УДК 517+532

УСТАНОВИВШИЕСЯ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

Т. А. Боднарь

Бийский технологический институт, 659322 Бийск, Россия
E-mail: bodnartroyan@gmail.com

Получено интегральное уравнение Некрасова, описывающее стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью над неровным дном с волнообразным профилем. Разработан численный метод решения этого уравнения при координатах профиля дна, заданных в плоскости комплексной переменной $z = x + iy$.

Ключевые слова: установившиеся волны на поверхности жидкости, интегральное уравнение, ряд Лорана, ядро уравнения Некрасова, конформное отображение.

DOI: 10.15372/PMTF20210401

Введение. Методы изучения движения течений жидкости, в том числе по неровному дну, приведены во многих работах. Отметим работу [1], в которой течения жидкости исследовались с помощью математических моделей, и работы [2, 3], в которых описаны методы решения задач о распространении периодических и уединенных волн произвольной формы по поверхности жидкости с волнообразным и произвольным профилем дна.

Движение потока жидкости по неровному дну с образованием волн исследовано в рамках точной теории нелинейных волн А. И. Некрасова [4, 5]. При этом полагалось, что твердое дно представляет собой периодическую кривую с периодом λ. Эта кривая обладает вертикальной осью симметрии, проходящей через высшую точку кривой. При этом установившиеся волны на поверхности жидкости имеют такие же оси симметрии и периоды, что и кривая, описывающая геометрию дна.

При решении данной задачи используется система координат, применявшаяся в работах [6, 7] при изучении движения волн по поверхности жидкости конечной глубины $h = \text{const}$. Начало системы координат в плоскости комплексной переменной $z = x + iy$ находится на линии вертикальной симметрии одной из волн на расстоянии h от поверхности жидкости. Ось Ox направлена горизонтально вправо, Oy — вертикально вверх. В этой системе координат область одной волны ограничена слева и справа вертикальными линиями, проходящими через две смежные впадины, сверху — неизвестным профилем поверхности жидкости, снизу — неровным дном. Будем полагать, что волны движутся по поверхности жидкости в положительном направлении оси Ox со скоростью c. В системе координат, связанной с одной из волн, дно является неподвижным.

Как и в работе [6], введем вспомогательную комплексную переменную $u = \xi + i\eta$. В плоскости этой переменной одному периоду волны жидкости соответствует кольцо с внешним радиусом $|u| = 1$, внутренним радиусом $|u| = r_0$ и двумя расположенными на малом расстоянии друг от друга линиями разреза на отрезке $[-1, -r_0]$ вещественной оси ξ. Неизвестному профилю волны в плоскости переменной z соответствует внешняя окружность кольца в плоскости переменной u, неровному дну — внутренняя окружность, отрезкам вертикальных линий — верхний и нижний берега разреза.

Методы изучения движения установившихся волн на поверхности жидкости постоянной и переменной глубины аналогичны. В обоих случаях область жидкости, занятая одной волной в области комплексной переменной $z = x + iy$, конформно отображается на внутреннюю область кругового кольца в области комплексной переменной $u = \xi + i\eta$. Различие состоит в том, что при постоянной глубине жидкости угол между касательной к поверхности дна и абсциссой равен нулю, а при переменной глубине этот угол отличен от нуля.

Конформное преобразование z на u можно представить в виде

$$\frac{dz}{du} = -\frac{\lambda}{2\pi i}\,\frac{f(u)}{u},$$

где $f(u)$ — ряд Лорана.

В работе [5] волны описываются однородным интегральным уравнением Некрасова при постоянной глубине жидкости и неоднородным при переменной глубине.

В настоящей работе исследование волн на поверхности жидкости переменной глубины проводится с использованием метода, предложенного в работе [6], с помощью которого получено однородное интегральное уравнение Некрасова.

1. Параметры профиля дна. Предположим, что профиль дна задан в полярной системе координат в виде аналитических функций $y = \psi(\theta)$, $x = -\varphi(\theta)$ (θ — полярный угол). При увеличении координаты x от $-\lambda/2$ до $\lambda/2$ величина угла θ меняется от $-\pi$ до π. Координаты y принимают значения $y(-\pi) = y(\pi) = -h$.

Угол между касательной к профилю дна и абсциссой определяется формулой

$$b(\theta) = \operatorname{arctg}\Big(\frac{d\psi(\theta)}{d\theta}\Big(\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta}\Big)^{-1}\Big).$$

В каждой точке профиля дна известна действительная часть функции $Z(\theta) = b(\theta) + iR(\theta)$. С помощью функции $Z(\theta)$ осуществляется конформное отображение профиля дна на окружность, задаваемую выражением $u = r_0\,\mathrm{e}^{i\theta}$. На этой окружности профиль дна описывается рядом Лорана [5]

$$\Phi(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k \sin k\theta + i\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k \cos k\theta$$

с коэффициентами

$$\beta_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} b(\sigma)\,\frac{\sin k\sigma}{r_0^k + r_0^{-k}}\,d\sigma. \qquad (1.1)$$

Угол между касательной к окружности $u = r_0\,\mathrm{e}^{i\theta}$ и координатой ξ определяется функцией

$$\operatorname{Re}\Phi(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k \sin k\theta. \qquad (1.2)$$

Из (1.2) следует, что угол $\operatorname{Re}\Phi(\theta)$ не зависит непосредственно от координат профиля дна, а зависит только от величины угла $b(\theta)$.

2. Интегральное уравнение Некрасова при $b(\theta) \neq 0$. При постоянной глубине жидкости h интегральное уравнение Некрасова с укороченным ядром имеет вид [6]

$$\omega_n(\theta) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta, \sigma, h_\lambda)\, \mu_n(h_\lambda) \sin \omega_n(\sigma) \Big(1 + \mu_n(h_\lambda) \int\limits_0^{\sigma} \sin \omega(s)\, ds\Big)^{-1} d\sigma. \tag{2.1}$$

Здесь ядро задается формулой

$$K_n(\theta, \sigma, h_\lambda) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - r_0^2}{1 + r_0^2} \frac{\sin k\theta \sin k\sigma}{k\pi},$$

величина $\omega_n(\theta) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sin k\theta$ представляет собой угол между касательной к профилю волны и абсциссой ξ; $h_\lambda = h/\lambda$; $\mu_n(h_\lambda)$ — произвольная постоянная величина интегрирования при фиксированном значении h_λ; $r_0 = \mathrm{e}^{-2\pi h_\lambda}$.

Угол $v_n(\theta)$ между касательной к профилю волны и вектором скорости жидкости, текущей по дну, представляет собой разность

$$v_n(\theta) = \omega_n(\theta) - \operatorname{Re} \Phi_n(\theta), \tag{2.2}$$

где $\operatorname{Re} \Phi_n(\theta) = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k \sin k\theta$. Из равенства (2.2) следует $v_n(\theta) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \sin k\theta$ (α_k — неизвестные коэффициенты).

В системе координат с абсциссой, параллельной вектору скорости жидкости, текущей по дну, интегральное уравнение Некрасова записывается в виде

$$v_n(\theta) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta, \sigma, h_\lambda)\, \mu_n(h_\lambda) \sin v_n(\sigma) \Big(1 + \mu_n(h_\lambda) \int\limits_0^{\sigma} \sin v_n(s)\, ds\Big)^{-1} d\sigma.$$

Такая система координат существует в каждой точке окружности $u = r_0\, \mathrm{e}^{i\theta}$.

Основываясь на методе решения уравнения (2.1), использованном в работе [6], можно утверждать, что при равенстве нулю угла между абсциссой и вектором скорости жидкости, текущей по дну, коэффициент a_1 функции $\omega_n(\theta)$ инвариантен относительно системы координат, ориентированной в плоскостях переменных z и u. Следовательно, во всех системах координат с абсциссами, параллельными вектору скорости жидкости, текущей по дну, коэффициент α_1 функции $v_n(\theta)$ не меняется.

Для определения коэффициента α_1 используем линеаризованное по $\mu_1(h_\lambda)$ уравнение (2.2) в следующем виде:

$$\alpha_1 \sin\theta = \mu_1^0(h_\lambda) \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_1(\theta, \sigma, h_\lambda) \sin v_1(\sigma) \Big(1 + \int\limits_0^{\sigma} \sin v_1(s)\, ds\Big)^{-1} d\sigma. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) отличается от уравнения, полученного в работе [6], лишь обозначениями. Следовательно, это уравнение имеет решение $\alpha_1 = 0{,}047\,452\,0$, $\mu_1^0(h_\lambda) = \pi \operatorname{cth}(2\pi h_\lambda)$. Подставляя α_1 и $\mu_1^0(h_\lambda)$ в уравнение (2.3), получаем тождество

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\sigma \sin v_1(\sigma)}{3\alpha_1} \Big(1 + \int\limits_0^{\sigma} \sin v_1(s)\, ds\Big)^{-1} d\sigma = 1,$$

не зависящее от системы координат и параметров λ и h.

Из уравнения (2.2) находим

$$\omega_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k) \sin k\theta. \tag{2.4}$$

Подставляя функции $\omega_n(\theta)$ из равенства (2.4) в формулу (2.1), получаем интегральное уравнение Некрасова для установившихся волн на поверхности жидкости с неровным дном.

Умножая левую и правую части интегрального уравнения (2.1) на $\sin k\theta$ и интегрируя по θ от $-\pi$ до π, получаем систему интегральных уравнений

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{th}(2k\pi h_\lambda) \, \frac{\mu_n(h_\lambda) \sin k\sigma \sin \omega_n(\sigma)}{3k\pi} \Big(1 + \mu_n(h_\lambda) \int_0^\sigma \sin \omega_n(s)\, ds\Big)^{-1} d\sigma, \qquad k = 1, 2, \dots, n \tag{2.5}$$

с известным коэффициентом $a_1 = \alpha_1 + \beta_1$. Неизвестные величины $a_2, a_3, \dots, a_n, \mu_n(h_\lambda)$ системы (2.5) вычисляются с помощью метода последовательных приближений.

3. Профиль волны при $b(\theta) \neq 0$. Область $u = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ плоскости $u = \xi + i\eta$ конформно отображается на плоскость $z = x + iy$ с помощью функции [4]

$$z = \frac{i\lambda}{2\pi} \Big(\ln u + b_1 u + \frac{1}{2}\, b_2 u^2 + \frac{1}{3}\, b_3 u^3 + \dots\Big). \tag{3.1}$$

Полагая в формуле (3.1) $u = \mathrm{e}^{i\theta}$, находим координаты профиля волны в плоскости переменной z:

$$x = -\frac{\lambda}{2\pi} \Big(\theta + b_1 \sin\theta + \frac{1}{2}\, b_2 \sin 2\theta + \frac{1}{3}\, b_3 \sin 3\theta + \dots\Big),$$
$$y = \frac{\lambda}{2\pi} \Big(b_1 \cos\theta + \frac{1}{2}\, b_2 \cos 2\theta + \frac{1}{3}\, b_3 \cos 3\theta + \dots\Big). \tag{3.2}$$

При известном решении интегрального уравнения (2.1) с учетом $\omega_n(\theta)$ в равенстве (2.4) и используя уравнение, полученное в работе [6]:

$$\ln\big(1 + b_1\,\mathrm{e}^{i\theta} + b_2\,\mathrm{e}^{2i\theta} + b_3\,\mathrm{e}^{3i\theta} + \dots + b_n\,\mathrm{e}^{ni\theta}\big) = a_1\,\mathrm{e}^{i\theta} + a_2\,\mathrm{e}^{2i\theta} + a_3\,\mathrm{e}^{3i\theta} + \dots + a_n\,\mathrm{e}^{ni\theta}, \tag{3.3}$$

можно вычислить коэффициенты $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$. Подставляя решение уравнения (3.3) в (2.2), получаем профиль волны в плоскости комплексной переменной z.

На рис. 1 показан профиль волны при следующих параметрах дна в плоскости переменной z:

$$\lambda = 25 \text{ м}, \quad h = -10 \text{ м}, \quad y = -9 + \cos\theta,$$
$$x = -\frac{25\theta}{2\pi}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2\pi \sin\theta}{25}, \quad b(\theta) = \operatorname{arctg}\Big(\frac{2\pi \sin\theta}{25}\Big).$$

При известных радиусе $r_0 = \mathrm{e}^{-0{,}8\pi}$ и функции $b(\theta)$ из уравнений (1.1) определяем коэффициенты: $\beta_1 = 3{,}983\,18 \cdot 10^{-2}$, $\beta_2 = -1{,}121\,68 \cdot 10^{-19}$, $\beta_3 = 1{,}342\,65 \cdot 10^{-6}$, $\beta_4 = -1{,}890\,68 \cdot 10^{-21}$, $\beta_5 = 8{,}442\,23 \cdot 10^{-11}$. Подставляя коэффициенты $a_k = \alpha_k + \beta_k$ из формулы (2.4) в систему уравнений (2.5), получаем решение этой системы: $\mu_5(h_\lambda) = 4{,}098\,343$, $a_1 = 0{,}087\,283\,6$, $a_2 = 0{,}011\,924\,1$, $a_3 = 0{,}002\,017\,39$, $a_4 = 0{,}000\,377\,013$, $a_5 = 0{,}000\,074\,132\,3$.

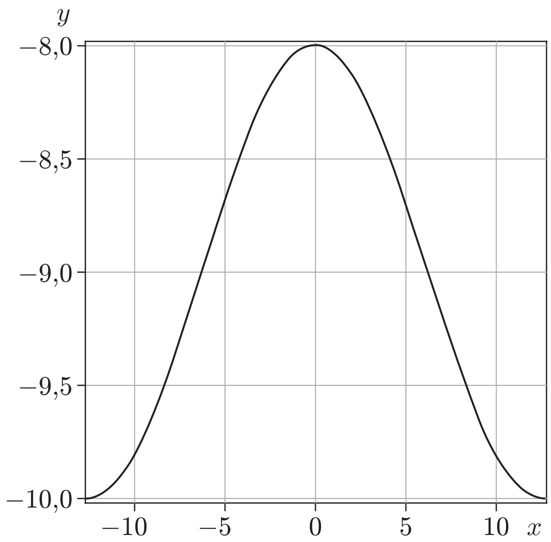

Рис. 1

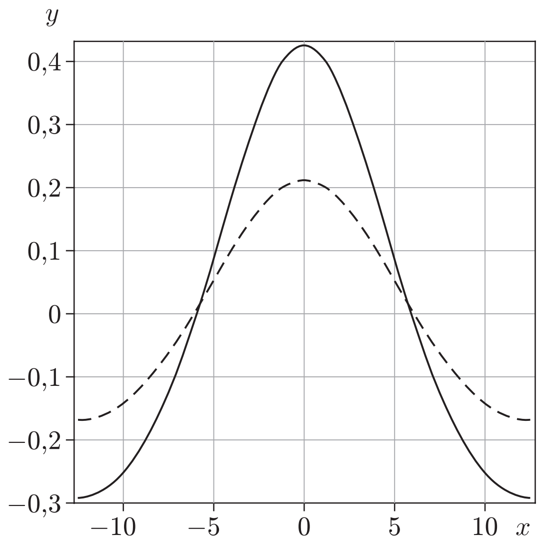

Рис. 2

Рис. 1. Период профиля поверхности дна при $b(\theta) \neq 0$

Рис. 2. Профили волны, соответствующей профилю поверхности дна, показанному на рис. 1 (сплошная линия), и волны, соответствующей профилю поверхности дна при $\lambda = 25$ м, $h = -10$ м, $b(\theta) = 0$ (штриховая линия)

Подстановка указанных выше значений коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_5$ в уравнение (3.3) позволяет вычислить коэффициенты: $b_1 = 0{,}087\,283\,6$, $b_2 = 0{,}015\,733\,3$, $b_3 = 0{,}003\,169\,00$, $b_4 = 0{,}000\,672\,030$, $b_5 = 0{,}000\,146\,348$. Подставляя эти коэффициенты в уравнения (3.2), получаем профиль волны при указанных выше параметрах дна (сплошная линия на рис. 2).

Для сравнения рассмотрим профиль волны при $\lambda = 25$ м, $h = -10$ м, $b(\theta) = 0$. Коэффициенты решения системы уравнений (2.5) вычислены при этих значениях в работе [6]: $\mu_5(h_\lambda) = 3{,}543\,810$, $a_1 = 0{,}047\,452\,0$, $a_2 = 0{,}003\,518\,69$, $a_3 = 0{,}000\,322\,950$, $a_4 = 0{,}000\,032\,749\,5$, $a_5 = 0{,}000\,003\,507\,92$. Профиль волны при $b(\theta) = 0$ определяется так же, как при $b(\theta) \neq 0$ (штриховая линия на рис. 2).

Заключение. В работе построено интегральное уравнение Некрасова при $b(\theta) \neq 0$ и разработан метод его решения. Получены профили волн, соответствующие профилям поверхности дна.

Автор выражает благодарность Е. А. Карабуту за полезные замечания и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаврентьев М. А.** Проблемы гидродинамики и их математические модели / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1973.
2. **Ruban V. P.** Water waves over a strongly undulating bottom // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. 066302.
3. **Ruban V. P.** Nonlinear waves in a constant-vorticity planar flow over variable depth // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 92, № 3. С. 162–166.
4. **Некрасов А. И.** Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. М.: Изд-во АН СССР, 1951.

5. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
6. **Боднарь Т. А.** Об установившихся периодических волнах на поверхности жидкости конечной глубины // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 3. С. 60–67.
7. **Bodnar T.** The conservation laws and stability of fluid waves of permanent form // Appl. Math. 2013. V. 4, N 3. P. 486–490. DOI: 10.4236/am.2013.43072.

Поступила в редакцию 4/II 2020 г.,
после доработки — 17/X 2020 г.
Принята к публикации 26/X 2020 г.