

УДК 532.515.5, 551.511.32

## Исследование устойчивого пограничного слоя с использованием явной алгебраической модели турбулентности\*

А.Ф. Курбацкий<sup>1</sup>, Л.И. Курбацкая<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

E-mail: L.Kurbatskaya@ommgp.sccc.ru

С помощью недавно развитой явной анизотропной алгебраической модели напряжений Рейнольдса проведены вычисления для исследования динамики устойчивого пограничного слоя по схеме известного тестового случая проекта GABL51, но с более широкой областью устойчивости, где градиентное число Ричардсона  $Ri > 1$ . Модель включает воздействие гравитационных волн, позволяющее учесть поддержание импульса в условиях сильной устойчивости. Цель исследования — получение более реалистичного, меньшего по глубине, чем в традиционных моделях первого порядка, пограничного слоя. Рассматривается случай с постоянной скоростью охлаждения поверхности. Некоторые интересные особенности модели связаны с выводом, основанным на физических принципах. В частности, использование большего количества прогностических уравнений в модели позволяет получить более реалистичное динамическое поведение. Модель показывает хорошее согласование с результатами LES-моделирования.

**Ключевые слова:** турбулентность, устойчивый планетарный пограничный слой, явная алгебраическая модель турбулентных потоков, постоянный форсинг поверхности, численное моделирование.

### Введение

При охлаждении поверхности в термически стратифицированной среде (в частности, в атмосфере) потенциальная температура возрастает с высотой и развивается устойчивый пограничный слой. Большое многообразие физических процессов в устойчивом атмосферном пограничном слое (АПС), их нелинейность и их взаимодействия препятствуют нашему пониманию и моделированию устойчивого пограничного слоя в большом пространственном масштабе [1, 2]. Распространенные схемы турбулентного перемешивания используют параметризацию турбулентных потоков импульса и тепла для устойчивого пограничного слоя с включением неуниверсальных эмпирических функций устойчивости, зависящих от градиентного числа Ричардсона ( $Ri$ ) [3]. В настоящей статье

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Новосибирской области в рамках научного проекта 18-48-540005.

формулируется явная (т.е. безытерационная) алгебраическая модель стратифицированной турбулентности, не включающая эмпирических функций устойчивости.

Моделирование турбулентности является важным фактором в инженерных приложениях, например, для вычисления сопротивления наземных транспортных средств или самолетов, а также в атмосферных науках для описания значительного турбулентного транспорта тепла и импульса в АПС [4]. В настоящее время модели турбулентности представлены двумя основными классами, в одном из них принимается во внимание осредненный эффект всех масштабов турбулентности (Reynolds-averaged Navier–Stokes или RANS модели), в другом моделируются только подсеточные масштабы (Large-Eddy Simulation или LES-модели).

Многие используемые модели стратифицированной турбулентности базируются на концепции вихревой вязкости, а эффекты плавучести часто включаются в выражения для турбулентных потоков через эмпирические функции, основанные на теории подобия Мони́на–Обухова [5], которая строго справедлива только для поверхностного слоя. Важной величиной в этих моделях является линейный масштаб турбулентности, который часто основывается на эмпирической модели, предложенной Блэкадаром [6]. Однако гипотеза вихревой вязкости оказывается недостаточной для правильного описания турбулентных потоков. В частности, она не дает правильного описания анизотропии напряжений Рейнольдса  $\overline{u_i u_j}$ . Более общий подход был предложен в работах [7, 8], где была выведена хорошо известная иерархия моделей турбулентности, основанная на транспортных уравнениях для напряжений Рейнольдса и турбулентного потока тепла  $\overline{u_i \theta}$  в АПС. Позднее, развитые модели АПС также основывались на этой иерархии (см., например, [9]). Однако из-за встречающихся ограничений при реальном моделировании климата и прогнозировании погоды на практике рассматривались только простейшие модели этой иерархии и использовалось минимальное число прогностических уравнений, главным образом, уравнение турбулентной кинетической энергии (ТКЭ). Примером такой модели является модель турбулентности с одним прогностическим уравнением для ТКЭ [10]. Попытка более глубокого изучения геофизической турбулентности указала на потребность в дополнительных прогностических уравнениях, в частности, для турбулентной потенциальной энергии (ТПЭ) [11–13].

Эффекты плавучести и стратификации температуры, которые крайне важны для АПС, менее значимы в масштабах инженерных приложений. Без учета плавучести уравнения турбулентности существенно упрощаются. Распространенными моделями турбулентности, используемыми в инженерных приложениях, являются  $k-\varepsilon$  [14] и  $k-\omega$  [15] модели, которые содержат два прогностических уравнения: для ТКЭ и скорости ее диссипации  $\varepsilon$ . Подобные модели турбулентности также использовались при рассмотрении атмосферных условий (как, например, в [16]), но в гораздо меньшей степени. Стандартные формулировки этих моделей с двумя уравнениями по-прежнему основаны на гипотезе вихревой вязкости, но в последние годы был достигнут существенный прогресс, связанный с выводом более общих моделей из транспортных уравнений для напряжений Рейнольдса и турбулентного потока тепла. Ключевым понятием в этом случае является так называемое слабо-равновесное приближение [17, 18], в котором пренебрегается адвекцией и диффузией определенных безразмерных величин. Такое приближение приводит к связанной неявной системе алгебраических уравнений для турбулентных потоков (подобно иерархии моделей первого уровня Меллора и Ямады). Разрешение замкнутых уравнений для турбулентных потоков импульса и тепла с помощью символической алгебры приводит к явной (безытерационной) алгебраической модели турбулентных потоков. В работах [19–22] были предприняты исследования для расширения этого более общего подхода моделирования турбулентных течений с плавучестью, т.е. с температурой или

плотностью как активным скаляром и с применением приближения слабо-равновесной турбулентности для атмосферных моделей. Включение активного скаляра усложняет математический вывод модели из-за связей между напряжениями Рейнольдса и тепловыми потоками, которые порождают члены плавучести. Примеры моделей, которые были развиты посредством этого подхода, могут быть найдены в работах [23–26].

В настоящем исследовании за основу взята модель, верифицированная в атмосферном пограничном слое [21], которая является одной из первых полностью явных (безытерационных) моделей (турбулентные потоки полностью выражаются через прогностические переменные), апробированной в устойчивом АПС. Нужно отметить, что аналогичные подходы использовались в LES-кодах, атмосферных и инженерных исследованиях [27, 28]. Несмотря на то, что двухпараметрические модели были испытаны в инженерных приложениях, получение модели из более фундаментальных принципов и тестирование ее в канонических тестовых случаях не означает, что она будет точнее в более сложных случаях, к которым относятся атмосферные течения. Такие случаи могут включать ряд физических явлений, не рассмотренных в модели. В связи с этим возникает вопрос, как указанные вновь развитые модели, основанные на более общих принципах, работают применительно к АПС и, в частности, в какой мере явная алгебраическая модель напряжений Рейнольдса, которая выведена из замкнутых прогностических уравнений для потоков импульса и тепла, воспроизводит наблюдаемую динамику ночного пограничного слоя для случая с ясным небом без учета радиационных потоков и влажности.

Основная цель настоящего исследования — тестирование развитой в работах [20, 21] алгебраической модели для широко известного тестового случая GABLS1 (Global Energy and Water Cycle Experiment Atmospheric Boundary Layer Study) [1, 29], где был сформирован полностью устойчивый пограничный слой при постоянной скорости охлаждения поверхности. Этот случай заслуживает особого внимания, потому что воспроизведение устойчивого пограничного слоя — один из сложных вопросов при моделировании атмосферной турбулентности. Более общее воздействие поверхности на процессы турбулентного переноса в АПС рассматривалось в работе [30]. Полученные в настоящем исследовании численные результаты сопоставляются с результатами одномерной (single-column) модели [10] и данными LES-расчетов [1, 29].

### 1. Явная алгебраическая модель напряжений Рейнольдса и турбулентного потока тепла

Настоящая работа не преследует цели провести обзор традиционных одномерных моделей (см., например, [22]). Ниже приводятся основные уравнения модели, выведенные из осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, в которых использована декомпозиция переменных на средние и пульсационные части. Отправной точкой являются уравнения для средней скорости  $\bar{U} = (U, V, W)$  и средней потенциальной температуры  $\Theta$ . В случае атмосферного пограничного слоя уравнения для среднего течения могут быть записаны в следующем упрощенном виде:

$$\frac{DU}{Dt} = -\frac{\partial \bar{uw}}{\partial z} - f(V_g - V), \quad (1)$$

$$\frac{DV}{Dt} = -\frac{\partial \bar{vw}}{\partial z} + f(U_g - U), \quad (2)$$

$$\frac{D\Theta}{Dt} = -\frac{\partial \bar{w\theta}}{\partial z}, \quad (3)$$

где  $f = 2\Omega \sin \varphi$  — параметр Кориолиса, зависящий от скорости вращения  $\Omega$  Земли,  $\varphi$  — широта,  $z$  — вертикальная координата,  $\bar{U}_g = (U_g, V_g)$  — геострофическая скорость ветра,

обусловленная силой крупномасштабного градиента давления,  $D/Dt = \partial/\partial t + U_k \partial/\partial x_k$  — материальная производная в направлении средней скорости,  $\overline{uw}$ ,  $\overline{vw}$  и  $\overline{w\theta}$  — компоненты турбулентного потока импульса (или напряжения Рейнольдса) и турбулентного потока тепла соответственно, которые содержат неизвестные корреляции флуктуаций скорости ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) и температурных флуктуаций  $\theta$ . Отметим, что в (1)–(3) учитывается исключительно турбулентный перенос в вертикальном направлении и предполагается наличие горизонтально однородных условий для статистики турбулентности. Когда система (1)–(3) решается только на вертикальной сетке, это называется «single-column» моделью или моделью первого порядка. Для замкнутой формы (1)–(3) необходимо построение модели для турбулентных потоков, т.е. турбулентные потоки должны быть выражены через среднюю скорость и потенциальную температуру.

### 1.1. Моделирование напряжений Рейнольдса

Приближение вихревой вязкости не имеет физического обоснования и приводит к неадекватной модели для случая сложных течений [31]. В частности, оно не позволяет корректно отразить анизотропию тензора напряжений Рейнольдса  $\overline{u_i u_j}$  и обмен между компонентами кинетической энергии, поэтому более правильный путь получения моделей для турбулентных потоков заключается в рассмотрении транспортных уравнений для всех компонент тензора  $\overline{u_i u_j}$  и вектора турбулентного потока тепла  $\overline{u_i \theta}$ :

$$\frac{D \overline{u_i u_j}}{Dt} - D_{ij} = P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} + G_{ij}, \quad (4)$$

$$\frac{D \overline{u_i \theta}}{Dt} - D_{\theta i} = P_{\theta i} + \Pi_{\theta i} - \varepsilon_{\theta i} + G_{\theta i}, \quad (5)$$

где члены в каждом из этих уравнений (слева направо) обозначают: адвекцию, диффузию, порождение сдвигом, перераспределение давлением, диссипацию и порождение плавучести. Члены порождения имеют вид:

$$P_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}, \quad (6)$$

$$P_{\theta i} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} - \overline{u_j \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \quad (7)$$

$$G_{ij} = \frac{g}{T_0} (\delta_{i3} \overline{u_j \theta} + \delta_{j3} \overline{u_i \theta}), \quad (8)$$

$$G_{\theta i} = 2 \frac{g}{T_0} E_{\theta} \delta_{i3}, \quad (9)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести,  $T_0$  — стандартное значение температуры,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера и  $E_{\theta} = \overline{\theta^2}/2$  — дисперсия температуры, деленная на 2. Эти члены порождения имеют замкнутый вид, в то время как члены в (4), (5), в особенности члены перераспределения давлением, содержат неизвестные корреляции, которые необходимо моделировать.

Для диссипативного члена в (4), (5) часто выбирается изотропное выражение:  $\varepsilon_{ij} = 2\varepsilon\delta_{ij}/3$ .

Члены перераспределения давлением  $\Pi_{ij}$  и  $\Pi_{\theta i}$  описывают межкомпонентный обмен флуктуациями давления. В рассматриваемом случае для них используется общая линейная модель [32, 33]. Для диффузионных членов применяется модель градиентной диффузии. Для полного замыкания уравнений (4), (5) необходимы дополнительные прогностические уравнения или алгебраические модели для диссипации  $\varepsilon$  и дисперсии температуры  $E_\theta = \overline{\theta^2}/2$  (а также для деструкции  $\varepsilon_\theta$ , появляющейся в уравнении для дисперсии температуры). Уравнения (4), (5) достаточно трудны для практических вычислений и потому желательнее провести их упрощение до алгебраической формы. Используем для этой цели слабо-равновесное приближение [19, 21], которое заключается в пренебрежении

адвекцией и членами анизотропной части напряжений Рейнольдса:  $b_{ij} = \overline{u_i u_j} - \frac{2}{3}E$ , где

$E = \frac{1}{2}\overline{u_i u_i}$  — турбулентная кинетическая энергия. Слабо-равновесное приближение

справедливо во многих случаях, хотя оно и недостаточно в окрестности твердой стенки, то есть в области, которая обычно не разрешается в атмосферных моделях. С помощью слабо-равновесного приближения получим явные (безытерационные) алгебраические уравнения для  $\overline{u_i u_j}$  и  $\overline{u_i \theta}$  вместе с прогностическими уравнениями для  $E$ ,  $\varepsilon$  и  $E_\theta$ .

Несколько возможно, более общее приближение [19] не приводит к безытерационной формулировке модели для турбулентных потоков.

## 1.2. Турбулентная потенциальная энергия и противогradientный поток тепла

Явная алгебраическая анизотропная модель турбулентности, описание которой приводится в разделе 1.3, относится к одному из самых усовершенствованных классов моделей турбулентности, используемых в инженерной практике. С другой стороны, многие атмосферные модели до сих пор применяют стандартную схему с одним прогностическим уравнением для ТКЭ ( $E$ ):

$$\frac{DE}{Dt} = \overbrace{-uw\frac{\partial U}{\partial z} - vw\frac{\partial V}{\partial z}}^P + \overbrace{\frac{g}{T_0}w\theta}^G - \varepsilon + D_E, \quad (10)$$

где  $P$  — порождение сдвигом,  $G$  — порождение плавучести,  $\varepsilon$  — скорость диссипации,  $D_E$  — турбулентная диффузия (транспортный член). Диффузионный член обычно моделируется выражением градиентной диффузии

$$D_E = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_m}{\sigma_E} \cdot \frac{\partial E}{\partial z} \right), \quad (11)$$

где  $K_m$  — коэффициент вихревой диффузии импульса или турбулентная вязкость, определение которой будет приведено в разделе 1.3,  $\sigma_E$  — турбулентное число Шмидта для ТКЭ.

Относительно недавно моделирование атмосферной турбулентности было дополнено [11–13] прогностическим уравнением для турбулентной потенциальной энергии (ТПЭ)

$$E_p = (gE_\theta/T_0)/(\partial\Theta/\partial z). \quad (12)$$

Главная идея, лежащая в основе этих моделей, состоит в преобразовании кинетической энергии в потенциальную посредством плавучести [34], тогда как в стандартных схемах ТКЭ

член плавучести  $G$  действовал бы лишь как источник или сток энергии. Указанный подход позволяет предсказать существование турбулентности в сильно устойчивом режиме, зафиксированном в наблюдениях [35]. В стандартных моделях присутствует критическое число Ричардсона  $Ri_c = 0,25$ , но в случаях, когда  $Ri > Ri_c$  полагается, что турбулентность полностью затухает (см. раздел 1.4). Эти соображения привели к моделям турбулентности, использующим или единственное прогностическое уравнение для полной турбулентной энергии [11, 36], или замыкание с применением отдельных прогностических уравнений для ТКЭ и ТПЭ [12, 13]. Последнее также получено из балансов потоков импульса и тепла в уравнениях (4), (5), хотя и с большим количеством эмпирических соображений, чем настоящая явная алгебраическая модель напряжений Рейнольдса (см. раздел 1.3). С другой стороны, модели рейнольдсовых напряжений естественно зависят от дисперсии температуры, величины существенно эквивалентной ТПЭ в уравнении (12). Эта зависимость обусловлена членом плавучести  $G_{\theta_i}$  в уравнении (5). Дополнительное прогностическое уравнение для  $E_{\theta}$  может быть записано в виде

$$DE_{\theta}/Dt = P_{\theta} - \varepsilon_{\theta} + D_{\theta}, \quad (13)$$

где  $P_{\theta} = -\overline{u_j \theta} (\partial \Theta / \partial x_j)$  — член порождения,  $\varepsilon_{\theta}$  — скорость деструкции,  $D_{\theta}$  — диффузионный член. Следует отметить, что в инженерных моделях турбулентности не учитывалась возможность существования турбулентности в случаях, когда число Ричардсона выше критического значения ( $Ri = 0,25$ ). Действительно, упомянутые выше модели включают критическое число Ричардсона, близкое к теоретическому значению 0,25, которое является результатом линейной теории устойчивости [37, 38]. Явные алгебраические модели получены скорее из базовых принципов, таких как общие выражения для членов перераспределения давлением  $\Pi_{ij}$ ,  $\Pi_{\theta i}$  и слабо-равновесное приближение, в то время как такие модели, как замыкание [12], используют более эмпирические соотношения и ad hoc-коррекции, например, в корреляциях с давлением. Вероятно, что такие коррекции всегда необходимы, чтобы получить модель турбулентности без критического числа Ричардсона.

Еще одна особенность использования дополнительного прогностического уравнения для  $E_{\theta}$  (или ТПЭ) связана с появлением члена противогradientного потока тепла, тогда как стандартные модели вихревой диффузии имеют поток, который всегда пропорционален градиенту средней температуры. В настоящей модели турбулентный поток тепла может быть выражен как

$$\overline{w\theta} = -K_h \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \gamma_c, \quad (14)$$

где  $K_h = (E^2/\varepsilon) f_h$  — коэффициент вихревой диффузии тепла,  $\gamma_c = \gamma_c(E_{\theta})$  — член противогradientного потока тепла, пропорциональный  $E_{\theta}$ . Появление противогradientного члена может быть важным для областей с сильными температурными флуктуациями (т.е. большими значениями  $E_{\theta}$ ) и положительным градиентом температуры [39]. С другой стороны, в моделях, использующих общепринятое выражение для  $E_{\theta}$  (модель второго уровня Меллора и Ямады), член  $\gamma_c$  получается пропорционален градиенту средней температуры, и его вклад может быть учтен в коэффициенте вихревой диффузии тепла  $K_h$ . Прогностическое уравнение для  $E_{\theta}$ , такое как (13), может быть необходимо для получения корректной динамики в противогradientном члене (14).

### 1.3. Описание алгебраической модели турбулентных потоков импульса и тепла применительно к АПС

Рассмотрим модель, выведенную в работах [20, 21], и ее применение к тестовым случаям в устойчивом АПС. Устойчивый пограничный слой моделируется путем решения уравнений (1)–(3) для среднего ветра и средней температуры. Модели для компонент напряжения Рейнольдса и вектора турбулентного потока тепла в этих уравнениях, полученные в приближении слабо-равновесной турбулентности, имеют следующий вид:

$$\overline{(uw, vw)} = -K_m \left( \frac{\partial U}{\partial z}, \frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad (15)$$

$$\overline{w\theta} = -K_h \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \gamma_c. \quad (16)$$

Коэффициенты вихревой диффузии импульса ( $K_m$ ), тепла ( $K_h$ ) и противогradientный поток тепла ( $\gamma_c$ ) записываются в виде

$$K_m = (E^2/\varepsilon) f_m, \quad K_h = (E^2/\varepsilon) f_h, \quad (17)$$

$$\gamma_c = \left( \frac{g}{T_0} \right) \frac{EE_\theta}{\varepsilon} f_c. \quad (18)$$

В отличие от эмпирических выражений, используемых в стандартных моделях вихревой вязкости (с введением эмпирических функций устойчивости, включающих градиентное число Ричардсона), функции  $f_m, f_h, f_c$  теперь вытекают непосредственно из решения взаимосвязанных алгебраических уравнений для турбулентных потоков импульса и тепла с применением кода символьной алгебры. Структура этих функций приведена в Приложении. Параметры в этой части модели, содержащиеся в выражениях  $f_m, f_h, f_c$ , всецело определяются (общими) моделями корреляций перераспределения давлением  $\Pi_{ij}$  и  $\Pi_{\theta i}$  в (4), (5). Отметим, что кроме турбулентных потоков, входящих в (1)–(3), из уравнений (4), (5) можно получить анизотропные выражения для других компонент напряжений Рейнольдса  $\overline{u_i u_j}$  и турбулентного потока тепла  $\overline{u_i \theta}$ . Чтобы замкнуть эти выражения, используем прогностические уравнения для  $E, \varepsilon, E_\theta$ :

$$\frac{DE}{Dt} = \overbrace{-uw \frac{\partial U}{\partial z} - vw \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{g}{T_0} \overline{w\theta}}^{P+G} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_m}{\sigma_E} \cdot \frac{\partial E}{\partial z} \right), \quad (19)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{E} \left( uw \frac{\partial U}{\partial z} + vw \frac{\partial V}{\partial z} \right) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{E} + C_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon}{E} \cdot \frac{g}{T_0} \overline{w\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_m}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right), \quad (20)$$

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial t} = -\overline{w\theta} \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{1}{r} \cdot \frac{E_\theta}{E} \varepsilon + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K_m}{\sigma_{E_\theta}} \cdot \frac{\partial E_\theta}{\partial z} \right), \quad (21)$$

где  $C_{\varepsilon 1} = 1,44$ ,  $C_{\varepsilon 2} = 1,92$ ,  $C_{\varepsilon 3} = -0,8$ ,  $\sigma_E = \sigma_{E_\theta} = 1,0$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1,3$ ,  $r = 0,6$  [20]. Константа  $C_{\varepsilon 3}$  может варьироваться в зависимости от стратификации. Отметим, что диффузионные

члены моделируются при помощи градиентной диффузии, как в (11). Кроме того, скорость деструкции  $E_\theta$  (второй член в правой части (21)) параметризована выражением  $\varepsilon_\theta = E_\theta / (r\tau)$  с релаксационным масштабом времени  $\tau = E/\varepsilon$ , равным временному масштабу флуктуаций скорости. Значение  $r$  основано на эмпирических соображениях, изложенных в работах [40–41]. Отметим, что в параметризациях турбулентных потоков настоящей модели турбулентности (16)–(18) не используются традиционные эмпирические функции устойчивости стандартных атмосферных моделей.

#### 1.4. Коррекция явной алгебраической модели турбулентности для учета воздействия внутренних гравитационных волн (ВГВ)

В крупномасштабных атмосферных и океанических течениях сдвиг скорости вызывает неустойчивость и генерацию турбулентности при высоких числах Рейнольдса, типичных на геофизических масштабах. Относительная важность разнонаправленных эффектов сдвига и стратификации характеризуется безразмерным отношением, так называемым градиентным числом Ричардсона [42]

$$Ri = N^2 / S^2,$$

где  $N = [(g/T_0)(\partial\Theta/\partial z)]^{1/2}$  — частота внутренних гравитационных волн или частота Брента–Вайсяля,  $S$  — вертикальный сдвиг горизонтальной скорости. Градиентное число Ричардсона есть мера относительной интенсивности градиента температуры в устойчиво стратифицированных течениях. Основываясь на этом критерии, в ранних исследованиях полагалось, что турбулентность полностью затухает, если число Ричардсона превышает некоторое критическое значение  $Ri = 0,25$ . Эвристическая ценность критического числа  $Ri$ , как критерия существования турбулентности устойчиво стратифицированных течений, остается неясной, и этот вопрос активно обсуждался в работах [43–45]. Ранее в монографии [46] было высказано предположение, что критического градиентного числа Ричардсона  $Ri$  не существует. Это радикальное предположение нашло свое подтверждение в данных натуральных и лабораторных измерений последнего времени [47–49].

Данные атмосферных и лабораторных измерений [35, 50] коэффициентов вихревой диффузии импульса ( $K_m$ ) и тепла ( $K_h$ ), представленные на рис. 1а, показывают четко

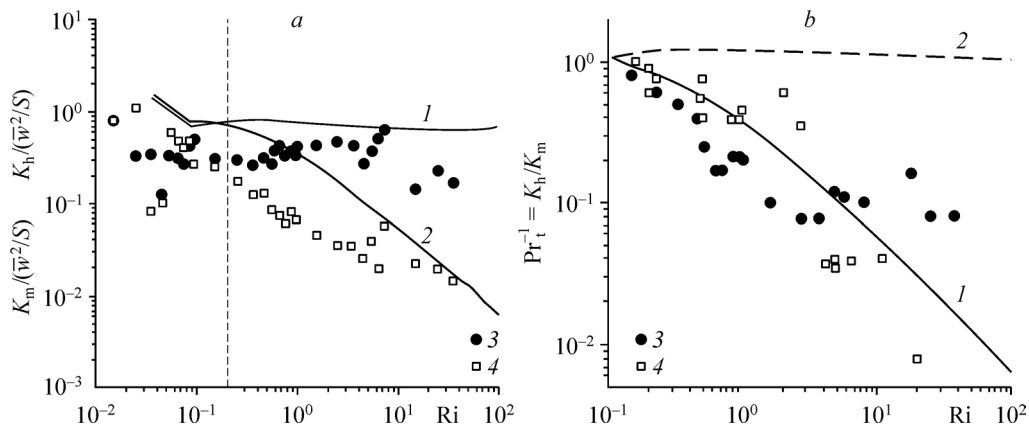


Рис. 1. Зависимости от числа Ричардсона нормированных на  $\overline{w^2}/S$  коэффициентов вихревой диффузии импульса  $K_m$  (1) и тепла  $K_h$  (2) настоящей модели (а) и обратного турбулентного числа Прандтля с учетом ВГВ (1) и без учета ВГВ (2) для настоящей модели (b).  
а — данные измерений  $K_m$  (3) и  $K_h$  (4) [35], b — данные измерений  $K_m$  (3) [50] и  $K_h$  (4) [35].



выраженный тренд убывания коэффициента  $K_h$  при сохраняющемся почти неизменном с ростом градиентного числа Ричардсона коэффициенте  $K_m$ . Такое же поведение фиксируется для обратной величины турбулентного числа Прандтля ( $Pr_t^{-1} \equiv K_h/K_m$ ) на рис. 1b, свидетельствующее о турбулентном перемешивании и при числах  $Ri > 0,25$ . В условиях сильной устойчивости АПС вертикальный вихревой турбулентный перенос существенно подавляется стратификацией, однако при этом возрастает активность внутренних гравитационных волн, которые могут транспортировать импульс, но не тепло. Результаты измерений, приведенные на рис. 1, подтверждают такое объяснение, хотя строгого доказательства на этот счет не существует. Связано это как с многообразием условий возникновения гравитационных волн орографического происхождения в реальном АПС, так и с теоретической интерпретацией волн для возможности встраивания их воздействия в модели пограничного слоя.

Учет воздействия ВГВ на динамику турбулентности в (сильно) устойчивом АПС может основываться на данных натурных и лабораторных измерений, изображенных символами на рис. 1. Принимая во внимание зависимость вертикального турбулентного переноса тепла от частоты Брента–Вяйсяля  $N$ , установленную в [51], можно ввести в рассмотрение модифицированное выражение для временного масштаба турбулентного поля температуры  $\tau_{p\theta}$ , зависящее от частоты  $N$ . Релаксационная часть корреляции с пульсациями давления  $\Pi_{\theta i} = \overline{\theta(\partial p/\partial x_i)}$  в (5) может быть аппроксимирована линейной зависимостью [34, 52, 53]

$$\Pi_{\theta i}^{(1)} \sim h_i/\tau_{p\theta} \simeq -\frac{c_{1\theta}}{\tau_{p\theta}} h_i, \quad (22)$$

где  $h_i = \overline{\theta u_i}$  — турбулентный поток тепла,  $c_{1\theta}$  — численный коэффициент. Выражение (22) было впервые предложено в работе [54] для течений без средних градиентов полей скорости и скаляра и в предположении, что

$$\tau_{p\theta} \sim \tau = E/\varepsilon.$$

С учетом средних градиентов две оставшиеся части корреляции  $\Pi_{\theta i} = \Pi_{\theta i}^{(1)} + \Pi_{\theta i}^{(2)} + \Pi_{\theta i}^{(3)}$  имеют вид [22, 52]:

$$\Pi_{\theta i}^{(2)} = -c_{2\theta} h_j (\partial U_i / \partial x_j), \quad \Pi_{\theta i}^{(3)} = c_{3\theta} \beta_i \overline{\theta^2}. \quad (23)$$

Откалиброванные (см., например, [40]) численные значения коэффициентов в (22) и (23) приведены в Приложении. Хотя предположение (23) широко использовалось ранее в различных схемах второго уровня замыкания турбулентности, его применимость к устойчиво стратифицированным течениям не является очевидной. Прямой путь доказательства справедливости представлений (22) и (23) состоял бы в сравнении с LES-данными моделирования корреляций с пульсациями давления в атмосферных течениях. Однако такие данные, по-видимому, отсутствуют.

Как отмечалось выше, можно принять, что в устойчиво стратифицированной турбулентности масштаб времени  $\tau_{p\theta}$  должен быть функцией частоты Брента–Вяйсяля  $N$

$$\tau_{p\theta} = \tau_{p\theta}(N) \quad (24)$$

с конкретной функциональной зависимостью вида

$$\tau_{p\theta} = \tau / (1 + a \cdot \tau^2 N^2), \quad (25)$$

где  $a = 0,16$  если  $N^2 > 0$  и  $a = 0$  если  $N^2 \leq 0$ . Физический аргумент в пользу демпфирующего фактора в знаменателе (25) может основываться на том, что в устойчиво стратифицированных течениях турбулентные вихри совершают работу против сил плавучести и теряют кинетическую энергию, которая переходит в потенциальную энергию.

Такая процедура включения в модель воздействия ВГВ на турбулентный перенос, хотя и имеет квазиэмпирическое происхождение, находит свое подтверждение на рис. 1. В частности, штриховая линия на рис. 1b показывает, что без коррекции (25) обратное значение турбулентного числа Прандтля остается практически постоянным с ростом градиентного числа Ричардсона. Отметим, что включение в описание динамики устойчивого пограничного слоя дополнительного к напряжениям Рейнольдса сопротивления, создаваемого гравитационными волнами и возникающими на орографии ландшафта, также имеет квазиэмпирическое происхождение (см., например, [55]), и оно, конечно, существенно зависит от конкретной структуры ландшафта.

## 2. Численная реализация явной алгебраической модели турбулентности в устойчивом АПС для случая с постоянным форсингом поверхности

Рассмотрим формирование устойчивого АПС согласно сценарию GABLS1 [1], когда чисто устойчивый АПС инициируется наложением геострофического ветра постоянной скорости при охлаждении поверхности также с постоянной скоростью. Основным интерес при этом представляет исследование того, насколько хорошо модель работает в предсказании устойчиво стратифицированной турбулентности в атмосфере путем сравнения с доступными LES-данными, полученными для случая GABLS1 (см., например, [29, 30]). Постоянная скорость геострофического ветра в этом случае равна  $U_g = 8 \text{ мс}^{-1}$ , вектор ветра направлен вдоль оси  $X$ . Параметр Кориолиса  $f = 1,39 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$  (соответствует условиям Арктики для  $73^\circ$  северной широты). Потенциальная температура на поверхности  $\Theta_s = \Theta(z = z_0)$  изменяется со временем как  $\Theta_s(t) = \Theta_0 - at$  при  $\Theta_0 = 265,1 \text{ К}$  и  $a = 6,94 \cdot 10^{-5} \text{ К/с}$ . Начальная потенциальная температура ( $\Theta$ ) равна  $265 \text{ К}$  вплоть до высоты  $100 \text{ м}$ , затем возрастает со скоростью  $0,01 \text{ К/м}$  вплоть до верхней границы на высоте  $400 \text{ м}$ , где ее значение достигает величины  $268 \text{ К}$ . Влажность не учитывается. Для модели требуется задать начальный профиль ТКЭ ( $E$ ). Начальный профиль диссипации  $\varepsilon$  выбирается так, что масштаб времени турбулентности  $\tau = E/\varepsilon$  первоначально равен  $100 \text{ с}$ , в то время как начальный профиль  $E_\theta$  положен равным нулю. Аэродинамическая шероховатость поверхности  $z_0$  принята равной  $0,1 \text{ м}$ . Вычисления проведены с разрешением  $2 \text{ м}$  по вертикали, как и в оригинальном случае GABLS1 [29]. Численное моделирование с шагом интегрирования по времени, равным  $60 \text{ с}$ , проводится в течение  $9$  часов (время работы модели), после чего достигается квазиустановившееся состояние. Для сравнения можно использовать LES-данные с разрешением  $2 \text{ м}$  [29] и данные модели [10] с одним уравнением для ТКЭ (с разрешением по вертикали  $6,3 \text{ м}$ ).

Система дифференциальных уравнений (1)–(3), (15)–(21) решается в области  $[z_0, H]$ , где  $z_0$  — аэродинамическая шероховатость поверхности и  $H$  — высота области. Рассматривая нижнюю границу при  $z = z_0$ , можно легко определить следующие граничные условия для уравнений среднего течения (1)–(3):  $U(z = z_0) = V(z = z_0) = 0$ ,  $\Theta(z = z_0) = \Theta_s(t)$ , где  $\Theta_s$  — функция времени. Для  $E - \varepsilon - E_\theta$  модели (15)–(21) принимаем, используя для простоты стандартную модель вихревой вязкости, условия логарифмического слоя, которые могут быть получены из баланса членов порождения и диссипации в логарифмическом слое. Эти граничные условия записываются в следующем виде:

$$E(z = z_0) = u_*^2 / \sqrt{c_\mu}, \quad (26)$$

$$\varepsilon(z = z_0) = u_*^3 / k z_0, \quad (27)$$

$$E_\theta(z = z_0) = \frac{r \text{Pr}_t}{\sqrt{c_\mu}} \theta_*^2, \quad (28)$$

здесь  $c_\mu = 0,09$ ,  $\text{Pr}_t = 0,9$ ,  $k = 0,4$ . Скорость трения  $u_*$  и температура трения  $\theta_*$  определяются из логарифмического закона вблизи поверхности:

$$\sqrt{U(z)^2 + V(z)^2} = (u_*/k) \ln(z/z_0), \quad (29)$$

$$\Theta(z) - \Theta_s(t) = (\text{Pr}_t \theta_*/k) \cdot \ln(z/z_0). \quad (30)$$

Отметим, что приведенные граничные условия до некоторой степени проще, чем часто используемые эмпирические соотношения на основе теории подобия Монина–Обухова, в которых также принимается во внимание порождение плавучести [5]. Настоящее приближение оправдано, если величина шага вычислительной сетки, используемого для согласования с логарифмическими функциями вблизи поверхности, достаточно мала для пренебрежения эффектами плавучести. Это означает, что первые узлы сетки около поверхности должны находиться внутри логарифмического слоя, чтобы получить правильный наклон в профиле скорости вблизи поверхности (см. рис. 2) и, как следствие, адекватные значения для  $u_*$  и  $\theta_*$ , вычисленные по формулам (29), (30). На верхней границе области задаются скорость, равная скорости геострофического ветра ( $U = U_g$  и  $V = V_g$ ), и фиксированное значение градиента потенциальной температуры, соответствующее начальному профилю. Для величин, используемых в (15)–(21), примем на верхней границе  $\partial/\partial z = 0$  для искомых функций. Так как оригинальный случай GABLS1 определяет истинную поверхностную температуру, значение  $\Theta_0$  было несколько увеличено по сравнению

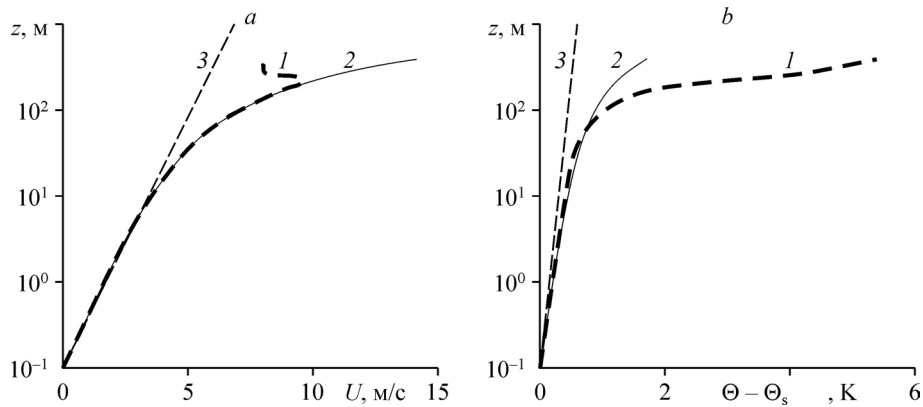


Рис. 2. Профили средней скорости ветра (а) и средней потенциальной температуры (б) в случае GABLS1.

1 — настоящие вычисления, 2 — вычисления по теории подобия Монина–Обухова при  $u_* = 0,29$  м/с,  $\theta_* = \overline{w\theta'_s} / u_*$ ,  $\overline{w\theta'_s} = 0,012$  К·м/с [5],  $L = 149$  м,  $z_0 = 0,1$  м,  $k = 0,4$  [1] и  $\text{Pr}_t = 0,9$ ,  
3 — логарифмическая часть функций  $U$  и  $\Theta - \Theta_s$ .

с приведенным в исследовании [3] (265 К) с тем, чтобы получить разницу в потенциальной температуре между поверхностью и  $z = z_0$ . Различие в 0,124 К следует из (экстраполированного) среднего значения LES-данных при  $z = z_0$ . Вычислительный код использует центральные разности второго порядка для пространственной дискретизации на смещенной сетке и неявную схему Эйлера по времени первого порядка. Разрешение сетки около поверхности выбрано достаточно мелким, чтобы получить численное решение, независимое от сетки, т.е. дающее профили скорости и температуры, согласующиеся с граничными условиями логарифмического слоя, приведенными выше (см. также рис. 2). При этом предпочтительнее сфокусироваться на физической корректности модели, чем на различиях, обусловленных вычислениями.

Для демонстрации справедливости граничных условий, использованных в модели, на рис. 2 изображены средняя скорость ветра и средняя потенциальная температура в логарифмическом масштабе. Очевидно, что как настоящая и ТКЭ модели, так и LES-модель следуют тому же самому логарифмическому закону около поверхности (вплоть до  $\approx 5$  м). Это также показывает, что граничные условия логарифмического слоя в (26)–(28) и (29), (30) совместны и работают в рассматриваемом случае, пока шаг сетки вблизи стенки меньше, чем 5 м. Выше в пограничном слое из-за эффектов плавучести необходима коррекция в логарифмическом профиле, основанная на теории подобия Монина–Обухова [7]. Эта коррекция является линейной функцией безразмерного параметра  $z/L$ , где  $L = -u_*^3 T_0 / (kg \overline{w \theta_s}) = u_*^2 T_0 / (kg \theta_*)$  — масштаб Обухова [56], зависящий только от поверхностных потоков. Профиль ветра хорошо согласуется с теоретической кривой не только для скорости ветра, но и для температуры.

На рис. 3 показаны результаты вычислений для профилей средней скорости ветра и средней потенциальной температуры. Для обоих профилей результаты настоящей модели близки LES-данным [29], в то время как другие подходы дают более мелкий турбулентный слой (см. [22]). Это отражает способность модели к хорошим предсказаниям характеристик устойчиво стратифицированного течения. Видно, что модель [10] демонстрирует профили, схожие с результатами настоящей модели, и хотя эти модели основаны на различных принципах, они дают хорошее описание турбулентности в настоящем тесте. Следует, однако, отметить, что стандартная ТКЭ-схема модели [10] завышает высоту пограничного слоя.

На рис. 4 показаны результаты для турбулентных потоков импульса и тепла и профиль ТКЭ. Из рисунка можно заключить, что настоящая модель приводит к результатам, более близким к данным LES [29], чем стандартная ТКЭ-схема [10].

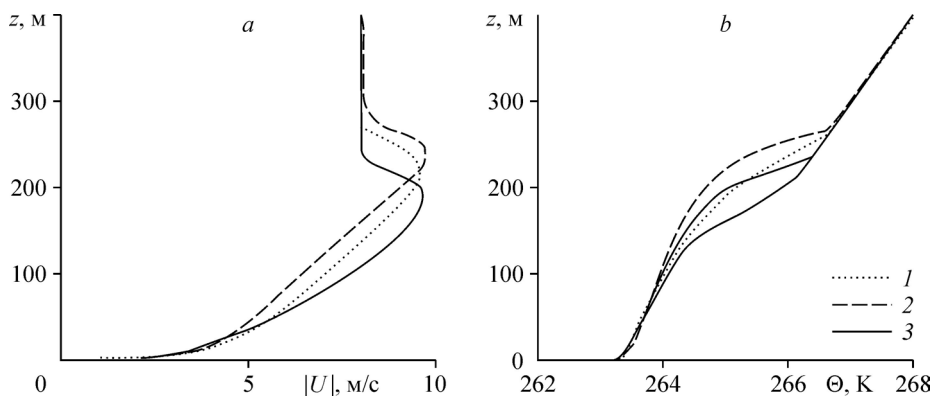


Рис. 3. Профили скорости ветра (а) и потенциальной температуры (б) для случая GABLS1.

1 — настоящие вычисления, 2 — данные модели Meteo-France ARPEGE [10], 3 — LES-данные [29].

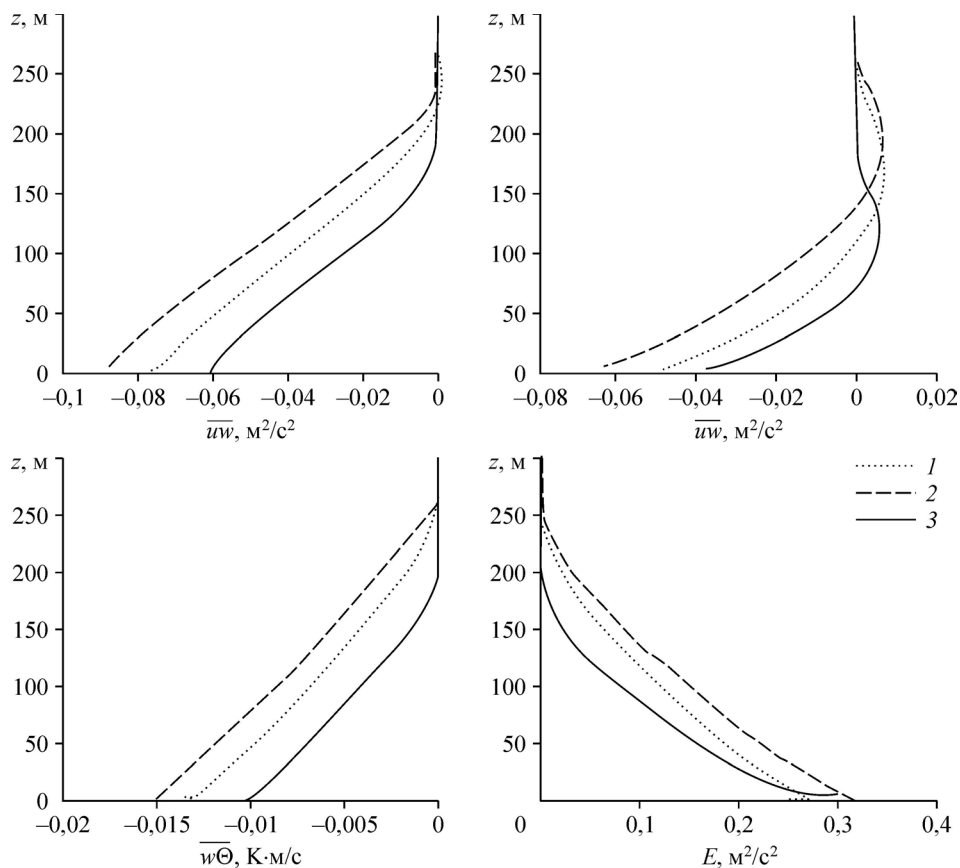


Рис. 4. Профили турбулентных потоков импульса  $\overline{u'w'}$ ,  $\overline{v'w'}$ , тепла  $\overline{w'\theta}$  и ТКЭ для случая GABLS1. Обозначения см. на рис. 3; данные LES включают сумму вкладов разрешаемых и подсеточных пульсационных характеристик.

В контексте рассматриваемого устойчиво стратифицированного случая представляется удобным проанализировать проблему критического числа Ричардсона, обсуждаемую в данном разделе. В частности, для модели [22], близкой к представленной здесь модели, результаты для дисперсий скорости, в зависимости от градиентного числа Ричардсона, показывают [22], что все флуктуации скорости затухают при определенном числе Ричардсона, имеющем значение, равное 0,2, которое немного ниже, чем критическое значение 0,25. Однако результаты LES [57, 58] фиксируют существование турбулентности выше указанного значения числа  $Ri$ . Таким образом, модель [22] не предусматривает возможности предсказания поддерживающейся турбулентности для числа  $Ri > 0,25$ , хотя быть может она допускает существование турбулентности, которая затухает очень медленно, если масштабы длины турбулентности большие. NCARLES-данные [59], показанные на рис. 5a, затухают при числе Ричардсона примерно как для настоящей модели, но остаточная турбулентность остается и при несколько большем значении числа  $Ri$ , чем его критическое значение 0,25. Результаты настоящей модели на рис. 5a отчетливо указывают на существование турбулентности при числе  $Ri$ , превосходящем его критическое значение. Вертикальная дисперсия скорости обращается в нуль при  $Ri \approx 1,8$ .

Отметим, что есть явные различия между данными настоящей модели и LES-данными для низкого значения  $Ri$ . Однако эти рассчитанные очень близко к поверхности точки, где ни модель, ни LES-метод не разрешают мелкие масштабы в вязком подслое.

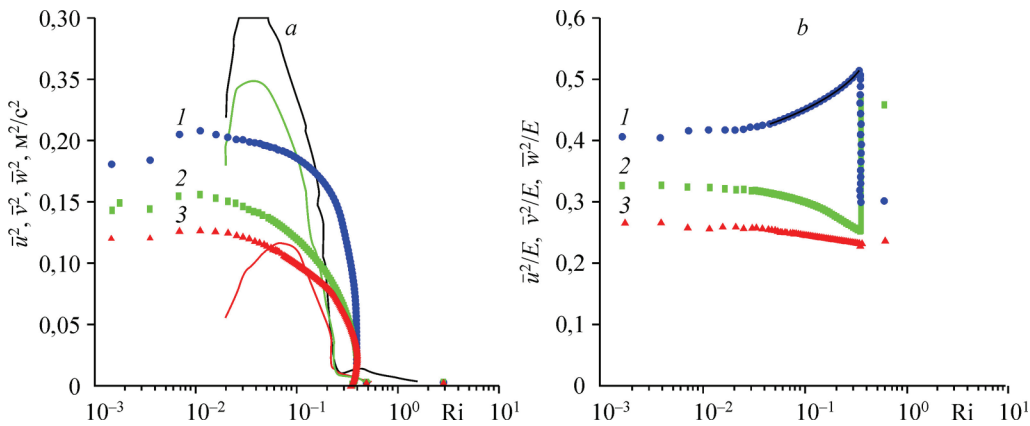


Рис. 5. Профили компонент ТКЭ в зависимости от градиентного числа  $Ri$  для случая GABLS1.

*a*: настоящие расчеты —  $\overline{u^2}$  (1),  $\overline{v^2}$  (2),  $\overline{w^2}$  (3), сплошные линии — расчет по LES-модели [59];

*b*: компоненты  $\overline{u^2}$ ,  $\overline{v^2}$ ,  $\overline{w^2}$ , обезразмеренные на значения ТКЭ и представляющие вклад каждой компоненты в полную величину ТКЭ.

Таким образом, остается неясным, как объяснить завышение пиков среднеквадратичных флуктуаций скорости для различных подсеточных моделей вблизи стенки (см. [60]). На рис. 5*b* приведены те же самые дисперсии, что и на рис. 5*a*, масштабированные на ТКЭ, показывающие вклад каждой компоненты в полную величину ТКЭ. Можно прийти к заключению, что вертикальный вклад несколько уменьшается с ростом  $Ri$ . Горизонтальные вклады, по-видимому, осциллируют при числах Ричардсона чуть выше критического значения, скорее всего из-за небольшого поворота ветра в верхней части АПС, вызывая разные уровни сдвигового порождения в  $x$ - и  $y$ -направлениях. На рисунке не показаны данные расчетов выше  $z \approx 225$  м, где  $Ri$  становится очень большим, и где  $\overline{u^2} = \overline{v^2}$  и  $\overline{w^2}/2 < 0,1E$  со значением ТКЭ, очень близким к нулю. Также отметим, что рис. 5 показывает способность модели предсказать анизотропную турбулентность с явно различными компонентами ТКЭ.

### Заключение

В отношении атмосферного пограничного слоя применена недавно разработанная явная алгебраическая модель напряжений Рейнольдса, выведенная из фундаментальных принципов (см. раздел 1). Существенной особенностью модели в отличие от стандартных моделей вихревой вязкости является ее способность охватить анизотропное распределение компонент ТКЭ. Это крайне важно для стратифицированных течений в целом и АПС в частности, т.к. в них может проявляться высокая степень анизотропии. Кроме описания эволюции для  $E, \varepsilon, E_\theta$ , определенных уравнениями (15)–(21), структура модели содержит несколько базовых параметров. Эти параметры являются результатом линейных аппроксимаций членов корреляций перераспределения давлением, которые откалиброваны для стратифицированных течений в более ранних работах. Граничные условия основаны на общих соотношениях для логарифмического слоя. В настоящей работе проведено полное сравнение модели с данными LES-моделирования для случая GABLS1 [29]. Результаты, представленные на рис. 3, 4 показали хорошее согласование с доступными данными LES, значительно лучше, чем со стандартной схемой ТКЭ. Модель предсказала существование турбулентности при значении числа Ричардсона выше

критического, что согласуется с данными измерений. Представленное в работе [13] приближение моделирования стратифицированных течений имеет больше эмпирических предположений, в то время как предложенная в настоящей работе модель опирается в основном на базовые принципы. Полное сравнение этих двух моделей в различных тестовых случаях с целью выявления сходства и различия между ними, могло бы быть интересным предметом будущей работы.

### Приложение

Функции устойчивости  $f_m, f_h, f_c$  в выражениях для коэффициентов вихревой диффузии импульса и тепла в (17), (18) имеют вид:

$$f_m = \frac{1}{D} \left\{ \frac{2}{3} \alpha_1 \left( 1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \lambda_1 \lambda_2 G_h \right) + 2 \alpha_2 \lambda_2 \left( \lambda_2 + \frac{4}{3} \alpha_1 \right) \left( \tau \frac{g}{T_0} \right)^2 \frac{E_\theta}{E} \right\}, \quad (\text{П.1})$$

$$f_h = \frac{1}{D} \cdot \frac{2}{3} \lambda_1 \{ 1 + \lambda_1 \alpha_2 G_h \}, \quad (\text{П.2})$$

$$f_c = \frac{2 \lambda_2}{D} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \alpha_1^2 G_m + \lambda_1 \alpha_2 G_h \right\}. \quad (\text{П.3})$$

В (П.1)–(П.3):  $G_m = (\tau S)^2$ ,  $G_h = (\tau N)^2 = \left( \frac{E}{\varepsilon} \right)^2 \frac{g}{T_0} \cdot \frac{d\Theta}{dz}$ ,  $S^2 = \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2$ ,  $\tau = \frac{E}{\varepsilon}$ ;

$$D = 1 + d_1 G_m + d_2 G_h + d_3 G_h^2 - d_4 G_m G_h,$$

$$d_1 = \frac{2}{3} \alpha_1^2, d_2 = \frac{7}{3} \lambda_1 \alpha_2, d_3 = \frac{4}{3} (\lambda_1 \alpha_2)^2, d_4 = \frac{2}{3} \lambda_1 \lambda_2 \alpha_1 \alpha_2,$$

$$\alpha_1 = \frac{1 - c_2}{c_1}, \alpha_2 = \frac{1 - c_3}{c_1}, \lambda_1 = 1/c_{1\theta}, \lambda_2 = (1 - c_{2\theta})/c_{1\theta}.$$

Найденная в работе [55] для инженерных приложений и в атмосферном пограничном слое связь между базовыми константами модели корреляции «давление-сдвиг» определена соотношением  $(1 - c_2)/c_1 \cong 0,23$ . Остальные базовые коэффициенты настоящей модели, откалиброванные при решении различных задач инженерной практики и стратифицированных течений [44, 45], имеют следующие численные значения:  $c_1 = 2,2$ ,  $c_2 = 0,5$ ,  $c_3 = 0,5$ ,  $c_{1\theta} = 3,28$ ,  $c_{2\theta} = c_{3\theta} = 0,5$ .

Дисперсия вертикальной турбулентной скорости имеет вид:

$$\overline{w^2} = \frac{1}{D} \left\{ \frac{2}{3} E (1 + \lambda_1 \alpha_2 G_h) + \frac{8}{3} \left( 1 + \lambda_1 \alpha_2 G_h - \frac{1}{2} \lambda_2 \alpha_1 G_m \right) \lambda_2 \alpha_2 \tau \left( \frac{g}{T_0} \right)^2 \frac{E_\theta E}{\varepsilon} \right\}. \quad (\text{П.4})$$

Дисперсии горизонтальных турбулентных флуктуаций скорости записываются как

$$\overline{u^2} = \frac{1}{(1 + \lambda_0) D} \left\{ \frac{2}{3} E \left[ 1 + 2 \lambda_0 \left[ 1 + \frac{3}{2} \lambda_0 + \lambda_0^2 + \alpha_1 \left( \tau \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 (\alpha_1 - \lambda_1 (1 + \lambda_0)) \right] \right] + \right. \\ \left. + 2 \alpha_1^2 \left( \tau \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right\}, \quad (\text{П.5})$$

$$\overline{v^2} = \frac{1}{(1+\lambda_0)D} \left\{ \frac{2}{3} E \left[ 1+2\lambda_0 \left[ 1+\frac{3}{2}\lambda_0 + \lambda_0^2 + \alpha_1 \left( \tau \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 (\alpha_1 - \lambda_1 (1+\lambda_0)) \right] \right] + \right. \\ \left. + 2\alpha_1^2 \left( \tau \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right\}. \quad (\text{П.6})$$

В (П.5), (П.6) параметр  $\lambda_0 = \lambda_1 \alpha_2 G_h$  — безразмерный градиент температуры.

Турбулентные потоки тепла записываются в виде

$$\overline{u\theta} = \frac{1}{(1+\lambda_0)D} \left\{ \frac{2}{3} E \lambda_1 \tau^2 (\alpha_1 + \lambda_2) (1 + \lambda_1 \alpha_2 G_h) \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \right. \\ \left. + \frac{8}{3} \lambda_1 \lambda_2 \alpha_1 \alpha_2 \tau \left( \frac{g}{T_0} \right) \frac{EE_\theta}{\varepsilon} G_h \left( 1 + \lambda_1 \alpha_2 G_h - \frac{1}{2} \lambda_2 \alpha_1 G_m \right) \frac{\partial U}{\partial z} - \right. \\ \left. - 2\lambda_2^2 \tau \left( \frac{g}{T_0} \right) \frac{EE_\theta}{\varepsilon} \left( 1 + \lambda_1 \alpha_2 G_h + \frac{2}{3} \alpha_1^2 G_m \right) \frac{\partial U}{\partial z} \right\}, \quad (\text{П.7})$$

$$\overline{v\theta} = \frac{1}{(1+\lambda_0)D} \left\{ \frac{2}{3} E \lambda_1 \tau^2 (\alpha_1 + \lambda_2) (1 + \lambda_1 \alpha_2 G_h) \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \right. \\ \left. + \frac{8}{3} \lambda_1 \lambda_2 \alpha_1 \alpha_2 \tau \left( \frac{g}{T_0} \right) \frac{EE_\theta}{\varepsilon} G_h \left( 1 + \lambda_1 \alpha_2 G_h - \frac{1}{2} \lambda_2 \alpha_1 G_m \right) \frac{\partial V}{\partial z} - \right. \\ \left. - 2\lambda_2^2 \tau \left( \frac{g}{T_0} \right) \frac{EE_\theta}{\varepsilon} \left( 1 + \lambda_1 \alpha_2 G_h + \frac{2}{3} \alpha_1^2 G_m \right) \frac{\partial V}{\partial z} \right\}. \quad (\text{П.8})$$

### Список литературы

1. Cuxart I.J., Holtslag A.A.M., Beare R.J., Bazile E., Beljaars A., Cheng A., Conangla L., Ek M., Freedman F., Hamdi R., Kerstein A., Kitagawa H., Lenderink G., Lewellen D., Mailhot J., Mauritsen T., Perov V., Schayes G., Steeneveld G.-J., Svensson G., Taylor P., Weng W., Wunsch S., Xu K.-M. A single-column model intercomparison for a stably stratified atmospheric boundary layer // *Boundary-Layer Meteorology*. 2006. Vol. 118, No. 2. P. 273–303.
2. Holtslag A.A.M. Special issue for boundary-layer meteorology: GEWEX atmospheric boundary-layer study (GABL5) on stable boundary layers // *Boundary-Layer Meteorology*. 2006. Vol. 118. P. 243–246.
3. Huang J., Bou-Zeid E. Turbulence and vertical fluxes in the stable atmospheric boundary layer. Part II: A novel mixing-length model // *J. Atmospheric Sci.* 2013. Vol. 70. P. 1528–1542.
4. Holtslag A.A.M., Svensson G., Baas P., Basu S., Beare B., Beljaars A.C.M., Bosveld F.C., Cuxart J., Lindvall J., Steeneveld G.J., Tjernström M., Van de Wiel B.J.H. Stable atmospheric boundary layers and diurnal cycles: challenges for weather and climate models // *Bulletin American Meteorological Soc.* 2013. Vol. 94, No. 11. P. 1691–1706.
5. Мони́н А.С., Обухов А.М. Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы // *Тр. Геофиз. Ин-та АН СССР*. 1954. № 24 (151). С. 163–187.
6. Blackadar A.K. The vertical distribution of wind and turbulent exchange in neutral atmosphere // *J. Geophysical Research*. 1962. Vol. 67. P. 3095–3102.
7. Mellor G.L., Yamada T. A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers // *J. Atmospheric Sci.* 1974. Vol. 31. P. 1791–1806.
8. Mellor G.L., Yamada T. Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems // *Reviews Geophysics Space Physics*. 1982. Vol. 20. P. 851–875.
9. Andre J.C., De Moor G., Lacarrere P., Therry G., du Vachat R. Modeling the 24-hour evolution of the mean and turbulent structures of the planetary boundary layer // *J. Atmospheric Sci.* 1978. Vol. 35. P. 1861–1883.
10. Bazile E., Marquet P., Bouteloup Y., Bouysse F. The turbulent kinetic energy (TKE) scheme in the NWP models at Météo-France // *Workshop on diurnal cycles and the stable boundary layer*, ECMWF. 2011. P. 127–136.
11. Mauritsen T., Svensson G., Zilitinkevich S.S., Esau I., Enger L., Grisogono B. A total turbulent energy closure model for neutrally and stably stratified atmospheric boundary layers // *J. Atmospheric Sci.* 2007. Vol. 64. P. 4113–4126.



12. Zilitinkevich S.S., Elperin T., Kleciorin N., Rogachevskii I. Energy- and flux-budget (EFB) turbulence closure model for stably stratified flows. Part I: Steady-state, homogeneous regimes // *Boundary-Layer Meteorology*. 2007. Vol. 125. P. 167–191.
13. Zilitinkevich S.S., Elperin T., Kleciorin N., Rogachevskii I., Esau I. A hierarchy of energy- and flux-budget (EFB) turbulence closure models for stably stratified geophysical flows // *Boundary-Layer Meteorology*. 2013. Vol. 146. P. 341–373.
14. Jones W.P., Launder B.E. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1972. Vol. 15. P. 301–314.
15. Wilcox D.C. Turbulence modeling for CFD. DCW Industries, Inc. La Canada, California, 1993.
16. Duynkerke P.G. Application of the  $E-\varepsilon$  turbulence closure model to the neutral and stable atmospheric boundary layer // *J. Atmospheric Sci.* 1988. Vol. 45. P. 865–880.
17. Rodi W. The prediction of free turbulent boundary layers by use of a two-equation model of turbulence // PhD thesis, University of London, 1972.
18. Rodi W. A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses // *Z. Angew. Math. Mech.* 1976. Vol. 56. P. T219–T221.
19. Cheng Y., Canuto V.M., Howard A.M. An improved model for the turbulent PBL // *J. Atmospheric Sci.* 2002. Vol. 59. P. 1550–1565.
20. Курбацкий А.Ф., Курбацкая Л.И. Трехпараметрическая модель турбулентности для атмосферного пограничного слоя над урбанизированной поверхностью // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2006. Т. 42, № 4. С. 476–494.
21. Курбацкий А.Ф., Курбацкая Л.И. О турбулентном числе Прандтля в устойчиво стратифицированном атмосферном пограничном слое // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2010. Т. 46, № 2. С. 187–196.
22. Lazeroms W.M.J., Svensson G., Bazile E., Brethouwer G., Wallin S., Johansson A.V. Study of transitions in the atmospheric boundary layer using explicit algebraic turbulence models // *Boundary-Layer Meteorology*. 2016. Vol. 161. P. 19–47.
23. So R.M.C., Vimala P., Jin L.H., Zhao C.Y., Gatski T.B. Accounting for buoyancy effects in the explicit algebraic stress model: homogeneous turbulent shear flows // *Theor. Comput. Fluid Dynamics*. 2002. Vol. 15. P. 283–302.
24. So R.M.C., Jin L.H., Gatski T.B. An explicit algebraic Reynolds stress and heat flux model for incompressible turbulence. Part II. Buoyant flow // *Theor. Comput. Fluid Dyn.* 2004. Vol. 17. P. 377–406.
25. Vanpouille D., Aupoix B., Laroche E. Development of an explicit algebraic turbulence model for buoyant flows. Part 1. DNS analysis // *Int. J. Heat Fluid Flow*. 2013. Vol. 43. P. 170–183.
26. Vanpouille D., Aupoix B., Laroche E. Development of an explicit algebraic turbulence model for buoyant flows. Part 2. Model development and validation // *Int. J. Heat Fluid Flow*. 2015. Vol. 53. P. 195–209.
27. Wyngaard J.C. Toward numerical modeling in the «terra incognita» // *J. Atmospheric Sci.* 2004. Vol. 61. P. 1816–1826.
28. Enriquez R.M., Street R.L. Large-eddy simulation of the stable boundary layer: revisiting GABLS with a linear algebraic subgrid-scale turbulence model // 21st Symposium on Boundary Layers and Turbulence, American Meteorological Society. 2014. Paper 14B.3.
29. Beare R.J., MacVean M.K., Holtslag A.A.M., Cuxart J., Esau I., Golaz J.C., Jimenez M.A., Khairoutdinov M., Kosovic B., Lewellen D., Lund T.S., Lundquist J.K., McCabe A., Moene A.F., Noh Y., Raasch S., Sullivan P. An intercomparison of large-eddy simulations of the stable boundary layer // *Boundary-Layer Meteorology*. 2006. Vol. 118. P. 247–272.
30. Huang J., Bou-Zeid E. Turbulence and vertical fluxes in the stable atmospheric boundary layer. Part I: A large-eddy simulation study // *J. Atmospheric Sci.* 2013. Vol. 70. P. 1513–1528.
31. Tennekes H., Lumley J.L. A first course in turbulence. England, Cambridge, Massachusetts, London: The MIT Press, 1972. 310 p.
32. Launder B.E. On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum // *J. Fluid Mech.* 1975. Vol. 67. P. 569–581.
33. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure // *J. Fluid Mech.* 1975. Vol. 68. P. 537–566.
34. Курбацкий А.Ф., Курбацкая Л.И. О вихревом перемешивании и энергетике турбулентности в устойчивом атмосферном пограничном слое. // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2012. Т. 48, № 6. С. 666–673.
35. Monti P., Fernando H.J.A., Princevac M., Chan W.C., Kowalewski T.A., Pardyjak E.R. Observations of flow and turbulence in the nocturnal boundary layer over a slope // *J. Atmospheric Sci.* 2002. Vol. 59. P. 2513–2534.
36. Pithan F., Angevine W., Mauritsen T. Improving a global model from the boundary layer: total turbulent energy and the neutral limit Prandtl number // *J. Advances Model Earth Systems*. 2015. Vol. 7. P. 791–805.
37. Miles J.W. On the stability of heterogeneous shear flows // *J. Fluid Mech.* 1961. Vol. 10. P. 496–508.
38. Howard L.N. Note on a paper by John W. Miles // *J. Fluid Mech.* 1961. Vol. 13. P. 158–160.
39. Курбацкий А.Ф. Противогradientный перенос тепла в атмосферном пограничном слое над шероховатой поверхностью // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2008. Т. 44, № 2. С. 171–177.
40. Sommer T.P., So R.M.C. On the modeling of homogeneous turbulence in a stably stratified flow // *Physics Fluids*. 1995. Vol. 7. P. 2766–2777.
41. Beguier C., Dekeyser I., Launder B.E. Ratio of scalar and velocity dissipation time scales in shear turbulence // *Physical Fluids*. 1978. Vol. 21. P. 307–310.

42. **Richardson L.F.** The supply of energy from and to atmospheric eddies // Proc. Royal Society A 97. London. 1920. Vol. XCVII, No. 686. P. 354–373.
43. **Galperin B., Sukhoriansky S., Anderson F.S.** On the critical Richardson number in stably stratified turbulence // Atmospheric Sci. Letters. 2007. Vol. 8. P. 65–69.
44. **Zilitinkevich S.S., Elperin T., Kleorin N., Rogachevskii I., Esau I., Mauritsen T., Miles M.W.** Turbulence energetics in stably stratified geophysical flows: strong and weak mixing regimes // Quarterly J. Royal Meteorological Society. 2008. Vol. 134. P. 793–799.
45. **Canuto V.M., Howard A., Cheng Y., Esau I.N.** Stably stratified flows: a model with no  $Ri(cr)^*$  // J. Atmospheric Sci. 2008. Vol. 65. P. 2437–2447.
46. **Монин А.С., Яглом А.М.** Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 640 с.
47. **Yamamoto G.** Generalization of the KEYPS formula in diabatic conditions and related discussion on the critical Richardson number // J. Meteorological Society Japan. 1975. Vol. 53. P. 189–195.
48. **Lettau H.** Wind and temperature profile prediction for diabatic surface layers including strong inversion cases // Boundary Layer Meteorology. 1979. Vol. 17. P. 443–464.
49. **Ohya Y.** Wind-tunnel study of atmospheric stable boundary layers over a rough surface // Boundary Layer Meteorology. 2001. Vol. 98. P. 57–82.
50. **Strang E.J., Fernando H.J.S.** Vertical mixing and transport through a stratified shear layer // J. Physical Oceanography. 2001. Vol. 31. P. 2006–2048.
51. **Weinstock J.** A theory of turbulence transport // J. Fluid Mech. 1989. Vol. 202. P. 319–338.
52. **Launder B.E.** An introduction to single-point closure methodology // Simulation and Modeling of Turbulent Flows / Eds: T.B. Gatski, M. Hussaini, J. Lumley. N.Y.: Oxford University Press, 1996. P. 243–310.
53. **Lumley J.L.** Computational modeling of turbulent flows // Advances Applied Mechanics. 1978. Vol. 18. P. 123–176.
54. **Монин А.С.** О свойствах симметрии турбулентности в приземном слое воздуха // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1965. Т. 1. С. 45–54.
55. **Steenefeld G.J., Holtslag F.F.M., Nappo C.J., van de Wiel B.J.H., Mahrt L.** Exploring the possible role of small-scale terrain drag on stable boundary layers // J. Applied Meteorology Climatology. 2008. Vol. 47. P. 2518–2530.
56. **Обухов А.М.** Турбулентность в термически неоднородной атмосфере // Тр. Геофизического ин-та АН СССР. 1946. Т. 1. С. 95–115.
57. **Mauritsen T., Svensson G.** Observations of stably stratified shear-driven atmospheric turbulence at low and high Richardson numbers // J. Atmospheric Sci. 2007. Vol. 64. P. 645–655.
58. **Tjernström M., Balsley B.B., Svensson G., Nappo C.J.** The effects of critical layers on residual layer turbulence // J. Atmospheric Sci. 2009. Vol. 66. P. 468–480.
59. **Sullivan P.P., McWilliams J.C., Moeng C.H.** A subgrid-scale model for large-eddy simulation of planetary boundary-layer flows // Boundary-Layer Meteorology. 1994. Vol. 71. P. 247–276.
60. **Rasam A., Brethouwer G., Schlatter P., Li Q., Johansson A.V.** Effects of modelling, resolution and anisotropy of the subgrid-scales on large eddy simulations of channel flow // J. Turbulence. 2011. Vol. 12, No. 10. P. 1–20.

*Статья поступила в редакцию 22 января 2019 г.,  
после доработки — 29 января 2019 г.,  
принята к публикации 28 февраля 2019 г.*