, поэтому при увеличении расстояния между пластинами  $d$  их влияние на частоты собственных колебаний уменьшается, поэтому при всех значениях параметра  $d > d_b(L)$  возмущением можно пренебречь. При этом, поскольку на бесконечности собственные колебания вблизи каждой пластины существуют независимо, возможны два вида колебаний: симметричные и антисимметричные. Иными словами, каждой моде собственных колебаний в окрестности пластины в канале соответствуют две моды собственных колебаний вблизи соответствующего тандема пластин в канале. Как показано при доказательстве существования собственных частот, это утверждение справедливо для больших расстояний между пластинами и может не выполняться для  $d \rightarrow 0$ .

В пределе  $d \rightarrow 0$  тандем двух пластин становится одной пластиной длиной  $2L$ . Поэтому можно предположить, что значения собственных частот тандема двух пластин длиной  $L$  стремятся к значениям частот пластины длиной  $2L$ , расположенной на том же расстоянии от стенок канала.

В работе [12] проведены экспериментальные и численные исследования аэроакустических колебаний вблизи тандема двух пластин длиной 66,7 и 40,0 мм, расположенных на средней линии канала высотой 240 мм. Расстояние между пластинами изменялось в диапазоне от 30 до 188 мм, частота собственных колебаний — в диапазоне от 672 до 697 Гц. В работе [12] указаны экспериментальные значения резонансной частоты для одной пластины длиной 66,7 мм в диапазоне частот 684 ÷ 691 Гц. Так как расчетные значения собственных частот для пластин, использованных в эксперименте, составляют приблизительно 684 и 693 Гц, то с увеличением расстояния между пластинами значение резонансной частоты стремится к значению частоты колебаний вблизи одной пластины в канале.

*Численные исследования.* Верификация расчетов проводилась путем сравнения полученных в данной работе частот колебаний вблизи тандема пластин при  $d \rightarrow 0$  и  $d \rightarrow \infty$  с результатами численных расчетов и экспериментальными данными работ [7, 8]. Выбор количества членов разложения функций  $u_1, u_2$  для получения заданной точности зависит от длины пластин: чем меньше длина пластины, тем большее количество членов ряда Фурье нужно использовать. Для расчета собственных частот тандема пластин длиной  $L = 2$  в середине канала с точностью до 0,01 достаточно выбрать  $N_1 = N_2 = 9$ .

*Количество собственных частот.* Количество  $\alpha$ -мод собственных колебаний вблизи тандема пластин в канале равно количеству мод собственных колебаний в окрестности одной пластины той же длины, расположенной на том же расстоянии от стенок канала. При больших значениях  $d$  количество  $\beta$ -мод равно количеству  $\alpha$ -мод. При сближении пластин число  $\beta$ -мод может уменьшиться на единицу, так как при  $d \rightarrow 0$  общее число мод колебаний вблизи тандема пластин в канале равно числу мод колебаний в окрестности пластины удвоенной длины, расположенной на том же расстоянии от стенок канала.

*Бифуркация частот.* Пусть  $\{\varkappa_1(L, h) < \dots < \varkappa_N(L, h)\}$  и  $\{\varkappa_1(2L, h) < \dots < \varkappa_{2N}(2L, h)\}$  — наборы собственных частот колебаний вблизи одной пластины длиной  $L$  и  $2L$  соответственно, находящейся на расстоянии  $h$  от стенок канала. Тогда этим наборам соответствуют частоты  $\{k_1^\alpha(L, d, h) < k_1^\beta(L, d, h) < \dots < k_N^\alpha(L, d, h) < k_N^\beta(L, d, h)\}$  собственных колебаний вблизи тандема двух пластин, для которых справедливы предельные соотношения

$$\lim_{d \rightarrow 0} k_m^\alpha(d, L, h) = \varkappa_{2m-1}(2L, h), \quad \lim_{d \rightarrow 0} k_m^\beta(d, L, h) = \varkappa_{2m}(2L, h),$$



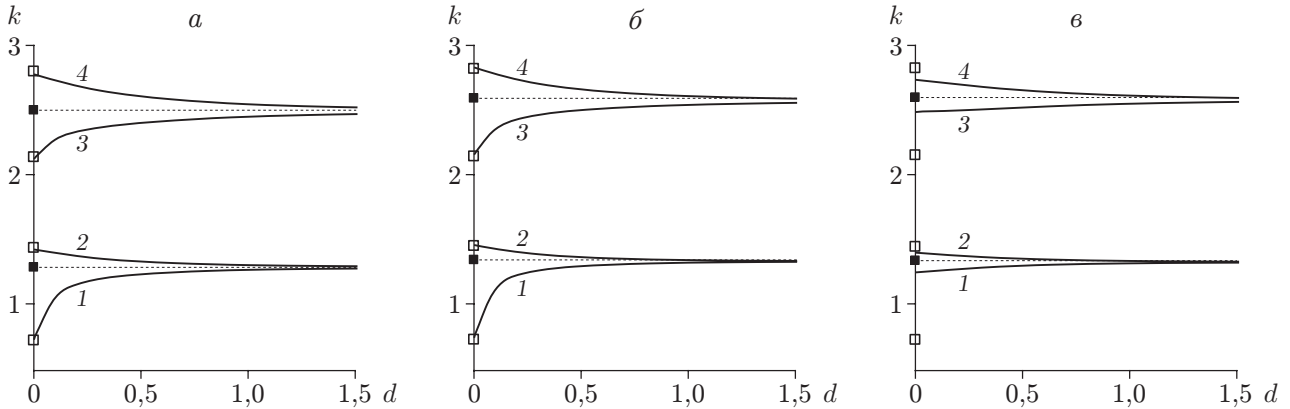


Рис. 3. Бифуркация собственных частот:

*a, б* — тандем двух пластин длиной  $L = 2$  (*a* —  $h = 0,5$ , *б* —  $h = 0,25$ ), *в* — две пластины, расположенные в соответствии со схемой, приведенной на рис. 1, *б* ( $L = 2$ ,  $h = 0,25$ ); 1 —  $\alpha_1$ -мода, 2 —  $\beta_1$ -мода, 3 —  $\alpha_2$ -мода, 4 —  $\beta_2$ -мода; точки — значения частот собственных колебаний вблизи одной пластины (темные —  $L = 2$ , светлые —  $L = 4$ )

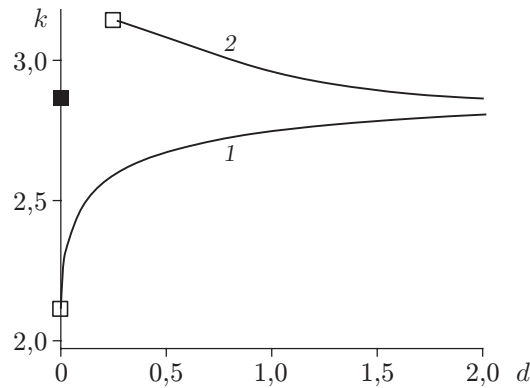


Рис. 4. Бифуркация собственных частот для тандема пластин длиной  $L = 0,5$  в середине канала:

1 —  $\alpha_1$ -мода, 2 —  $\beta_1$ -мода; точки — значения частот собственных колебаний вблизи одной пластины (темная —  $L = 0,5$ , светлые —  $L = 1$ )

$$\lim_{d \rightarrow \infty} k_m^\alpha(d, L, h) = \lim_{d \rightarrow \infty} k_m^\beta(d, L, h) = \varkappa_m(L, h), \quad m = 1, \dots, N.$$

Таким образом, имеет место бифуркация частот  $m$ -й моды в окрестности двух пластин в канале в зависимости от расстояния  $d$  между ними. На рис. 3, *a, б* приведены зависимости собственных частот колебаний вблизи тандема двух пластин в канале от расстояния между ними.

Если количество собственных частот для пластины длиной  $2L$  нечетное и равно  $2N - 1$ , а следовательно, количество собственных частот для пластины длиной  $L$  равно  $N$ , то частота  $k_N^\beta$ , соответствующая высшей моде  $\beta_N$  при некотором значении  $d = d_0(L, h)$ , переходит в область непрерывного спектра:

$$\lim_{d \rightarrow d_0+0} k_N^\beta(L, d, h) = \pi.$$

Следовательно, при любом расстоянии между пластинами  $d < d_0$  высшая мода будет представлена только модой  $\alpha_N$ , а мода  $\beta_N$  при таких параметрах не существует (рис. 4).

Значения величины $d_b(L, h, \varepsilon)$ для первой моды		
$L$	$d_b(L, 0,5, 0,01)$	$d_b(L, 0,5, 0,10)$
0,50	3,36	1,46
0,75	2,48	1,10
1,00	2,01	0,88
1,50	1,53	0,60
2,00	1,28	0,43

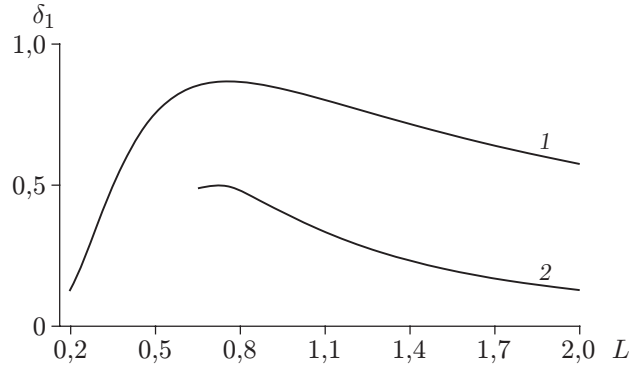


Рис. 5. Зависимости максимального возмущения частот собственных колебаний вблизи двух пластин в середине канала от длины пластин:  
 1 —  $\alpha_1$ -мода, 2 —  $\beta_1$ -мода

В настоящей работе исследуются собственные колебания, частоты которых меньше частоты отсечки канала. Если при изменении расстояния между пластинами частота колебания становится больше частоты отсечки, то его мода изменяется.

В случае если пластины находятся вблизи противоположных стенок канала (см. рис. 1,б) на расстоянии  $h$  от них, при их сближении также наблюдается бифуркация частот. Этот случай можно сравнить со случаем двух пластин, расположенных на том же расстоянии  $h$  от стенки канала. В обоих случаях имеется одинаковое количество собственных частот, которые совпадают при  $d \rightarrow \infty$ , однако в случае, представленном на рис. 1,б, предельные значения собственных частот при  $d \rightarrow 0$  менее существенно отклоняются от значения на бесконечности (ср. рис. 3,б,в), чем в случае тандема пластин.

Точка бифуркации собственных частот находится на бесконечности ( $d = \infty$ ), однако бифуркационные частоты существенно различаются даже при относительно небольших значениях  $d$ , поэтому при решении прикладных задач точкой бифуркации можно считать значение  $d_b(L, h, \varepsilon)$ , которое определяется условием

$$d_b(L, h, \varepsilon) = \min \{d: k_m^\beta(d, L, h) - k_m^\alpha(d, L, h) < \varepsilon\}.$$

Для разных мод значения  $d_b(L, h, \varepsilon)$  различаются. Число  $\varepsilon$  зависит от постановки задачи.

В таблице приведены значения величины  $d_b(L, h, \varepsilon)$  для первой моды при  $\varepsilon = 0,10; 0,01$ ,  $h = 0,5$  и различных значениях  $L$ .

Другим параметром, характеризующим влияние сближения пластин на возмущение частоты собственных колебаний, является наибольшее возможное отклонение собственной частоты при сближении пластин:

$$\delta_m^\alpha(L, h) = \left| \lim_{d \rightarrow \infty} k_m^\alpha(d, L, h) - \lim_{d \rightarrow 0} k_m^\alpha(d, L, h) \right|,$$

$$\delta_m^\beta(L, h) = \left| \lim_{d \rightarrow \infty} k_m^\beta(d, L, h) - \lim_{d \rightarrow 0} k_m^\beta(d, L, h) \right|.$$

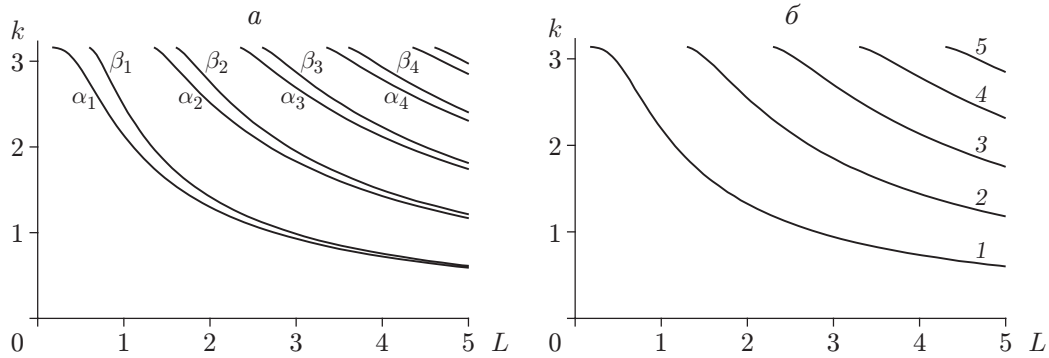


Рис. 6. Зависимость собственных частот от длины пластин:

*a* — тандем пластин в середине канала ( $d = 0,25$ ), *б* — пластина в середине канала; 1–5 — номера соответствующих мод колебаний

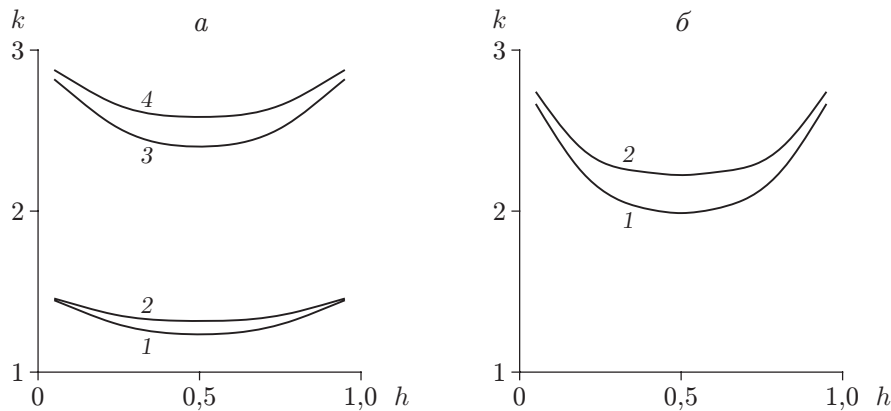


Рис. 7. Зависимости собственных частот от расстояния между пластинами и стенками канала:

*a* — тандем пластин длиной  $L = 2$  ( $d = 0,5$ ), *б* — две пластины длиной  $L = 1$ , смещенные в противоположных направлениях (см. рис. 1,б) ( $d = 0,5$ ); 1 —  $\alpha_1$ -мода, 2 —  $\beta_1$ -мода, 3 —  $\alpha_2$ -мода, 4 —  $\beta_2$ -мода

На рис. 5 показана зависимость величин  $\delta_1^\alpha$  и  $\delta_1^\beta$  от длины пластин в середине канала, расположенных по схеме “тандем”. Величина  $\delta$  изменяется нелинейно, максимальное возможное различие частот собственных колебаний первой моды достигается при сближении пластин, длина которых составляет приблизительно 0,7 ширины канала. Значения величины  $\delta_1^\beta$  показаны не для всех  $L$ , поскольку при малой длине пластин предел  $\lim_{d \rightarrow 0} k_1^\beta(d, L)$  не определен.

*Зависимость частоты от длины пластин.* На рис. 6 приведены зависимости собственных частот колебаний от длины пластин  $L$  для тандема пластин и одной пластины [8] в середине канала. Качественно зависимость собственных частот от длины пластины для тандема подобна зависимости для одной пластины: с увеличением длины пластин уменьшаются собственные частоты для каждой моды колебаний и увеличивается количество собственных частот. При наложении этих графиков друг на друга ветвь, соответствующая  $m$ -й моде колебаний вблизи пластины в канале, располагается между ветвями, соответствующими  $\alpha_m$ - и  $\beta_m$ -модам колебаний вблизи тандема двух пластин.

*Зависимость собственной частоты от расстояния до стенок канала.* При смещении тандема пластин, расположенных на средней линии канала, в направлении одной из

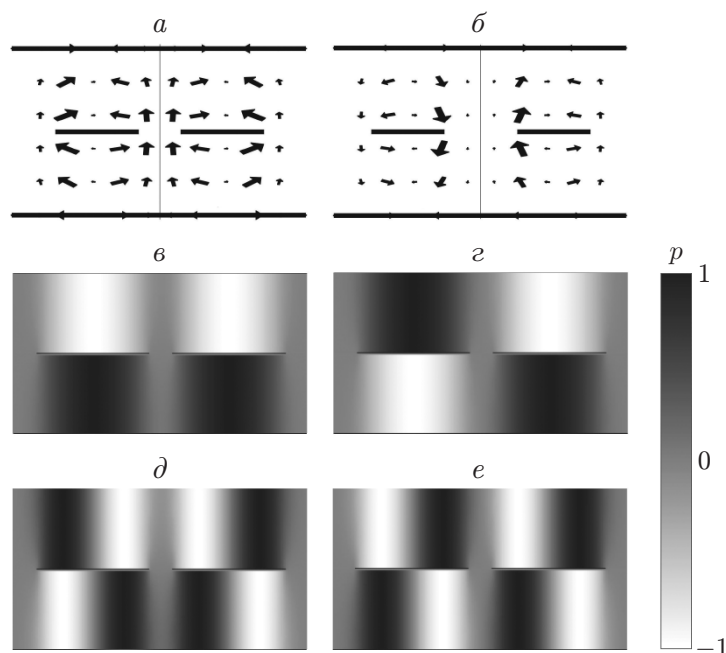


Рис. 8. Поля скоростей, соответствующие модам колебаний  $\alpha_1$  (а) и  $\beta_1$  (б), и поля давления  $p$ , соответствующие собственным колебаниям газа вблизи тандема пластин в канале ( $L = 2$ ,  $d = 0,5$ ) для мод  $\alpha_1$  (в),  $\beta_1$  (з),  $\alpha_2$  (д),  $\beta_2$  (е)

стенок при фиксированных остальных параметрах наблюдается увеличение значений собственных частот для всех мод колебаний. Тот же эффект наблюдается в случае, если пластины смещаются к противоположным стенкам (рис. 7).

*Механика колебаний.* На рис. 8, а, б приведены поля акустических скоростей симметричных и антисимметричных колебаний. Из рис. 8 следует, что собственные колебания вблизи пластины соответствуют перетеканию газа из области над пластиной в область под ней. Аналогичные расчеты поля акустических скоростей для пластины в канале проведены в работе [7], для тандема пластин — в работе [12]. Полученные результаты качественно согласуются.

На рис. 8, в–е показаны поля давления, соответствующие первым и вторым модам симметричных и антисимметричных колебаний вблизи тандема пластин в середине канала в фиксированный момент времени.

**Заключение.** Проведены численно-аналитические исследования собственных колебаний вблизи двух пластин в канале. Впервые обнаружена бифуркация частот собственных колебаний по безразмерному расстоянию между пластинами. Получены оценки параметров бифуркации. Численно найдены зависимости собственных частот от длины пластин и положения в канале.

Автор выражает благодарность С. В. Сухину за внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Parker R.** Resonance effects in wake shedding from parallel plates: some experimental observation // J. Sound Vibrat. 1966. V. 4, N 1. P. 62–72.
2. **Parker R.** Resonance effects in wake shedding from parallel plates: calculation of resonant frequencies // J. Sound Vibrat. 1967. V. 5, N 1. P. 330–343.

3. **Сухинин С. В.** Об акустических и электромагнитных колебаниях около периодической решетки // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1981. Вып. 51. С. 159–168.
4. **Сухинин С. В.** Качественные вопросы теории рассеяния на периодических цилиндрических препятствиях // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1984. Вып. 67. С. 118–134.
5. **Сухинин С. В.** Эффект волновода // Тез. докл. 6-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике, Ташкент, 24–30 сент. 1986 г. Ташкент: Б.и., 1986. С. 537–538.
6. **Сухинин С. В.** Эффект волновода // ПМТФ. 1989. № 2. С. 92–101.
7. **Сухинин С. В.** Собственные колебания около пластины в канале // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 2. С. 78–90.
8. **Сухинин С. В., Бардаханов В. Б.** Эоловы тона пластины в канале // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 2. С. 69–77.
9. **Миттра Р.** Аналитические методы теории волноводов / Р. Миттра, С. Ли. М.: Мир, 1974.
10. **Parker R.** Aeroacoustics // Intern. J. Fluid Dynamics. 1997. V. 1. Article 1. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: [http://elecpress.monash.edu.au/ijfd/1997\\_vol1/paper1/Parker.Abstract.html](http://elecpress.monash.edu.au/ijfd/1997_vol1/paper1/Parker.Abstract.html).
11. **Johnson C., Loehrke R.** An experimental investigation of wake edge tones // AIAA J. 1984. V. 22. P. 1249–1253.
12. **Stoneman S., Hourigan K., Stokes A., Welsh M.** Resonant sound caused by flow past two plates in tandem in a duct // J. Fluid Mech. 1988. V. 192. P. 455–484.
13. **Koch W.** Acoustic resonance and trapped modes in annular plate cascades // J. Fluid Mech. 2009. V. 628. P. 155–180.
14. **Hein S., Hohage T., Koch W.** On resonances in open systems // J. Fluid Mech. 2004. V. 506. P. 255–284.
15. **Седов Л. И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
16. **Саймон Б.** Методы современной математической физики: В 4 т. / Б. Саймон, М. Рид. М.: Мир, 1982. Т. 4.

*Поступила в редакцию 19/X 2015 г.,  
в окончательном варианте — 5/VI 2017 г.*

---