

УДК 539.32

РЕШЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ С МОДУЛЯМИ УПРУГОСТИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ, ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛО ВЫДЕЛЕНИЯ

М. И. А. Осман

Университет Эз-Заказика, 44519 Эз-Заказик, Египет
E-mail: m.i.othman@yahoo.com

С использованием преобразования Лапласа по времени и преобразования Фурье по пространственной переменной рассмотрено двумерное уравнение обобщенной термоупругости с одним временем релаксации в изотропной упругой среде с модулем упругости, зависящим от температуры, при наличии внутреннего источника тепловыделения. Для образцов задача решается в пространстве состояний. Рассмотрена задача о нагреве по экспоненциальному временному закону верхней и нижней поверхностей пластины большой толщины. Получены выражения для образцов перемещения, температуры и напряжений. Для получения обратного преобразования используется численный метод. Результаты решения задачи представлены в виде графиков. Проведено сравнение полученных результатов с результатами, предсказанными связанной теорией, в случае, когда модуль упругости не зависит от температуры.

Ключевые слова: термоупругость, пространство состояний, время релаксации, преобразование Лапласа и Фурье.

Введение. При решении различных научно-практических задач актуальным является учет реальных характеристик материалов. Большинство исследований проведено в предположении независимости свойств материала от температуры, что ограничивает область применимости решений, полученных в определенных диапазонах температуры. При высоких температурах характеристики материалов, такие как модуль упругости, коэффициент поперечного сжатия, температурный коэффициент линейного расширения и теплопроводность, не являются постоянными. В данной работе предполагается, что модуль упругости — единственный параметр материала, зависящий от температуры. Из анализа экспериментальных данных [1] следует, что зависимостями коэффициента поперечного сжатия и температурного коэффициента линейного расширения от температуры можно пренебречь. Как известно, исследование поверхностных волн в упругих твердых частицах представляет интерес в геофизике, а результаты исследования влияния тепловых эффектов на распространение упругих волн используются при решении различных астрофизических проблем [2, 3]. В работе [4] показано, каким образом форма плоских волн, бегущих в бесконечном упругом теле, влияет на его теплофизические свойства. В [5] эти результаты использованы в качестве физических основ для постановки новых задач.

Теории термоупругости с учетом времени тепловой релаксации предложены в работах [6] (теория Лорда — Шульмана) и [7] (теория Грина — Линдсея). В этих теориях вводится одно или два времени релаксации, для того чтобы устранить парадокс распространения тепловых сигналов с бесконечной скоростью. Модель Лорда — Шульмана основана на модифицированном законе Фурье, а в модели Грина — Линдсея существует “второй

звук” и при этом не нарушается классический закон Фурье. Эти две теории не могут быть получены одна из другой как частный случай. При исследовании различных задач, характерных для теорий Лорда — Шульмана и Грина — Линдсея, обнаружены интересные явления [8, 9]. В работе [10] изучена волна сильного разрыва и получена теорема разложения [11], в [12] решена задача о тепловом ударе, в [13] теория Лорда — Шульмана распространена на общий случай изотропной среды, в которой имеются источники тепла. Вследствие сложности этих задач существует небольшое количество их решений.

При исследовании обобщенных или связанных задач термоупругости часто используется потенциальная функция. Этот подход не всегда является эффективным, что обусловлено главным образом двумя факторами [14]. Во-первых, целесообразно сформулировать задачу в терминах величин, имеющих физический смысл, поскольку граничные и начальные условия задачи ставятся для этих величин. Во-вторых, решение физической задачи, сформулированной в естественных переменных, является сходящимся, в то время как решение той же задачи с использованием потенциальной функции сходится не всегда. При решении связанной и обобщенной задач термоупругости пространство состояний впервые использовано в работах [14, 15] соответственно. В [16] пространство состояний применялось при решении двумерных задач обобщенной термоупругости с одним временем релаксации. В работе [17] предложены одно- и двумерная модели обобщенной термоупругости с одним и двумя временами релаксации в изотропной упругой среде с механическими свойствами, зависящими от температуры. В [18] изучено отражение магнитно-термоупругих волн с использованием теории с двумя временами релаксации и модулями упругости, зависящими от температуры. В [19] исследована обобщенная упругая среда при наличии тепловых микронапряжений и температурно-зависимых свойств.

В данной работе пространства состояний используются при изучении двумерной задачи обобщенной термоупругости с одним временем релаксации в изотропной среде с учетом зависимости модуля упругости от температуры. При этом применяются преобразования Лапласа и Фурье, обратное преобразование выполняется с использованием численного метода [20]. На основе предложенного подхода решена задача о нагреве по экспоненциальному временному закону верхней и нижней поверхностей массивной пластины. Результаты решения задачи представлены в графическом виде. Проведено сравнение полученных результатов с результатами, предсказанными связанной теорией, в случае, когда модуль упругости не зависит от температуры.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропную упругую среду, модуль упругости которой зависит от температуры. Уравнение состояния для теории обобщенной термоупругости с одним временем релаксации записывается в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \gamma(T - T_0)\delta_{ij}. \quad (1)$$

Уравнение теплопроводности, соотношение между напряжениями и перемещениями и уравнения движения соответственно имеют вид

$$kT_{,ii} = \rho C_E(\dot{T} + \tau_0 \ddot{T}) + \gamma T_0(\dot{e}_{i,j} + \tau_0 \ddot{e}_{i,j}) - (Q + \tau_0 \dot{Q}); \quad (2)$$

$$e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2; \quad (3)$$

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i. \quad (4)$$

В (1)–(4) λ , μ — постоянные Ламе; ρ — плотность материала; C_E — удельная теплоемкость при постоянном напряжении; Q — мощность источника тепла на единицу массы; T — абсолютная температура; $T_0 = \delta_0 \rho c_0^2 / (\gamma_0 E_0) = (\delta_0 / \alpha_T)(1 - \nu) / (1 + \nu)$ — исходная температура; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; $e = \varepsilon_{ii}$; ε_{ij} — компоненты тензора деформации; u_i — компоненты вектора перемещения; k — теплопроводность; τ_0 — время релаксации; точка над символом обозначает дифференцирование по времени, запятая

в нижнем индексе — производную по пространственной переменной; по повторяющимся индексам проводится суммирование; индексы i, j принимают значения 1, 2, 3.

Предположим, что

$$E = E_0 f(T), \quad \lambda = E_0 \lambda_0 f(T), \quad \mu = E_0 \mu_0 f(T), \quad \gamma = E_0 \gamma_0 f(T). \quad (5)$$

Здесь $f(T)$ — заданная безразмерная функция температуры; $\mu_0 = 1/(2(1 + \nu))$; $\lambda_0 = \nu/((1 + \nu)(1 - 2\nu))$; $\gamma_0 = \alpha_T/(1 - 2\nu)$; α_T — температурный коэффициент линейного расширения; ν — коэффициент поперечного сжатия; E_0 — модуль упругости при $\alpha^* = 0$; α^* — эмпирическая константа материала, K^{-1} . В случае если модуль упругости не зависит от температуры, $f(T) \equiv 1$, $E = E_0$.

В силу (5) уравнения движения (4) принимают вид

$$\rho \ddot{u}_i = E_0 f[(\lambda_0 + \mu_0) \varepsilon_{,i} + \mu_0 \nabla^2 u_i - \gamma_0 T_{,i}] + E_0 f_{,j} [\lambda_0 e \delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij} - \gamma_0 (T - T_0) \delta_{ij}]. \quad (6)$$

Введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} x^* &= c_0 \eta_0 x, & y^* &= c_0 \eta_0 y, & u_i^* &= c_0 \eta_0 u_i, & t^* &= c_0^2 \eta_0 t, & \tau_0^* &= c_0^2 \eta_0 \tau_0, \\ \theta^* &= \frac{\gamma_0 E_0}{\rho c_0^2} (T - T_0), & \sigma_{ij}^* &= \frac{\sigma_{ij}}{\rho c_0^2}, & Q' &= \frac{\rho Q}{k T_0 c_0^2 \eta^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь t — время; $c_0^2 = (\lambda_0 + 2\mu_0)E_0/\rho$; $\eta_0 = \rho C_E/k$. Уравнения (1), (6), (2) в безразмерных переменных принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= [(2\beta - 1)e \delta_{ij} + (1 - \beta)(u_{i,j} + u_{j,i}) - \theta \delta_{ij}] f(\theta), \\ \ddot{u}_i &= [\beta e_{,i} + (1 - \beta) \nabla^2 u_i - \theta_{,i}] f(\theta) + [(2\beta - 1) e f_{,i} + (1 - \beta)(u_{i,j} + u_{j,i}) f_{,j} - \theta f_{,i}], \\ \nabla^2 \theta &= \dot{\theta} + \tau_0 \ddot{\theta} + \varepsilon_1 f(\theta) \delta_0 (\dot{e} + \tau_0 \ddot{e}) - (Q + \tau_0 \dot{Q}), \end{aligned}$$

где $\beta = E_0(\lambda_0 + \mu_0)/(\rho c_0^2) = 1/(2(1 - \nu))$; звездочка у безразмерных величин опущена для упрощения записи. Ниже рассматривается частный случай $|T - T_0| \ll 1$, $f(\theta) = 1 - \alpha^* T_0$. При этом двумерные уравнения движения и уравнение теплопроводности соответственно принимают вид

$$\alpha \ddot{u} = \nabla^2 u + \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (8)$$

$$\alpha \ddot{v} = \nabla^2 v + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial y};$$

$$\nabla^2 \theta = \dot{\theta} + \tau_0 \ddot{\theta} + \varepsilon (\dot{e} + \tau_0 \ddot{e}) - (Q + \tau_0 \dot{Q}), \quad (9)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_1 \delta_0 (1 - \alpha^* T_0)$; $\varepsilon_1 = \gamma_0 E_0 / (\rho C_E)$. Для компонент тензора напряжений имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \alpha \sigma_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + (2\beta - 1) \frac{\partial v}{\partial y} - \theta, & \alpha \sigma_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + (2\beta - 1) \frac{\partial u}{\partial x} - \theta, \\ \alpha \sigma_{zz} &= (2\beta - 1)e - \theta, & \alpha \sigma_{xy} &= (1 - \beta) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\alpha = 1/(1 - \alpha^* T_0)$. Уравнения (8)–(10) представляют собой полную систему уравнений обобщенной термоупругости с одним временем релаксации.

Далее рассматривается двумерная задача. Предполагается, что все искомые величины не зависят от переменной z и волны распространяются только в плоскости (x, y) . В этом случае вектор перемещения имеет компоненты $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, 0.

Применяя преобразование Лапласа

$$\bar{f}(x, y, s) = L\{f(x, y, t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(x, y, t) dt$$

и преобразование Фурье

$$\bar{f}^*(q, y, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqx} \bar{f}(x, y, s) dx$$

к обеим частям уравнений (8)–(10), получаем

$$\alpha s^2 \bar{u}^* = -q^2 \bar{u}^* + iq\beta D\bar{v}^* + (1 - \beta)D^2 \bar{u}^* - iq\bar{\theta}^*, \quad D = \frac{d}{dy}; \quad (11)$$

$$\alpha s^2 \bar{v}^* = -q^2(1 - \beta)\bar{v}^* + iq\beta D\bar{u}^* + D^2 \bar{v}^* - D\bar{\theta}^*; \quad (12)$$

$$-q^2 \bar{\theta}^* + D^2 \bar{\theta}^* = s(1 + \tau_0 s)\bar{\theta}^* + \varepsilon s(1 + \tau_0 s)\bar{e}^* - (1 + \tau_0 s)\bar{Q}^*; \quad (13)$$

$$\alpha \bar{\sigma}_{xx}^* = iq\bar{u}^* + (2\beta - 1)D\bar{v}^* - \bar{\theta}^*, \quad \alpha \bar{\sigma}_{yy}^* = D\bar{v}^* + iq(2\beta - 1)\bar{u}^* - \bar{\theta}^*, \quad (14)$$

$$\alpha \bar{\sigma}_{zz}^* = (2\beta - 1)\bar{e}^* - \bar{\theta}^*, \quad \alpha \bar{\sigma}_{xy}^* = (1 - \beta)(D\bar{u}^* + iq\bar{v}^*).$$

2. Пространство состояний. В качестве параметров состояния в области физических параметров выберем величины $e, \theta, De, D\theta$. В пространстве образов в качестве переменных состояния используются величины $\bar{e}^*, \bar{\theta}^*, D\bar{e}^*, D\bar{\theta}^*$, где

$$\bar{e}^* = iq\bar{u}^* + D\bar{v}^*. \quad (15)$$

Исключая \bar{u}^*, \bar{v}^* из уравнений (11), (12) с помощью (13), (15), получаем уравнения

$$D^2 \bar{e}^* = (\alpha s^2 + q^2 + \varepsilon P)\bar{e}^* + P\bar{\theta}^* - (1 + \tau_0 s)\bar{Q}^*,$$

$$D^2 \bar{\theta}^* = \varepsilon P\bar{e}^* + (q^2 + P)\bar{\theta}^* - (1 + \tau_0 s)\bar{Q}^*,$$

которые можно записать в матричной форме:

$$\frac{dW(q, y, s)}{dy} = \tilde{A}(q, s)W(q, y, s) + \tilde{B}(q, y, s). \quad (16)$$

Здесь

$$\tilde{A}(q, s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha s^2 + q^2 + \varepsilon P & P & 0 & 0 \\ \varepsilon P & q^2 + P & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = s(1 + \tau_0 s),$$

$$W(q, y, s) = \begin{bmatrix} \bar{e}^*(q, y, s) \\ \bar{\theta}^*(q, y, s) \\ D\bar{e}^*(q, y, s) \\ D\bar{\theta}^*(q, y, s) \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}(q, y, s) = -(1 + \tau_0 s)\bar{Q}^*(q, y, s) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Формальное решение системы (16) имеет вид

$$W(q, y, s) = \exp(\tilde{A}(q, s)y) \left\{ W(q, y_0, s) + \int_{y_0}^y \exp(-\tilde{A}(q, s)z) \tilde{B}(q, z, s) dz \right\}, \quad (17)$$

где y_0 — любое произвольно выбранное начальное значение y .

В частном случае, когда источники тепла отсутствуют, уравнение (17) упрощается:

$$W(q, y, s) = \exp(\tilde{A}(q, s)y)W(q, y_0, s). \quad (18)$$

Характеристическое уравнение матрицы $\tilde{A}(q, s)$ имеет вид

$$k^4 - [\alpha s^2 + 2q^2 + P(1 + \varepsilon)]k^2 + q^4 + q^2[\alpha s^2 + P(1 + \varepsilon)] + \alpha s^2 P = 0. \quad (19)$$

Корни уравнения (19) удовлетворяют соотношениям

$$k_1^2 + k_2^2 = a_1, \quad k_1^2 k_2^2 = a_2, \quad (20)$$

где

$$k_{1,2}^2 = (a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2})/2; \\ a_1 = \alpha s^2 + 2q^2 + P(1 + \varepsilon), \quad a_2 = q^4 + q^2[\alpha s^2 + P(1 + \varepsilon)] + \alpha s^2 P. \quad (21)$$

Разложение в ряд Маклорена $\exp(\tilde{A}(q, s)y)$ задается выражением

$$\exp(\tilde{A}(q, s)y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\tilde{A}(q, s)y]^n}{n!}.$$

Используя теорему Гамильтона — Кэли, представленный ряд можно записать в виде

$$\exp(\tilde{A}(q, s)y) = \tilde{L}(q, y, s) = b_0 \tilde{I} + b_1 \tilde{A} + b_2 \tilde{A}^2 + b_3 \tilde{A}^3, \quad (22)$$

где \tilde{I} — единичная матрица четвертого порядка; b_0, \dots, b_3 — некоторые параметры, зависящие от величин y, q, s .

Согласно теореме Гамильтона — Кэли характеристические корни $\pm k_1, \pm k_2$ матрицы \tilde{A} должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} \exp(k_1 y) &= b_0 + b_1 k_1 + b_2 k_1^2 + b_3 k_1^3 = \sum_{i=0}^3 b_i k_1^i, \\ \exp(-k_1 y) &= b_0 - b_1 k_1 + b_2 k_1^2 - b_3 k_1^3 = \sum_{i=0}^3 (-1)^i b_i k_1^i, \\ \exp(k_2 y) &= b_0 + b_1 k_2 + b_2 k_2^2 + b_3 k_2^3 = \sum_{i=0}^3 b_i k_2^i, \\ \exp(-k_2 y) &= b_0 - b_1 k_2 + b_2 k_2^2 - b_3 k_2^3 = \sum_{i=0}^3 (-1)^i b_i k_2^i. \end{aligned} \quad (23)$$

Решение системы (23) имеет вид

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{k_1^2 \operatorname{ch}(k_2 y) - k_2^2 \operatorname{ch}(k_1 y)}{k_1^2 - k_2^2}, & b_1 &= \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \left(\frac{k_1^2}{k_2} \operatorname{sh}(k_2 y) - \frac{k_2^2}{k_1} \operatorname{sh}(k_1 y) \right), \\ b_2 &= \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} [\operatorname{ch}(k_1 y) - \operatorname{ch}(k_2 y)], & b_3 &= \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \left(\frac{1}{k_1} \operatorname{sh}(k_1 y) - \frac{1}{k_2} \operatorname{sh}(k_2 y) \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя выражения (24) в (22) и вычисляя \tilde{A}^2 и \tilde{A}^3 , после повторного использования (20) получаем элементы m_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) матрицы $\tilde{L}(q, y, s)$:

$$m_{11} = \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} [(k_1^2 - q^2 - P) \operatorname{ch}(k_1 y) - (k_2^2 - q^2 - P) \operatorname{ch}(k_2 y)],$$

$$\begin{aligned}
m_{12} &= \frac{P}{k_1^2 - k_2^2} [\operatorname{ch}(k_1 y) - \operatorname{ch}(k_2 y)], \\
m_{13} &= \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \left(\frac{k_1^2 - q^2 - P}{k_1} \operatorname{sh}(k_1 y) - \frac{k_2^2 - q^2 - P}{k_2} \operatorname{sh}(k_2 y) \right), \\
m_{14} &= \frac{P}{k_1^2 - k_2^2} \left(\frac{1}{k_1} \operatorname{sh}(k_1 y) - \frac{1}{k_2} \operatorname{sh}(k_2 y) \right), \\
m_{21} &= \frac{\varepsilon P}{k_1^2 - k_2^2} [\operatorname{ch}(k_1 y) - \operatorname{ch}(k_2 y)], \\
m_{22} &= \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} [(k_1^2 - q^2 - P) \operatorname{ch}(k_2 y) - (k_2^2 - q^2 - P) \operatorname{ch}(k_1 y)], \\
m_{23} &= \frac{\varepsilon P}{k_1^2 - k_2^2} \left(\frac{1}{k_1} \operatorname{sh}(k_1 y) - \frac{1}{k_2} \operatorname{sh}(k_2 y) \right), \\
m_{24} &= \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \left(\frac{k_1^2 - q^2 - P}{k_2} \operatorname{sh}(k_2 y) - \frac{k_2^2 - q^2 - P}{k_1} \operatorname{sh}(k_1 y) \right), \\
m_{31} &= \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} [k_1(k_1^2 - q^2 - P) \operatorname{sh}(k_1 y) - k_2(k_2^2 - q^2 - P) \operatorname{sh}(k_2 y)], \\
m_{32} &= \frac{P}{k_1^2 - k_2^2} [k_1 \operatorname{sh}(k_1 y) - k_2 \operatorname{sh}(k_2 y)], \\
m_{33} &= \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} [(k_1^2 - q^2 - P) \operatorname{ch}(k_1 y) - (k_2^2 - q^2 - P) \operatorname{ch}(k_2 y)], \\
m_{34} &= \frac{P}{k_1^2 - k_2^2} [\operatorname{ch}(k_1 y) - \operatorname{ch}(k_2 y)], \\
m_{41} &= \frac{\varepsilon P}{k_1^2 - k_2^2} [k_1 \operatorname{sh}(k_1 y) - k_2 \operatorname{sh}(k_2 y)], \\
m_{42} &= \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} [k_2(k_1^2 - q^2 - P) \operatorname{ch}(k_2 y) - k_1(k_2^2 - q^2 - P) \operatorname{ch}(k_1 y)], \\
m_{43} &= \frac{\varepsilon P}{k_1^2 - k_2^2} [\operatorname{ch}(k_1 y) - \operatorname{ch}(k_2 y)], \\
m_{44} &= \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} [(k_1^2 - q^2 - P) \operatorname{ch}(k_2 y) - (k_2^2 - q^2 - P) \operatorname{ch}(k_1 y)].
\end{aligned} \tag{25}$$

Следует отметить, что, полагая в (21) $\alpha = 1$, можно получить соответствующие выражения для обобщенной плоской волны в теории термоупругости с одним временем релаксации в случае, когда модуль упругости не зависит от температуры.

3. Пример. Рассматривается пластина конечной высоты $2L$ и бесконечной протяженности, часть поверхности которой нагревается [21]. Предполагается, что в начальном положении пластина находится в состоянии покоя. Направим ось y , проходящую через середину пластины, перпендикулярно ее поверхности. Решение будем искать в области $\Omega = \{(x, y, z): x, y, z \in \mathbb{R}, -L < y < L\}$.

Две параллельные полосы шириной $2L$ на верхней и нижней поверхностях пластины нагреваются источниками тепла, мощность которых зависит от времени. Поверхности пластины не нагружены.

Граничные условия задачи для образов имеют вид

$$\bar{\sigma}_{yy}^* = 0 \quad \text{при } y = \pm L; \quad (26)$$

$$\bar{\sigma}_{xy}^* = 0 \quad \text{при } y = \pm L; \quad (27)$$

$$\bar{q}_n^* + h\bar{\theta}^* = \bar{r}^*(q, s) \quad \text{при } y = \pm L, \quad (28)$$

где q_n — нормальная компонента вектора теплового потока; h — число Био; $r(x, t)$ — мощность источников тепла.

Далее используется обобщенный закон теплопроводности Фурье в безразмерной форме

$$q_n + \tau_0 \frac{\partial q_n}{\partial t} = -\frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

Выполняя преобразования Лапласа и Фурье, получаем выражение

$$\bar{q}_n^* = -\frac{1}{1 + \tau_0 s} \frac{\partial \bar{\theta}^*}{\partial y},$$

из которого находим

$$\pm D\bar{\theta}^* = (1 + \tau_0 s)(h\bar{\theta}^* - \bar{r}^*) \quad \text{при } y = \pm L. \quad (29)$$

Температура и дилатация определяются с учетом (18):

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^*(q, y, s) &= m_{21}e_0 + m_{22}\theta_0 + m_{23}e'_0 + m_{24}\theta'_0, \\ \bar{e}^*(q, y, s) &= m_{11}e_0 + m_{12}\theta_0 + m_{13}e'_0 + m_{14}\theta'_0. \end{aligned} \quad (30)$$

С помощью (25) уравнения (30) сводятся к уравнениям

$$\bar{\theta}^*(q, y, s) = \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \{ \varepsilon P e_0 - [q^2 + \alpha s^2 + P(1 + \varepsilon) - k_i^2] \theta_0 \} \text{ch}(k_i y); \quad (31)$$

$$\bar{e}^*(q, y, s) = \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} [(k_i^2 - q^2 - P)e_0 + P\theta_0] \text{ch}(k_i y). \quad (32)$$

Подставляя (15) в уравнение (11), получаем

$$(D^2 - k_3^2)\bar{u}^* = \frac{iq}{1 - \beta} (\bar{\theta}^* - \beta\bar{e}^*), \quad (33)$$

где $k_3^2 = \alpha s^2 / (1 - \beta) + q^2$. Подставляя (31), (32) в правую часть (33) и решая полученное дифференциальное уравнение, находим

$$\begin{aligned} \bar{u}^* &= C \text{ch}(k_3 y) + \frac{iq}{(1 - \beta)(k_1^2 - k_2^2)} \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^{i-1}}{k_i^2 - k_3^2} \{ [\varepsilon P - \beta(k_i^2 - q^2 - P)] e_0 - \\ &\quad - [P\beta + q^2 + \alpha s^2 + P(1 + \varepsilon + \beta) - k_i^2] \theta_0 \} \text{ch}(k_i y). \end{aligned} \quad (34)$$

Подставляя (34), (32) в (12) и интегрируя полученное уравнение, имеем

$$\begin{aligned} \bar{v}^* &= \frac{-iqC}{k_3} \text{sh}(k_3 y) + \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^{i-1}}{k_i^2 - k_3^2} [(k_i^2 - q^2 - P)e_0 + P\theta_0] \text{sh}(k_i y) + \\ &\quad + \frac{q^2}{(1 - \beta)(k_1^2 - k_2^2)} \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^{i-1}}{k_i(k_i^2 - k_3^2)} \{ [\varepsilon P - \beta(k_i^2 - q^2 - P)] e_0 - \\ &\quad - [q^2 + \alpha s^2 + P(1 + \varepsilon + \beta) - k_i^2] \theta_0 \} \text{sh}(k_i y). \end{aligned} \quad (35)$$

Компоненты тензора напряжений можно получить, подставляя (34), (35) в уравнения (14):

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx}^* = & \frac{2iq(1-\beta)}{\alpha} C \operatorname{ch}(k_3y) - \frac{2q^2}{\alpha(k_1^2 - k_2^2)} \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^{i-1}}{k_i^2 - k_3^2} \{[\varepsilon P + \beta(q^2 + P - k_i^2)]e_0 - \\ & - [q^2 + \alpha s^2 + P(1 + \varepsilon + \beta) - k_i^2]\theta_0\} \operatorname{ch}(k_iy) + \\ & + \frac{1}{\alpha(k_1^2 - k_2^2)} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \{[(2\beta - 1)(k_i^2 - q^2 - P) - \varepsilon P]e_0 + \\ & + [P(2\beta - 1) + q^2 + \alpha s^2 + P(1 + \varepsilon) - k_i^2]\theta_0\} \operatorname{ch}(k_iy); \quad (36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{yy}^* = & \frac{-2iq(1-\beta)}{\alpha} C \operatorname{ch}(k_3y) + \frac{2q^2}{\alpha(k_1^2 - k_2^2)} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \left(\frac{1}{k_i^2 - k_3^2} [\varepsilon P + \beta(k_i^2 - q^2 - P)]e_0 - \right. \\ & \left. - [q^2 + \alpha s^2 + P(1 + \varepsilon + \beta) - k_i^2]\theta_0 \right) \operatorname{ch}(k_iy) + \\ & + \frac{1}{\alpha(k_1^2 - k_2^2)} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \{[k_i^2 - q^2 - P(1 + \varepsilon)]e_0 + [q^2 + \alpha s^2 + P(2 + \varepsilon) - k_i^2]\theta_0\} \operatorname{ch}(k_iy); \quad (37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{zz}^* = & \frac{1}{\alpha(k_1^2 - k_2^2)} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \{[(2\beta - 1)(k_i^2 - q^2 - P) - \varepsilon P]e_0 + \\ & + [P(2\beta - 1) + q^2 + \alpha s^2 + P(1 + \varepsilon) - k_i^2]\theta_0\} \operatorname{ch}(k_iy); \quad (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xy}^* = & \frac{(1-\beta)(k_3^2 - q^2)}{\alpha k_3} C \operatorname{sh}(k_3y) + \\ & + \frac{iq}{\alpha(k_1^2 - k_2^2)} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \left(\frac{k_i^2 - q^2}{k_i(k_i^2 - k_3^2)} [\varepsilon P - \beta(k_i^2 - q^2 - P)]e_0 - \right. \\ & \left. - [q^2 + \alpha s^2 + P(1 + \varepsilon + \beta) - k_i^2]\theta_0 \right) \operatorname{sh}(k_iy) - \\ & - \frac{iq(1-\beta)}{\alpha(k_1^2 - k_2^2)} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \frac{1}{k_i} [(k_i^2 - q^2 - P)e_0 + P\theta_0] \operatorname{sh}(k_iy). \quad (39) \end{aligned}$$

Полученное решение для образов зависит от трех констант C , e_0 , θ_0 , которые могут быть определены из граничных условий конкретной задачи.

Подставляя (37), (39), (31) в граничные условия (26), (27), (29) соответственно, получаем

$$\begin{aligned} B_1e_0 + B_2\theta_0 - B_3C = 0, \quad B_4e_0 + B_5\theta_0 + B_6C = 0, \\ B_7e_0 + B_8\theta_0 = -(1 + \tau_0s)\bar{r}^*. \end{aligned} \quad (40)$$

Решая уравнения (40), получаем параметры e_0 , θ_0 , C :

$$\begin{aligned} e_0 = \frac{-(1 + \tau_0s)\bar{r}^*}{\Delta} (B_2B_6 + B_3B_5), \quad \theta_0 = \frac{(1 + \tau_0s)\bar{r}^*}{\Delta} (B_1B_6 + B_3B_4), \\ C = \frac{(1 + \tau_0s)\bar{r}^*}{\Delta} (B_2B_4 - B_1B_5). \end{aligned}$$

Здесь

$$B_1 = \frac{1}{\alpha(k_1^2 - k_2^2)} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \left(\frac{2q^2}{k_i^2 - k_3^2} [\varepsilon P - \beta(k_i^2 - q^2 - P)] + (k_i^2 - q^2 - \varepsilon P) \right) \operatorname{ch}(k_i L),$$

$$B_2 = \frac{-1}{\alpha(k_1^2 - k_2^2)} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \left(\frac{2q^2}{k_i^2 - k_3^2} [q^2 + \alpha s^2 + P(1 + \varepsilon + \beta) - k_i^2] - [q^2 + \alpha s^2 + P(2 + \varepsilon) - k_i^2] \right) \operatorname{ch}(k_i L),$$

$$B_3 = \frac{2iq(1 - \beta)}{\alpha} \operatorname{ch}(k_3 L),$$

$$B_4 = \frac{iq}{\alpha(k_1^2 - k_2^2)} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \left(\frac{k_i^2 + q^2}{k_i(k_i^2 - k_3^2)} [\varepsilon P + \beta(q^2 + P - k_i^2)] + \frac{1 - \beta}{k_i} (k_i^2 - q^2 - P) \right) \operatorname{sh}(k_i L),$$

$$B_5 = \frac{-iq}{\alpha(k_1^2 - k_2^2)} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \left(\frac{k_i^2 + q^2}{k_i(k_i^2 - k_3^2)} [q^2 + \alpha s^2 + P(1 + \varepsilon + \beta) - k_i^2] - P(1 - \beta) \right) \operatorname{sh}(k_i L),$$

$$B_6 = \frac{(1 - \beta)(k_3^2 + q^2)}{\alpha k_3} \operatorname{sh}(k_3 L),$$

$$B_7 = \frac{\varepsilon P}{k_1^2 - k_2^2} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} [k_i \operatorname{sh}(k_i L) - h(1 + \tau_0 s) \operatorname{ch}(k_i L)],$$

$$B_8 = \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} [q^2 + \alpha s^2 + P(1 + \varepsilon) - k_i^2] [h(1 + \tau_0 s) \operatorname{ch}(k_i L) - k_i \operatorname{sh}(k_i L)],$$

$$\Delta = B_7[B_2 B_6 + B_3 B_5] - B_8[B_1 B_6 + B_3 B_4].$$

Таким образом, получено решение задачи для образов искомых функций.

4. Обращение преобразований. Для того чтобы получить решение задачи в области физических параметров, необходимо обратить двойные преобразования в (31), (34)–(39). Эти выражения являются функциями вида $\bar{f}^*(q, y, s)$. Используя формулу обращения, обратим преобразование Фурье:

$$\bar{f}(x, y, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iqx} \bar{f}^*(q, y, s) dq = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [f_e \cos(qx) + if_0 \sin(qx)] dq \quad (41)$$

(f_e, f_0 — четные и нечетные части функции $\bar{f}^*(q, y, s)$ соответственно).

Опишем численный метод обращения преобразования, используемый для нахождения решения в области физических параметров. При постоянных значениях q, x, y функцию в квадратных скобках в последнем интеграле (41) можно рассматривать как преобразование Лапласа $\bar{g}(s)$ некоторой функции $g(t)$. Формулу обращения преобразования Лапласа можно записать в виде

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \bar{g}(s) ds,$$

где c — произвольное вещественное число, большее, чем все вещественные части особых точек функции $\bar{g}(s)$. Полагая $s = c + iy$, последний интеграл можно представить в форме

$$g(t) = \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} \bar{g}(c + iy) dy.$$

Разлагая функцию $h(t) = \exp(-ct)g(t)$ в ряд Фурье в интервале $[0, 2L]$, получаем приближенную формулу [20]

$$g(t) = g_{\infty}(t) + E_D,$$

где

$$g_{\infty}(t) = \frac{1}{2} C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k, \quad 0 \leq t \leq 2L; \quad (42)$$

$$C_k = (e^{ct}/L) \operatorname{Re} [e^{ik\pi t/L} \bar{g}(c + ik\pi/L)],$$

погрешность дискретизации E_D может быть сделана сколь угодно малой [20].

При оценке $g(t)$ в бесконечном ряду в (42) можно ограничиться конечным числом членов N :

$$g_N(t) = \frac{1}{2} C_0 + \sum_{k=1}^N C_k, \quad 0 \leq t \leq 2L. \quad (43)$$

При использовании формулы (43) для оценки функции $g(t)$ вносится погрешность, обусловленная удержанием конечного числа членов E_T . Полная погрешность аппроксимации есть сумма этой погрешности и погрешности дискретизации.

Для уменьшения полной погрешности используются два метода: метод коррекции для уменьшения погрешности дискретизации и ε -алгоритм для уменьшения погрешности, обусловленной удержанием конечного числа членов E_T для ускорения сходимости.

Для оценки функции $g(t)$ в методе коррекции применяется формула

$$g(t) = g_{\infty}(t) - e^{-2cL} g_{\infty}(2L + t) + E'_D,$$

где $|E'_D| \ll |E_D|$ — погрешности дискретизации [20]. Таким образом, выражение для приближенного значения $g(t)$ можно записать в виде

$$g_{NK}(t) = g_N(t) - e^{-2cL} g_{N'}(2L + t) \quad (44)$$

($N' < N$ — целое число).

Опишем ε -алгоритм, используемый для того, чтобы ускорить сходимость ряда (43).

Пусть N — нечетное натуральное число, $S_m = \sum_{k=1}^m C_k$ — последовательность частичных сумм (43). Определим ε -последовательность $\varepsilon_{0,m} = 0$, $\varepsilon_{1,m} = S_m$, $\varepsilon_{n+1,m} = \varepsilon_{n-1,m+1} + (\varepsilon_{n,m+1} - \varepsilon_{n,m})^{-1}$, $n, m = 1, 2, 3, \dots$. Можно показать, что последовательность $\varepsilon_{1,1}, \varepsilon_{3,1}, \dots, \varepsilon_{N,1}$ сходится к $g(t) + E_D - C_0/2$ быстрее, чем последовательность частичных сумм S_m , $m = 1, 2, \dots$ (см., например, [20]).

Процедура, используемая для обращения преобразования Лапласа, состоит в использовании (44) совместно с ε -алгоритмом. Значения c и L выбираются в соответствии с критериями, предложенными в [20].

Последним шагом в процедуре обращения является оценка интеграла в (41). Этот шаг выполняется с использованием процедуры интегрирования Ромберга с адаптивным шагом. В данном методе используются результаты последовательных приближений, полученных с помощью обобщенной формулы трапеций, которые затем экстраполируются на предельный случай, когда шаг стремится к нулю [21].

5. Результаты численных расчетов. В численном примере источник $r(x, t)$ был выбран в виде

$$r(x, t) = H(x - |a|)H(t) \exp(-bt), \quad (45)$$

где a, b — фиксированные постоянные; H — единичная ступенчатая функция Хевисайда. Функция $r(x, t)$ представляет собой действующий в области $-a \leq x \leq a$ локализованный источник тепла, мощность которого при $t = 0$ равна единице и со временем затухает по экспоненциальному закону. Применяя двойное преобразование к функции $r(x, t)$, получаем

$$\bar{r}^*(q, s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(qa)[1 + iq\pi\delta(q)]}{q(s + b)},$$

где $\delta(q)$ — дельта-функция.

При проведении численных расчетов в качестве материала была выбрана медь. Использовались следующие константы задачи: $\varepsilon = 0,003$, $\delta_0 = 0,0199$, $T_0 = 293$ К, $a = 0,1$, $b = 1$, $h = 100$, $\bar{r}^* = 10^5$, $\beta = 0,6667$.

Для обращения двойных преобразований (31), (34)–(36) использовался описанный выше численный метод. В результате определены температура θ , горизонтальная компонента вектора перемещения u , компонента тензора напряжений σ_{xx} на поверхности ($y = 3$) и в середине пластины ($L = 6$) при $t = 0,1; 0$. Результаты расчетов представлены на рис. 1–6. Сплошные и штриховые линии соответствуют решениям, полученным с использованием связанной теории ($\tau_0 = 0$) и теории Лорда — Шульмана ($\tau_0 = 0,005$) при $\alpha = 1,8$ ($\alpha^* = 0,001517$ К⁻¹) и $\alpha = 1$ ($\alpha^* = 0$). Значение $\alpha = 1,8$ соответствует случаю, когда механические характеристики зависят от температуры, $\alpha = 1$ — случаю, когда они не зависят от температуры.

Результаты расчетов, приведенные на рис. 1–6, подтверждают данные о том, что тепловые возмущения распространяются с конечной скоростью. Поскольку перемещение v является нечетной функцией y , его значение в середине пластины всегда равно нулю. В случае учета времени релаксации в уравнении теплопроводности скорость распространения тепловых волн конечна, тогда как в случае неучета времени релаксации скорость их распространения бесконечна. В этом заключается существенное различие между связанной теорией и обобщенной теорией термоупругости.

6. Выводы. Результаты проведенного анализа позволяют сделать следующие выводы.

Как на поверхности пластины, так и в ее середине с увеличением времени амплитуды всех величин, характеризующих изученные поля, увеличиваются.

Как на поверхности пластины, так и в ее середине скорость распространения тепловых возмущений возрастает в том случае, если механические характеристики материала зависят от температуры.

Как на поверхности пластины, так и в ее середине амплитуды горизонтальной составляющей вектора перемещения u и компоненты тензора напряжений σ_{xx} уменьшаются, если механические характеристики материала зависят от температуры.

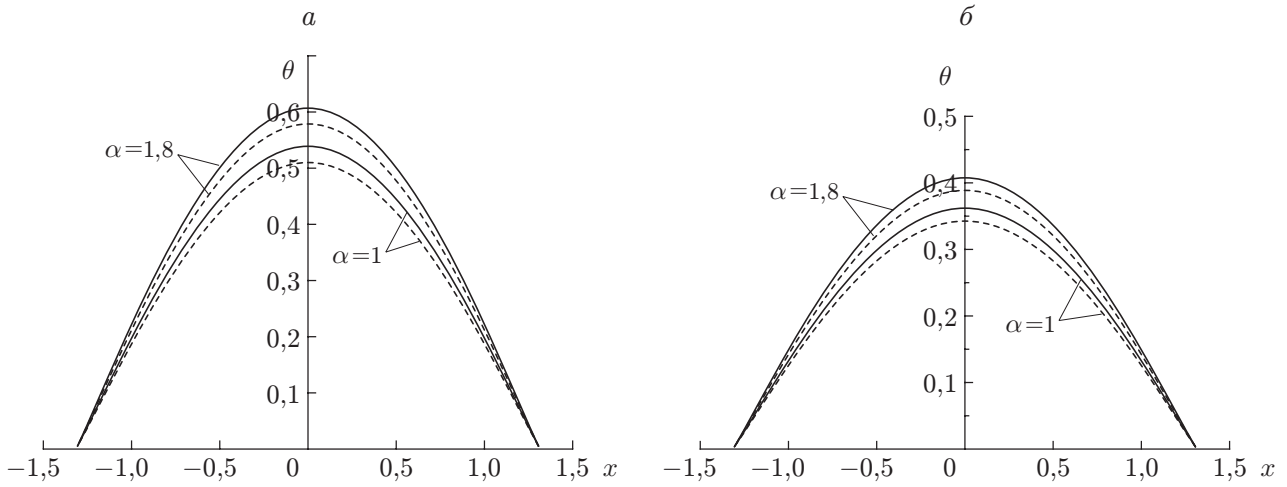


Рис. 1. Распределение температуры θ на поверхности пластины:
 $a — t = 0,1$, $b — t = 0$; сплошные линии — расчет с использованием связанной теории, штриховые — расчет с использованием обобщенной теории Лорда — Шульмана

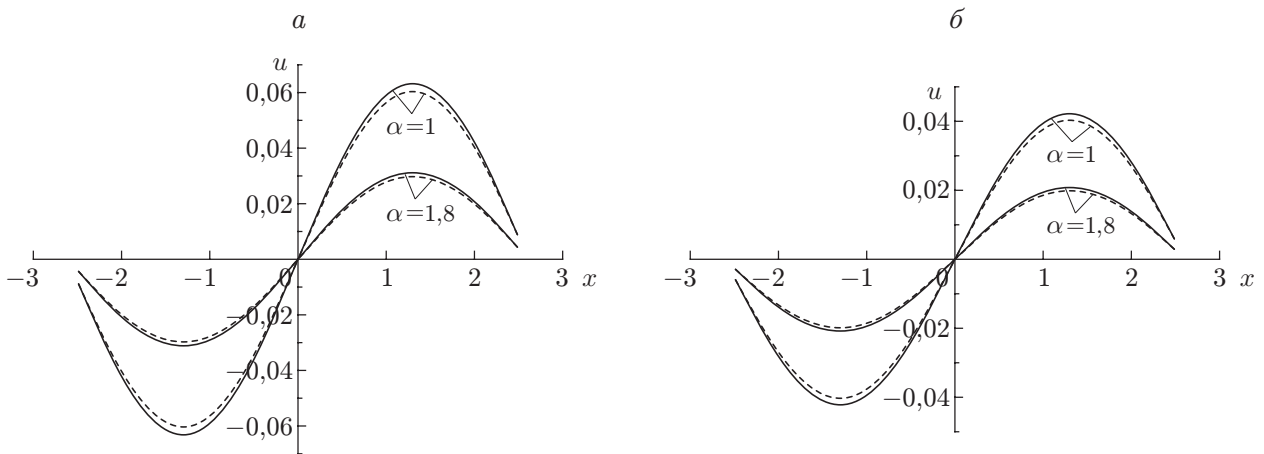


Рис. 2. Распределение горизонтальной составляющей вектора перемещения u на поверхности пластины:
 $a — t = 0,1$, $b — t = 0$; обозначения те же, что на рис. 1

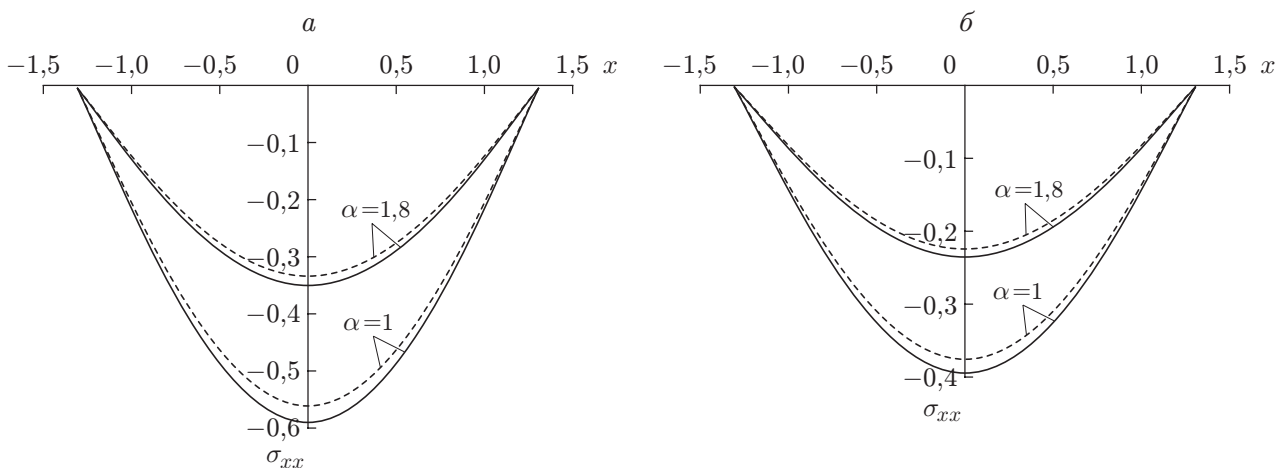


Рис. 3. Распределение компоненты тензора напряжений σ_{xx} на поверхности пластины:
 $a — t = 0,1$, $b — t = 0$; обозначения те же, что на рис. 1

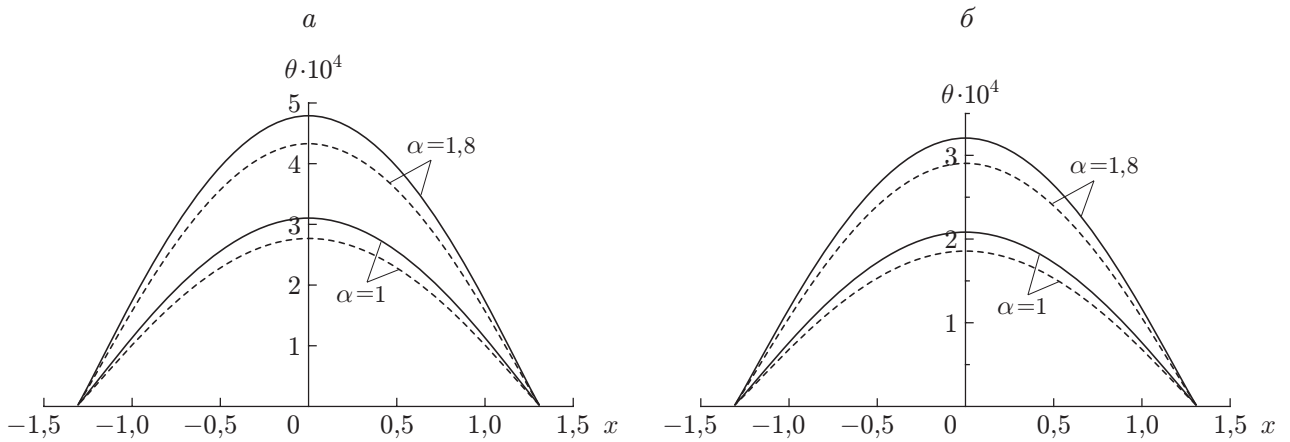


Рис. 4. Распределение температуры θ в середине пластины:
 a — $t = 0,1$, b — $t = 0$; обозначения те же, что на рис. 1

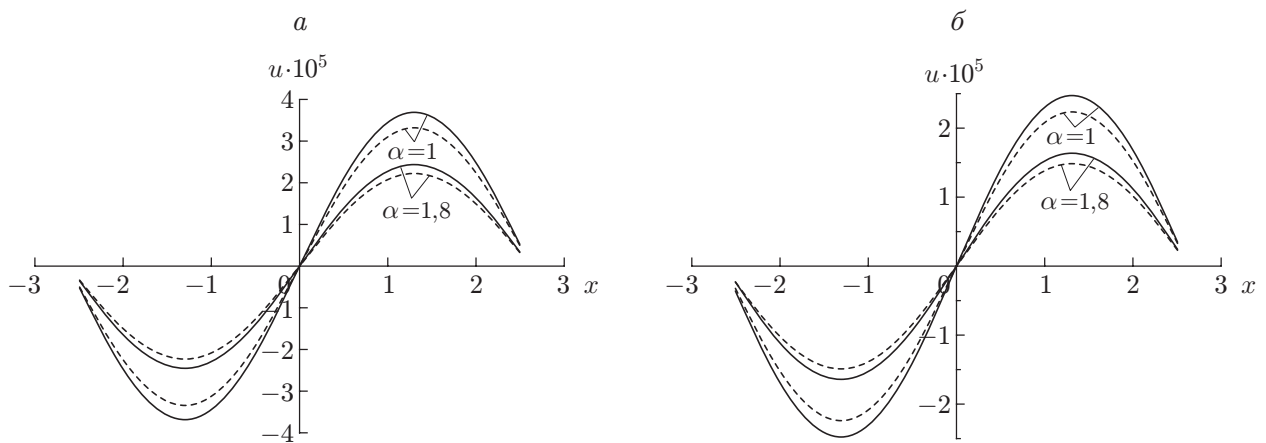


Рис. 5. Распределение горизонтальной составляющей вектора перемещения u в середине пластины:
 a — $t = 0,1$, b — $t = 0$; обозначения те же, что на рис. 1

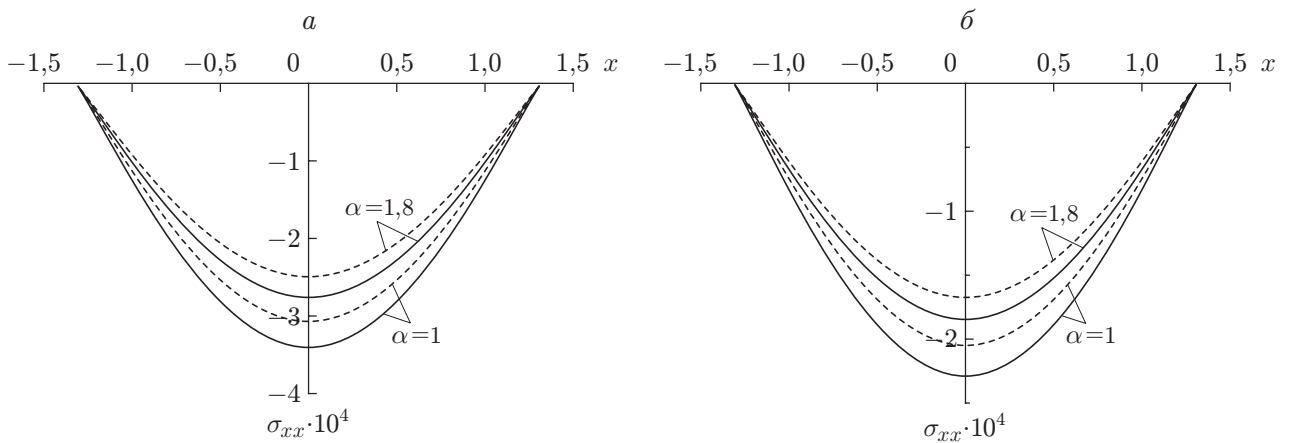


Рис. 6. Распределение компоненты тензора напряжений σ_{xx} в середине пластины:
 a — $t = 0,1$, b — $t = 0$; обозначения те же, что на рис. 1

Амплитуды температуры, горизонтальной составляющей вектора перемещения u и компоненты тензора напряжений σ_{xx} в середине пластины существенно меньше этих величин на ее поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Manson S. S.** Behavior of material under conditions of thermal stress. S. l., 1954. (Rep. / NASA; N 1170).
2. **Mangin G. A.** Nonlinear electromechanical effects and applications. Singapor: World Sci., 1985.
3. **Nowinski J. L.** Theory of thermoelasticity with applications. Alphenaan an den Rijn (Netherlands): Sijthoff and Noordhoof Intern. Publ., 1978.
4. **Chadwick P., Sneddon I. N.** Plate wave in an elastic solids conducting heat // J. Mech. Phys. Solids. 1958. V. 6. P. 223.
5. **Biot M.** Thermoelasticity and irreversible thermodynamics // J. Appl. Phys. 1956. V. 27. P. 240.
6. **Lord H. W., Shulman Y.** A generalized dynamical theory of thermoelasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1967. V. 15. P. 299–309.
7. **Green A. E., Lindsay K. A.** Thermoelasticity // J. Elast. 1972. V. 2. P. 1–7.
8. **Chandrasekharaiah D. S.** Thermoelasticity with second sound: a review // Appl. Mech. Rew. 1986. V. 39, N 3. P. 353–376.
9. **Chandrasekharaiah D. S.** Hyperbolic thermoelasticity a review of recent leterature // Appl. Mech. Rew. 1998. V. 51, N 12. P. 705–729.
10. **Ignaczak J.** A strong discontinuity wave in thermoelasticity with relaxation times // J. Therm. Stresses. 1985. V. 8. P. 25.
11. **Ignaczak J.** Decomposition theorem for thermoelasticity with finite wave speeds // J. Therm. Stresses. 1978. V. 1. P. 41.
12. **Dhaliwal R., Rokne.** Thermal shock problem in generalized thermoelastic // J. Therm. Stresses. 1989. V. 12. P. 259.
13. **Dhaliwal R., Sherief H. H.** Generalized thermoelasticity for an isotropic media // Quart. Appl. Math. 1980. V. 33. P. 1–8.
14. **Bahar L., Hetnarski R.** State space approach to thermoelasticity // J. Therm. Stresses. 1978. V. 1. P. 135–145.
15. **Anwar M. A., Sherief H. H.** State space approach to generalized thermoelasticity // J. Therm. Stresses. 1988. V. 11. P. 353–365.
16. **Sherief H. H., Anwar M. A.** State space approach to two-dimensional generalized thermoelasticity problems // J. Therm. Stresses. 1994. V. 17. P. 567–590.
17. **Othman M. I. A.** State space approach to generalized thermoelasticity plane waves with two relaxation times under the dependence of the modulus of elasticity on reference temperature // Canad. J. Phys. 2003. V. 81. P. 1403–1418.
18. **Othman M. I. A., Song Y. Q.** Reflection of magneto-thermoelasticity waves with two relaxation times and temperature dependent elastic moduli // Appl. Math. Modelling. 2008. V. 32. P. 483–500.
19. **Othman M. I. A., Lotfy Kh., Farouk R. M.** Generalized thermo-microstretch elastic medium with temperature dependent properties for different theories // Engng Anal. Boundary Element. 2010. V. 34. P. 229–237.
20. **Honig G., Hirdes U.** A method for the numerical inversion of the Laplace transform // J. Comput. Appl. Math. 1984. V. 10. P. 113–132.
21. **William H.** Numerical recipes. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986.