ПМТФ, № 6, 1972

УДК 539.3 + 517.945

# НЕСТАЦИОНАРНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ЭЙЛЕРОВЫХ КООРДИНАТАХ

*С. К. Годунов, Е. И. Роменский*

*(Новосибирск)*

В работе изучается система дифференциальных уравнений, описывающая нестационарные процессы нелинейной теории упругости в изотропной среде. Такая среда характеризуется уравнением состояния $E = E(I_1, I_2, I_3, S)$ в виде зависимости плотности внутренней энергии $E$ (на единицу массы) от инвариантов $I_1, I_2, I_3$ тензора деформаций и от энтропии $S$.

Для описания процессов пластических деформаций в уравнения включаются «упруговязкие» члены Кельвина — Максвелла. Эти члены необходимо вводить так, чтобы не нарушить уравнения неразрывности. Выполнение закона возрастания энтропии при упруговязких процессах накладывает на уравнение состояния ограничения в виде некоторых неравенств. В дальнейшем выясняется, что эти неравенства всегда выполнены, если зависимость $E = E(I_1, I_2, I_3, S)$ обеспечивает гиперболичность системы. Основное содержание работы — исследование термодинамических тождеств, составление характеристического уравнения, формулировка условий гиперболичности и приведение системы к симметрическому гиперболическому по Фридрихсу виду. В литературе не удалось найти системы уравнений, записанной в форме, удовлетворяющей этим требованиям. Поэтому первые пункты работы посвящены мотивировке этой формы [1].

Инварианты $\rho$, $D$, $\Delta$ тензора деформаций, использованные при выписывании уравнения характеристического конуса в системе координат, привязанной к главным осям тензора деформаций (п. 5), позволяют при $E(\rho, D, \Delta, S)$, не зависящем от $D$, $\Delta$, убедиться в том, что в этом случае характеристики рассматриваемой системы приводятся к характеристикам уравнений гидродинамики.

**1. Законы сохранения и формулы Мурнагана.** Предположим, что состояние сплошной среды характеризуется распределением плотности $\rho$, плотности внутренней энергии $\rho E$, плотности энтропии $\rho S$, полями вектора скоростей с компонентами $u_i$ $(i = 1, 2, 3)$ и тензора напряжений с компонентами $\sigma_{ik}$ $(\sigma_{ik} = \sigma_{ki},\ i, k = 1, 2, 3)$. Тогда в процессе движения этой среды должны выполняться законы сохранения массы, импульса, энергии и энтропии. Процессы теплопередачи не рассматриваются. Члены, описывающие рост энтропии при релаксационных упруговязких процессах, будут введены в дальнейшем. Законы сохранения в дифференциальной форме в рассматриваемом случае приводят к следующим, дивергентным уравнениям:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} = 0$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_k - \sigma_{ik})}{\partial x_k} = 0$$

$$\frac{\partial \rho (E + {}^1/{}_2 u_i u_i)}{\partial t} + \frac{\partial [\rho u_k (E + {}^1/{}_2 u_i u_i) - u_i \sigma_{ik}]}{\partial x_k} = 0$$

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u_k}{\partial x_k} = 0$$

---

[1] Л. И. Седов обратил внимание на работу [1], в которой изучалась полная система линейных уравнений для малых возмущений в вязкоупругой жидкости.

Для описания состояния среды необходимо привлекать еще тензор деформаций $\varepsilon_{ik}$ или связанный с ним метрический тензор $g_{ik} = \delta_{ik} - 2\,\varepsilon_{ik}$. Использование первого начала термодинамики позволяет связать с помощью уравнения состояния тензоры напряжений и деформаций формулами Мурнагана (см. [2-4])

$$\sigma_{ik} = \rho\left(\frac{\partial E}{\partial \varepsilon_{ik}} - 2\varepsilon_{i\alpha}\frac{\partial E}{\partial \varepsilon_{\alpha k}}\right)$$

$$\rho = \rho_0 \sqrt{\det\|\delta_{ik} - 2\varepsilon_{ik}\|}$$

$$E = E(I_1, I_2, I_3, S)$$

Здесь $\rho$ и $E$ предполагаются известными функциями тензора деформаций ($\rho_0$ — плотность среды до деформации), $I_k$ — инварианты тензора деформаций

$$I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{33} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{11} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}$$

Таким образом, $E$ есть симметрическая функция от собственных значений тензора деформаций. Следует различать дифференцирование функции от тензора деформаций по компонентам $\varepsilon_{ij}$ и $\varepsilon_{ji}$, иначе после дифференцирования будут получаться вдвое большие величины.

При этих предположениях об уравнении состояния тензор напряжений $\sigma_{ik}$ оказывается симметричным.

Из формул Мурнагана видно, что они носят тензорный характер (в данной записи только относительно ортогональных преобразований системы координат). Если оси системы координат совпадают с главными направлениями тензора деформаций (и напряжений), то

$$\varepsilon_{ik} = 0 \quad (i \neq k), \qquad \varepsilon_{ii} \equiv \varepsilon_i$$

$$\sigma_{ik} = 0 \quad (i \neq k), \qquad \sigma_{ii} = \rho(1 - 2\varepsilon_i)\frac{\partial E}{\partial \varepsilon_i} =$$

$$= \rho\frac{1}{\sqrt{1 - 2\varepsilon_i}}\frac{\partial E}{\partial\left[(1 - 2\varepsilon_i)^{-1/2}\right]} \equiv \sigma_i$$

$$(\rho = \rho_0\sqrt{(1 - 2\varepsilon_1)(1 - 2\varepsilon_2)(1 - 2\varepsilon_3)})$$

Выбор параметризации $E = E(a_1, a_2, a_3, S)$ уравнения состояния, где $a_i = (1 - 2\,\varepsilon_i)^{-1/2}$, приводит формулы Мурнагана к следующему виду:

$$\sigma_i = \rho a_i E a_i$$

или, если учесть, что $\rho = \rho_0 / a_1 a_2 a_3$

$$\sigma_1 = \frac{\rho_0}{a_2 a_3} E_{a_1}(a_1, a_2, a_3, S)$$

$$\sigma_2 = \frac{\rho_0}{a_3 a_1} E_{a_2}(a_1, a_2, a_3, S)$$

$$\sigma_3 = \frac{\rho_0}{a_1 a_2} E_{a_3}(a_1, a_2, a_3, S)$$

Использование параметров $a_1$, $a_2$, $a_3$ позволяет дать наглядный вывод формул Мурнагана для тензора напряжений. Если некоторый объем среды до деформации, в ненапряженном состоянии, занимал прямоугольный параллелепипед с ребрами $(\Delta x_1)_0$, $(\Delta x_2)_0$, $(\Delta x_3)_0$, то после адиабатической деформации он будет занимать параллелепипед с ребрами $\Delta x_i = a_i \times \times (\Delta x_i)_0$, т. е. $a_1, a_2, a_3$ задают коэффициенты растяжения по осям. Силы, действующие на грани параллелепипеда, таковы:

$$F_1 = \sigma_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = \sigma_1 a_2 a_3 (\Delta x_2)_0 (\Delta x_3)_0$$
$$F_2 = \sigma_2 \Delta x_3 \Delta x_1 = \sigma_2 a_3 a_1 (\Delta x_3)_0 (\Delta x_1)_0$$
$$F_3 = \sigma_3 \Delta x_1 \Delta x_2 = \sigma_3 a_1 a_2 (\Delta x_1)_0 (\Delta x_2)_0$$

Эти силы при вариации $\delta a_i$ параметров $a_i$ производят на перемещениях $\delta a_i (\Delta x_i)_0$ работу

$$F_1 \delta a_1 (\Delta x_1)_0 + F_2 \delta a_2 (\Delta x_2)_0 + F_3 \delta a_3 (\Delta x_3)_0 = (\sigma_1 \delta a_1 a_2 a_3 + \\ + \sigma_2 a_1 \delta a_2 a_3 + \sigma_3 a_1 a_2 \delta a_3) (\Delta x_1)_0 (\Delta x_2)_0 (\Delta x_3)_0$$

которая идет на приращение внутренней энергии

$$(\rho \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3) E (a_1, a_2, a_3, S) = \rho_0 (\Delta x_1)_0 (\Delta x_2)_0 (\Delta x_3)_0 E (a_1, a_2, a_3, S)$$
$$\rho_0 (\Delta x_1)_0 (\Delta x_2)_0 (\Delta x_3)_0 \delta E = a_1 a_2 a_3 \left(\sigma_1 \frac{\delta a_1}{a_1} + \sigma_2 \frac{\delta a_2}{a_2} + \sigma_3 \frac{\delta a_3}{a_3}\right) \times \\ \times (\Delta x_1)_0 (\Delta x_2)_0 (\Delta x_3)_0$$

Сокращая на $(\Delta x_1)_0 (\Delta x_2)_0 (\Delta x_3)_0$, приходим к формулам Мурнагана

$$\rho_0 \delta E = \sigma_1 a_2 a_3 \delta a_1 + \sigma_2 a_1 a_3 \delta a_2 + \sigma_3 a_1 a_2 \delta a_3$$
$$\sigma_1 = \frac{\rho_0}{a_2 a_3} \frac{\partial E}{\partial a_1}, \quad \sigma_2 = \frac{\rho_0}{a_3 a_1} \frac{\partial E}{\partial a_2}, \quad \sigma_3 = \frac{\rho_0}{a_1 a_2} \frac{\partial E}{\partial a_3}$$

Как обычно, $E_S$ имеет смысл температуры, поэтому в параметрах $a_1$, $a_2$, $a_3$, $S$ имеет место следующее термодинамическое тождество:

$$\delta E (a_1, a_2, a_3, S) = \frac{a_2 a_3}{\rho_0} \sigma_1 \delta a_1 + \frac{a_3 a_1}{\rho_0} \sigma_2 \delta a_2 + \frac{a_1 a_2}{\rho_0} \sigma_3 \delta a_3 + T \delta S$$

В дальнейшем иногда удобно пользоваться вместо параметров $a_i$, характеризующих главные оси тензора деформаций, параметрами

$$\rho = \frac{\rho_0}{a_1 a_2 a_3}, \qquad d_i = \ln \frac{a_i}{\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}}$$

а также инвариантами $\rho$

$$D = {}^1/_2 (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2), \; \Delta = d_1 d_2 d_3$$

Инвариант $\rho$ (плотность) характеризует степень сжатия элементарного объема при деформации, а инварианты $D$, $\Delta$ — изменение его формы. В случае малых деформаций инвариант $D$ совпадает с квадратичным инвариантом девиатора тензора деформаций

$$D = {}^1/_2 [(\varepsilon_1 - {}^1/_3 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3))^2 + (\varepsilon_2 - {}^1/_3 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3))^2 + \\ + (\varepsilon_3 - {}^1/_3 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3))^2] + O (| \varepsilon_1 |^3 + | \varepsilon_2 |^3 + | \varepsilon_3 |^3)$$

Величина $\Delta$ является при малых деформациях величиной третьего порядка малости, а в линейной теории упругости зависимость $E (\rho, D, \Delta S,)$ от $\Delta$ не должна рассматриваться.

Приведем для справок вытекающие из формул Мурнагана выражения для главных напряжений в предположении параметризации $E(\rho, D, \Delta, S)$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\rho^2 E_\rho + \rho d_1 E_D - {}^1/_3\,\rho\,(d_2^2 + d_3^2 - 2d_1^2)\,E_\Delta \\ \sigma_2 &= -\rho^2 E_\rho + \rho d_2 E_D - {}^1/_3\,\rho\,(d_3^2 + d_1^2 - 2d_2^2)\,E_\Delta \\ \sigma_3 &= -\rho^2 E_\rho + \rho d_3 E_D - {}^1/_3\,\rho\,(d_1^2 + d_2^2 - 2d_3^2)\,E_\Delta \end{aligned} \tag{1.1}$$

Из этих формул вытекает, в частности, что так называемое среднее давление

$$-{}^1/_3\,(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = -{}^1/_3\,(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \rho^2 E_\rho\,(\rho, D, \Delta, S)$$

вычисляется по обычной формуле $p = \rho^2\, E_\rho\,(\rho, S)$ для давления в газе.

Значения $d_1$, $d_2$, $d_3$ (с точностью до порядка) могут быть определены по инвариантам $D$, $\Delta$ как корни кубического уравнения

$$d^3 - Dd - \Delta = 0$$

Чтобы все корни этого уравнения были вещественны, как известно, необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$(D\,/\,3)^3 \geqslant (\Delta\,/\,2)^2$$

Если $\rho$, $d_1$, $d_2$, $d_3$ известны, то какие-либо другие параметры, определяющие деформацию, могут быть по ним вычислены. Так, например

$$a_i = e^{d_i}\sqrt[3]{\rho_0\,/\,\rho}, \quad \varepsilon_i = {}^1/_2\,[1 - e^{-2d_i}\,(\rho\,/\,\rho_0)^{2/3}]$$

Будем предполагать уравнение состояния $E = E\,(\rho, D, \Delta, S)$ таким, что с помощью формул Мурнагана (1.1) по заданным главным напряжениям $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ однозначно восстанавливаются соответствующие главные значения $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ тензора деформаций. Это предположение необходимо для определения того ненапряженного «начального состояния» для каждого элемента деформируемой среды, относительно которого вычисляется деформация (см. [5], стр. 67).

**2. Уравнения, описывающие изменение тензора деформаций во времени.** Пусть при $t = 0$ метрический тензор деформаций $g_{ik}^\circ = \delta_{ik} - 2\,\varepsilon_{ik}$ определяет деформацию, которую нужно произвести в окрестности каждой точки, чтобы тензор напряжений в этой точке стал нулевым. С помощью тензора $g_{ik}^\circ$ определяется метрика (элемент длины)

$$dS^2 = g_{ik}^\circ\,dx^{\circ i}\,dx^{\circ k}$$

В процессе движения для каждой материальной точки с координатами $x^i$ в момент времени $t$ будем восстанавливать ее координаты $x^{\circ i}$ в момент времени $t = 0$

$$x^{\circ i} = x^{\circ i}\,(x^1, x^2, x^3, t)$$

Поскольку вдоль траектории материальной точки ее начальная координата постоянна, то

$$\frac{dx^{\circ i}}{dt} \equiv \frac{\partial x^{\circ i}}{\partial t} + u^k\,\frac{\partial x^{\circ i}}{\partial x^k} = 0$$

Дифференцируя это уравнение по $x^j$, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^{\circ i}}{\partial x^j}\right) + \frac{\partial u^k}{\partial x^j}\,\frac{\partial x^{\circ i}}{\partial x^k} = 0$$

Определим метрический тензор $g_{ik} = \delta_{ik} - 2\varepsilon_{ik}$ таким образом, чтобы в процессе движения элемент длины одного и того же материального вектора $dS$ не менялся. Получим

$$dS^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k = g_{ik}^{*}\,dx^{\circ i}\,dx^{\circ k}$$

Поэтому

$$g_{ij} = \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\circ\alpha}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{\circ\beta}}{\partial x^j}$$

и, следовательно

$$\frac{dg_{ij}}{dt} = \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^{\circ\alpha}}{\partial x^i}\right)\frac{\partial x^{\circ\beta}}{\partial x^j} + \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\circ\alpha}}{\partial x^i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^{\circ\beta}}{\partial x^j}\right) =$$
$$= -\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\circ\alpha}}{\partial x^k}\frac{\partial x^{\circ\beta}}{\partial x^j}\frac{\partial u^k}{\partial x^i} - \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\circ\alpha}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{\circ\beta}}{\partial x^k}\frac{\partial u^k}{\partial x^j}$$

Итак

$$\frac{dg_{ij}}{dt} = -g_{i\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j} - g_{j\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}$$

Заметим, что, так как рассматривается поведение среды в ортогональной декартовой системе координат $x_1$, $x_2$, $x_3$, то $x^i = x_i$, $u^i = u_i$. Теперь, пользуясь определением тензора деформаций $\varepsilon_{ij} = {}^1/_2\,(\delta_{ij} - g_{ij})$, получаем уравнения для изменения компонент тензора деформаций во времени

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{1}{2}(\delta_{i\alpha} - 2\varepsilon_{i\alpha})\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} + \frac{1}{2}(\delta_{j\alpha} - 2\varepsilon_{j\alpha})\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \tag{2.1}$$

Более подробно с кинематикой деформируемой среды можно познакомиться по книгам Л. И. Седова (см., например, формулы (6.12) на стр. 120 книги [6]).

Поясним теперь на примере малых деформаций способ введения в уравнение членов, описывающих релаксацию касательных напряжений. В дальнейшем предположим распространение этого способа на конечные деформации.

В случае малых деформаций ($\varepsilon_{ij} \ll 1$) формулы (2.1) принимают хорошо известный в линейной теории упругости вид

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = 0$$

Для малых деформаций уравнение состояния можно задавать в упрощенной форме

$$\rho_0 E = {}^1/_2\,\lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 + \mu(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji})$$

откуда

$$\sigma_{ij} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\,\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{2.2}$$

и, следовательно,

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = \lambda\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

В упруговязкой среде, каковой являются, например, металлы при наличии в них достаточно больших напряжений сдвига, необходимо ввести в уравнения для $d\sigma_{ij}/dt$ слагаемые, предложенные Кельвином, Максвеллом, Фойхтом и др., описывающие релаксацию девиатора напряжений. После введения этих слагаемых уравнения в линейном случае принято писать так:

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{\sigma_{ij} - {}^1/_3(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\delta_{ij}}{\tau}$$

Так как $\sigma_{ij}$ и $\varepsilon_{ij}$ связаны между собой формулами (2.2), то выписанные уравнения для $\sigma_{ij}$ эквивалентны следующим уравнениям для $\varepsilon_{ij}$:

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] - \frac{\varepsilon_{ij} - {}^1/_3(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\delta_{ij}}{\tau}$$

Здесь $\tau$ — характерное время релаксации касательных напряжений. В выписанных уравнениях члены в квадратных скобках описывают изменение тензора деформаций в результате движения среды, а остальные члены в правых частях дают феноменологический учет изменения с течением времени того «начального» состояния, относительно которого вычисляется тензор деформаций. Возникает естественное желание и в случае нелинейной вязкоупругости написать

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{1}{2}(\delta_{i\alpha} - 2\varepsilon_{i\alpha})\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} + \frac{1}{2}(\delta_{j\alpha} - 2\varepsilon_{j\alpha})\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} - \frac{\varepsilon_{ij} - {}^1/_3(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\delta_{ij}}{\tau}$$

Здесь, однако, существует важное обстоятельство, определяющее способ написания релаксационных членов. В случае, если в правую часть уравнений для $\varepsilon_{ij}$ не добавляются релаксационные слагаемые типа

$$\varphi_{ij} = -\frac{\varepsilon_{ij} - {}^1/_3(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})}{\tau}$$

то из уравнений (2.1) вытекает уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u_k}{\partial x_k} = 0$$

Плотность $\rho$ выражается через метрический тензор $g_{ij}$ и через тензор деформаций $\varepsilon_{ij}$ по формулам

$$\rho = \rho_0\sqrt{\det\|g_{ij}\|} = \rho_0\sqrt{\det\|\delta_{ij} - 2\varepsilon_{ij}\|}$$

Отсюда следует, что

$$g_{i\alpha}\rho_{\varepsilon_{\alpha j}} = -\rho\delta_{ij}$$

т. е.

$$(\delta_{i\alpha} - 2\varepsilon_{i\alpha})\rho_{\varepsilon_{\alpha j}} = -\rho\delta_{ij}, \quad (\delta_{\alpha i} - 2\varepsilon_{\alpha i})\rho_{\varepsilon_{j\alpha}} = -\rho\delta_{ij}$$

Умножим теперь каждое из уравнений (2.1) на соответствующее $\rho_{\varepsilon_{ij}}$ и, сложив, получим

$$0 = \frac{d\rho}{dt} - \frac{1}{2}\rho_{\varepsilon_{ij}}(\delta_{i\alpha} - 2\varepsilon_{i\alpha})\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\rho_{\varepsilon_{ij}}(\delta_{j\alpha} - 2\varepsilon_{j\alpha})\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} =$$

$$= \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{2}\rho\delta_{j\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\rho\delta_{i\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} = \frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u_k}{\partial x_k}$$

Теперь ясно, что релаксационные члены должны вводиться таким образом, чтобы не нарушалось уравнение неразрывности, а для этого необходимо выполнение соотношения

$$\rho_{\varepsilon_{ij}}\varphi_{ij} = 0$$

(здесь подразумевается суммирование по $i$ и по $j$).

Очевидно, что в случае малых деформаций

$$\rho_{\varepsilon_{ij}} = \delta_{ij} + O(\varepsilon_{pq}^2)$$

это соотношение принимает вид

$$\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33} = 0$$

Оно автоматически выполнено для кельвиновских релаксационных членов

$$\varphi_{ij} = -\frac{\varepsilon_{ij} - {}^1/_3\,(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\,\delta_{ij}}{\tau}$$

При рассмотрении конечных деформаций естественно выбрать релаксационные члены следующим образом:

$$\varphi_{ij} = -\left[\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{pq}\rho_{\varepsilon_{pq}}\left(\rho_{\varepsilon_{11}} + \rho_{\varepsilon_{22}} + \rho_{\varepsilon_{33}}\right)^{-1}\delta_{ij}\right]\tau^{-1} =$$
$$= \frac{1}{2\tau}\left[\delta_{ij} - 2\varepsilon_{ij} + \frac{3\rho}{\rho_{\varepsilon_{11}} + \rho_{\varepsilon_{22}} + \rho_{\varepsilon_{33}}}\delta_{ij}\right]$$

Это определение, как нетрудно проверить, инвариантно относительно выбора ортогональной системы координат и удовлетворяет условию $\rho_{\varepsilon_{ij}}\varphi_{ij} = 0$. При этом $\tau$ может быть произвольной положительной функцией от параметров, определяющих состояние вещества. В частности, если $\tau = \infty$ при интенсивности касательных напряжений

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{23}^2 + 2\sigma_{31}^2}$$

меньшей $\sigma_*$ и $\tau = \tau_0$ при бо́льших интенсивностях, приходим к упруговязкой среде, обладающей в случае малых $\tau_0$ всеми основными свойствами пластического материала, который удовлетворяет критерию пластичности Мизеса.

Приведем в качестве другого примера более общий вид релаксационных членов, которые в главных осях тензора деформаций ($\varepsilon_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, $\varepsilon_{ii} \equiv \varepsilon_i$) имеют вид

$$\varphi_i = -\frac{1}{\tau_i}\left[\varepsilon_i - \left(\frac{\varepsilon_1}{\tau_1}\rho_{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_2}{\tau_2}\rho_{\varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_3}{\tau_3}\rho_{\varepsilon_3}\right)\left(\frac{1}{\tau_1}\rho_{\varepsilon_1} + \frac{1}{\tau_2}\rho_{\varepsilon_2} + \frac{1}{\tau_3}\rho_{\varepsilon_3}\right)^{-1}\right]$$

В этом случае также нетрудно проверить, что при любых $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$ (будем опять предполагать их положительными) условие $\rho_{\varepsilon_{ij}}\varphi_{ij} = 0$ выполняется, что влечет за собой выполнение уравнения неразрывности. Эта форма релаксационных членов позволяет моделировать процесс неполной пластичности, в котором интенсивность касательных напряжений на некоторых площадках превысила $\sigma_*$, а на некоторых нет. При этом можно предполагать, что часть из $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$ равна $\infty$ или какому-либо очень большому времени $\tau_\infty$, а часть — малому времени $\tau_0$. Предыдущий вариант релаксационных членов получится из выбранного, если положить $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau$. Полагая

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{1}{2}(\delta_{i\alpha} - 2\varepsilon_{i\alpha})\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} + \frac{1}{2}(\delta_{j\alpha} - 2\varepsilon_{j\alpha})\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} + \varphi_{ij}$$

как бы раскладываем тензор скоростей деформаций $d\varepsilon_{ij}/dt$, называемый обычно полным тензором скоростей деформаций, на упругую $d\varepsilon_{ij}^e/dt$ и пластическую $d\varepsilon_{ij}{}^p/dt = \varphi_{ij}$ части. Требование $\rho_{\varepsilon_{ij}}\varphi_{ij} = 0$ представляет собой утверждение о том, что пластические деформации протекают без изменения объема (см., например, [7]).

Уилкинс [8] при расчете упругопластических течений добивался выполнения критерия Мизеса за счет довольно произвольного процесса нормировки девиатора. При такой нормировке остается не ясным, как проверить выполнение законов термодинамики. По-видимому, введение зависимости времени релаксации от интенсивности касательных напряжений может привести автоматически к почти точному выполнению условий пластичности. Справедливость закона возрастания энтропии при данной записи релаксационных членов будет проверена в п. 3.

Сделаем несколько замечаний относительно условий совместности в рассматриваемой модели. Как известно, с каждым метрическим тензором $g_{ik} = \delta_{ik} - 2\varepsilon_{ik}$ можно связать тензор кривизны Римана — Кристоффеля

$$R_{ik\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 g_{i\mu}}{\partial x^k\,\partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{i\lambda}}{\partial x^k\,\partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{k\mu}}{\partial x^i\,\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 g_{k\lambda}}{\partial x^i\,\partial x^\mu}\right\} -$$

$$- g^{\rho\sigma}\Gamma_{\sigma,\,\lambda i}\Gamma_{\rho,\,\mu k} + g^{\rho\sigma}\Gamma_{\sigma,\,\lambda k}\Gamma_{\rho,\,\mu i}$$

Здесь $\Gamma_{r,\,ik}$ — символы Кристоффеля

$$\Gamma_{r,\,ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r}\right)$$

Отличие $R_{ik\lambda\mu}$ от нуля характеризует «несовместность» метрического тензора деформаций с эвклидовостью трехмерного пространства. В трехмерном пространстве у тензора $R_{ik\lambda\mu}$ есть только шесть различных ненулевых компонент; так что можно вместо четырехвалентного тензора кривизны $R_{ik\lambda\mu}$ рассматривать двухвалентный тензор $R_{i\mu}$, имеющий те же ненулевые компоненты

$$R_{i\mu} = g^{k\lambda}R_{ik\lambda\mu}$$

или тензор Эйнштейна

$$G_{ik} = R_{ik} - {}^1/_2\, g_{ik}R \qquad (R = g^{\lambda\mu}R_{\lambda\mu})$$

(см., например, [9,10]).

О связи тензора кривизны и плотности дислокаций см. §§ 9, 12, 14 приложения книги [11], а также [7]. Эти работы посвящены линейной теории упругости. Роль тензора кривизны, как тензора несовместности, в нелинейном случае обсуждается в [4].

Рассмотрим далее, как меняется во времени тензор $G_{ik}$, если изменение тензора деформаций описывается уравнениями

$$\frac{d\varepsilon_{ik}}{dt} = \frac{1}{2}(\delta_{i\alpha} - 2\varepsilon_{i\alpha})\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} + \frac{1}{2}(\delta_{k\alpha} - 2\varepsilon_{k\alpha})\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} + \varphi_{ik}$$

Если положить релаксационные члены $\varphi_{ik} = 0$, то нетрудно понять, что описываемое этими уравнениями движение можно рассматривать как непрерывное изменение координат в исходном пространстве с метрикой $g_{ik}{}^\circ$. При этом все тензоры преобразуются по одинаковому правилу. В частности

$$\frac{dg_{ik}}{dt} + g_{i\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} + g_{k\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} = 0$$

Поэтому для $G_{ik}$ надо написать

$$\frac{dG_{ik}}{dt}+G_{i\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k}+G_{k\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}=0$$

Конечно, это равенство, являющееся для сформулированных выше уравнений теории упругости соотношением вдоль характеристик (линий тока), может быть из них выведено при помощи дифференцирования уравнений и взятия соответствующих линейных комбинаций. В случае, если релаксационные члены $\varphi_{ik}$ отличны от нуля, будем иметь для $G_{ik}$ уравнения с правыми частями [1]

$$\frac{dG_{ik}}{dt}+G_{i\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k}+G_{k\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}=\Phi_{ik}$$

$$\Phi_{ik}=\left(\frac{1}{2}g_{ik}g^{\varkappa\lambda}g^{\alpha\beta}-\delta_\varkappa{}^i\delta_\lambda{}^k g^{\alpha\beta}\right)\times$$
$$\times\left\{\frac{\partial^2\varphi_{\alpha\beta}}{\partial x^\varkappa\,\partial x^\lambda}-\frac{\partial^2\varphi_{\alpha\lambda}}{\partial x^\varkappa\,\partial x^\beta}-\frac{\partial^2\varphi_{\varkappa\beta}}{\partial x^\alpha\,\partial x^\lambda}+\frac{\partial^2\varphi_{\varkappa\lambda}}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}\right\}+g^{\varkappa\mu}\Gamma^\alpha_{k\varkappa}\Pi_{\alpha,\,\mu i}+g^{\varkappa\mu}\Gamma^\alpha_{\mu i}\Pi_{\alpha,\,k\varkappa}-$$
$$-g^{\varkappa\mu}\Gamma^\alpha_{ki}\Pi_{\alpha,\mu\varkappa}-g^{\varkappa\mu}\Gamma^\alpha_{\mu\varkappa}\Pi_{\alpha,\,ki}-{}^1/_2\,g_{ik}g^{\varkappa\lambda}g^{\beta\mu}\Gamma^\alpha_{\mu\varkappa}\Pi_{\alpha,\,\lambda\beta}+$$
$$+{}^1/_2\,g_{ik}g^{\varkappa\lambda}g^{\beta\mu}\Gamma^\alpha_{\lambda\varkappa}\Pi_{\alpha,\,\mu\beta}-{}^1/_2\,g_{ik}g^{\varkappa\lambda}g^{\beta\mu}\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\Pi_{\alpha,\mu\varkappa}+{}^1/_2\,g_{ik}g^{\varkappa\lambda}g^{\beta\mu}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Pi_{\alpha,\,\lambda\varkappa}+$$
$$+2g^{\varkappa\mu}(\Gamma_{\alpha,\,ki}\Gamma_{\beta,\,\mu\varkappa}-\Gamma_{\alpha,\,k\varkappa}\Gamma_{\beta,\,\mu i})\,\varphi^{\alpha\beta}-g_{ik}g^{\varkappa\lambda}g^{\gamma\mu}\times$$
$$\times(\Gamma_{\alpha,\,\lambda\varkappa}\Gamma_{\beta,\,\mu\gamma}-\Gamma_{\alpha,\,\lambda\gamma}\Gamma_{\beta,\,\mu\varkappa})\,\varphi^{\alpha\beta}+2\varphi^{\varkappa\mu}R_{\varkappa ik\mu}-2g_{i\kappa}\varphi^{\varkappa\mu}R_{\varkappa\mu}+R\varphi_{ik}$$

$$\Pi_{r,\,\alpha\beta}=\frac{\partial\varphi_{r\alpha}}{\partial x^\beta}+\frac{\partial\varphi_{r\beta}}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial\varphi_{\alpha\beta}}{\partial x^r}$$

В теории упругой кристаллической среды отличие от нуля тензора кривизны $R_{ik\lambda\mu}$ и связанного с ним тензора $G_{ik}$ по существу характеризует ненулевую плотность дислокаций (см. [7]). Слагаемые $\Phi_{ik}$ в правой части уравнений для $G_{ik}$ можно трактовать как характеристику плотности «источников» дислокаций в рассматриваемой модели упруговязкой среды. Изучение тензора кривизны лежит несколько в стороне от содержания данной работы. Поэтому ограничимся сделанными сейчас краткими замечаниями.

Отметим еще, что дивергенция контравариантных составляющих тензора $G^{ik}$ равна нулю

$$\nabla_k G^{ik}=\frac{\partial}{\partial x^k}G^{ik}+\Gamma^i_{\alpha k}G^{\alpha k}+\Gamma^k_{\alpha k}G^{i\alpha}=0$$

(см. [10], стр. 624).

**3. Полная система уравнений, их преобразования и термодинамические тождества.** Выше были сформулированы соображения, которые приводят к системе дифференциальных уравнений, описывающих поведение сплошной среды с течением времени. Эта система состоит из десяти уравнений с десятью неизвестными функциями

$$\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{22},\ \varepsilon_{33},\ \varepsilon_{12},\ \varepsilon_{13},\ \varepsilon_{23},\ S,\ u_1,\ u_2,\ u_3$$

$$\frac{\partial\rho\,(E+{}^1/_2\,u_iu_i)}{\partial t}+\frac{\partial\,[\rho u_k\,(E+{}^1/_2\,u_iu_i)-u_i\sigma_{ik}]}{\partial x_k}=0 \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial\rho u_i}{\partial t}+\frac{\partial\,(\rho u_iu_k-\sigma_{ik})}{\partial x_k}=0 \qquad (i=1,\,2,\,3)$$

[1] В приводимых ниже формулах для $\Phi_{ik}$ использовались контравариантные составляющие $g^{ik}$ метрического тензора и отвечающие им символы Кристоффеля $\Gamma^\alpha_{\mu\varkappa}$.

$$\frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + 2\varepsilon_{i\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} = \varphi_{ii} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\frac{\partial 2\varepsilon_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial 2\varepsilon_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + 2\varepsilon_{i\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} + 2\varepsilon_{j\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} = 2\varphi_{ij}$$
$$(ij) = (12), (13), (23)$$

В систему не включены уравнение неразрывности и уравнение сохранения (возрастания) энтропии, так как они являются следствиями этой системы. Вывод уравнения неразрывности был описан в п. 2. Далее будет обсужден закон возрастания энтропии. Заметим еще, что в дальнейшем (см. п. 4) вместо законов сохранения импульса

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_k - \sigma_{ik})}{\partial x_k} = 0$$

придется включать в систему недивергентные уравнения Эйлера для скоростей

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$$

которые являются следствиями законов сохранения импульса и уравнения неразрывности

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_k - \sigma_{ik})}{\partial x_k} - u_i\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k}\right) = 0$$

а также вместо закона сохранения энтропии

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u_k}{\partial x_k} = 0$$

уравнение

$$\frac{dS}{dt} \equiv \frac{\partial S}{\partial t} + u_k \frac{\partial S}{\partial x_k} = 0$$

которое получается из предыдущего уравнения и уравнения неразрывности

$$\rho\frac{dS}{dt} = \left(\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u_k}{\partial x_k}\right) - S\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k}\right) = 0$$

Систему уравнений (3.1) можно записать в форме

$$\frac{\partial L_{q_i}}{\partial t} + \frac{\partial M^k_{q_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial H^k_{q_i}}{\partial x_k} + A^n \frac{\partial h^{kn}_{q_i}}{\partial x_k} + h^{kn}_{q_i}\frac{\partial A^n}{\partial x_k} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, i_0) \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial L_{r_j}}{\partial t} + \frac{\partial M^k_{r_j}}{\partial x_k} + \frac{\partial H^k_{r_j}}{\partial x_k} + A^n \frac{\partial h^{kn}_{r_j}}{\partial x_k} = f_j \quad (j = 1, 2, \ldots, j_0)$$

где $L$, $M^k$, $H^k$, $h^{kn}$ — некоторые производящие функции, а $A^n$, $f_j$ — произвольные функции от $q_1, \ldots, q_{i_0}, r_1, \ldots, r_{j_0}$, причем $H^k$, $h^{kn}$ — однородные функции. Характер их однородности должен быть таков, чтобы из него следовали тождества Эйлера:

$$q_i H^k_{q_i} + r_j H^k_{r_j} = H^k, \quad q_i h^{kn}_{q_i} = 0, \quad r_j h^{kn}_{r_j} = h^{kn} \tag{3.3}$$

Выбор переменных $q_i$, $r_j$ и производящих функций будет описан ниже, а сейчас укажем, что если первые $i_0$ уравнений системы (3.2) умножить на соответствующие $q_i$, а остальные $j_0$ уравнений — на соответствующие $r_j$ и сложить все уравнения, то, воспользовавшись условиями однородности (3.3), получим закон сохранения

$$\frac{\partial (q_i L_{q_i} + r_j L_{r_j} - L)}{\partial t} + \frac{\partial (q_i M^k_{q_i} + r_j M^k_{r_j} - M^k)}{\partial x_k} = r_j f_j$$

Переменные $q_i$, $r_j$, производящие функции $L$, $M^k$, $H^k$, $h^{kn}$ и функции $A^n$ для системы (3.1) имеют вид

$$q_0 = 1 / E_S, \qquad q_i = -u_i / E_S \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$r_1 = -\frac{1}{E_S}\left[\left(E - SE_S - \frac{u_i u_i}{2}\right)\rho_{\varepsilon_{11}} + \rho E_{\varepsilon_{11}}\right]$$

$$r_2 = -\frac{1}{E_S}\left[\left(E - SE_S - \frac{u_i u_i}{2}\right)\rho_{\varepsilon_{22}} + \rho E_{\varepsilon_{22}}\right]$$

$$r_3 = -\frac{1}{E_S}\left[\left(E - SE_S - \frac{u_i u_i}{2}\right)\rho_{\varepsilon_{33}} + \rho E_{\varepsilon_{33}}\right]$$

$$r_4 = -\frac{1}{E_S}\left[\left(E - SE_S - \frac{u_i u_i}{2}\right)\rho_{\varepsilon_{12}} + \rho E_{\varepsilon_{12}}\right]$$

$$r_5 = -\frac{1}{E_S}\left[\left(E - SE_S - \frac{u_i u_i}{2}\right)\rho_{\varepsilon_{13}} + \rho E_{\varepsilon_{13}}\right]$$

$$r_6 = -\frac{1}{E_S}\left[\left(E - SE_S - \frac{u_i u_i}{2}\right)\rho_{\varepsilon_{23}} + \rho E_{\varepsilon_{23}}\right]$$

$$L = -\frac{1}{2E_S}\left(E - SE_S - \frac{u_i u_i}{2}\right)(\rho + \rho_{\varepsilon_{11}} + \rho_{\varepsilon_{22}} + \rho_{\varepsilon_{33}}) - \frac{\rho}{E_S}\varepsilon_{ik} E_{\varepsilon_{ik}}$$

$$M^k = u_k L = -q_k q_0^{-1} L$$

$$H^1 = \frac{q_1 r_1 + q_2 r_4 + q_3 r_5}{q_0}, \quad H^2 = \frac{q_1 r_4 + q_2 r_5 + q_3 r_6}{q_0}, \quad H^3 = \frac{q_1 r_5 + q_2 r_6 + q_3 r_3}{q_0}$$

$$h^{11} = -\frac{q_1 r_1}{q_0}, \quad h^{12} = \frac{q_1 r_2 - 2q_2 r_4}{q_0}, \quad h^{13} = \frac{q_1 r_3 - 2q_3 r_5}{q_0}, \quad h^{14} = -\frac{q_2 r_1}{q_0}$$

$$h^{15} = -\frac{q_3 r_1}{q_0}, \quad h^{16} = \frac{q_1 r_6 - q_2 r_5 - q_3 r_4}{q_0}$$

$$h^{21} = \frac{q_2 r_1 - 2q_1 r_4}{q_0}, \quad h^{22} = -\frac{q_2 r_2}{q_0}, \quad h^{23} = \frac{q_2 r_3 - 2q_3 r_6}{q_0}, \quad h^{24} = -\frac{q_1 r_2}{q_0}$$

$$h^{25} = \frac{q_2 r_5 - q_1 r_6 - q_3 r_4}{q_0}, \quad h^{26} = -\frac{q_3 r_2}{q_0}$$

$$h^{31} = \frac{q_3 r_1 - 2q_1 r_5}{q_0}, \quad h^{32} = \frac{q_3 r_2 - 2q_2 r_6}{q_0}, \quad h^{33} = -\frac{q_3 r_3}{q_0}, \quad h^{34} = \frac{q_3 r_4 - q_1 r_6 - q_2 r_5}{q_0}$$

$$h^{35} = -\frac{q_1 r_3}{q_0}, \quad h^{36} = -\frac{q_2 r_3}{q_0}$$

$A^n = L_{r_n}$, т. е. $A^1 = \varepsilon_{11}$, $A^2 = \varepsilon_{22}$, $A^3 = \varepsilon_{33}$, $A^4 = 2\varepsilon_{12}$, $A^5 = 2\varepsilon_{13}$, $A^6 = 2\varepsilon_{23}$

$$f_1 = \varphi_{11}, \; f_2 = \varphi_{22}, \; f_3 = \varphi_{33}, \; f_4 = 2\varphi_{12}, \; f_5 = 2\varphi_{13}, \; f_6 = 2\varphi_{23}$$

(вид $\varphi_{ij}$ обсуждался в п. 2).

Закон сохранения после этого запишется так:

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u_k}{\partial x_k} = \frac{\rho}{E_S} Q$$

$$Q = -[E_{\varepsilon_{ij}}\varphi_{ij} + \rho^{-1}(E - SE_S - {}^1/{}_2\, u_k u_k)\rho_{\varepsilon_{ij}}\varphi_{ij}] = -E_{\varepsilon_{ij}}\varphi_{ij}$$

Здесь использовано равенство $\rho_{\varepsilon_{ij}}\varphi_{ij} = 0$, обеспечивающее выполнение уравнения неразрывности (см. п. 2).

Таким образом, указанная форма уравнений удобна для исследования термодинамических соотношений, а переменные $q_i$, $r_j$ представляют собой «интегрирующие множители», на которые надо умножать уравнения системы для получения закона сохранения (или возрастания, если $Q > 0$) энтропии. Аналогичные, правда, значительно более простые, формы систем уравнений математической физики рассматривались в работах [12–15]. В этих работах было показано, что из используемых там канонических форм записи уравнений следует гиперболичность систем по Фридрихсу.

Предпринятое приведение к такого рода «термодинамической» форме уравнений нелинейной тории упругости имело первоначально ту же самую цель — доказательство гиперболичности системы и получение оценок интегралов энергии для производных решений. Однако после того как такое приведение было выполнено, выяснилось, что в данном случае из формы (3.2) не следует автоматически симметрическая гиперболичность системы. Дело в том, что в силу разного характера однородности функций $h^{kn}$ по переменным $q_i$ и $r_j$ закон сохранения для системы имеет место, но матрицы

$$R^k = \begin{pmatrix} (M^k_{q_i q_m} + H^k_{q_i q_m} + A^n h^{kn}_{q_i q_m} + h^{kn}_{q_i} A^n_{q_m}) & (M^k_{q_i r_j} + H^k_{q_i r_j} + A^n h^{kn}_{q_i r_j} + h^{kn} A^n_{r_j}) \\ (M^k_{r_j q_i} + H^k_{r_j q_i} + A^n h^{kn}_{r_j q_i}) & (M^k_{r_j r_l} + H^k_{r_j r_l} + A^n h^{kn}_{r_j r_l}) \end{pmatrix}$$

в квазилинейном варианте записи системы (3.2)

$$\begin{pmatrix} L_{q_i q_m} & L_{q_i r_j} \\ L_{r_j q_i} & L_{r_j r_l} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} + R^k \frac{\partial}{\partial x_k}\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

не являются симметричными.

Этот результат привел к необходимости использовать для вычисления характеристик и приведения системы к симметрической гиперболической форме совсем другой метод, основанный на расширении исходной системы уравнениями, получающимися дифференцированием уравнений Эйлера для скоростей. Такая симметризация будет описана в п. 4, а сейчас исследуем, каким условиям должно удовлетворять уравнение состояния $E(a_1, a_2, a_3, S)$, чтобы релаксация касательных напряжений, описываемая принятой формой кельвиновских членов $\varphi_{ij}$, приводила к условию $Q > 0$, т. е. к закону возрастания энтропии.

В системе координат, оси которой направлены по главным осям тензора деформаций, имеем

$$E_{\varepsilon_{ii}} \equiv E_{\varepsilon_i} = a_i^3 E_{a_i}, \qquad E_{\varepsilon_{ij}} = 0 \qquad (i \neq j)$$

Поэтому в этой системе координат

$$Q = -E_{\varepsilon_{ij}}\varphi_{ij} = \frac{1}{\tau} E_{\varepsilon_i}\left[\varepsilon_i - \left(\frac{\varepsilon_1}{\tau_1}\rho_{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_2}{\tau_2}\rho_{\varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_3}{\tau_3}\rho_{\varepsilon_3}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{1}{\tau_1}\rho_{\varepsilon_1} + \frac{1}{\tau_2}\rho_{\varepsilon_2} + \frac{1}{\tau_3}\rho_{\varepsilon_3}\right)^{-1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\tau_1\tau_2}(a_1^2 - a_2^2)^2 \frac{a_1 E_{a_1} - a_2 E_{a_2}}{a_1^2 - a_2^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\tau_2\tau_3}(a_2^2 - a_3^2)^2 \frac{a_2 E_{a_2} - a_3 E_{a_3}}{a_2^2 - a_3^2} + \frac{1}{\tau_3\tau_1}(a_3^2 - a_1^2)^2 \frac{a_3 E_{a_3} - a_1 E_{a_1}}{a_3^2 - a_1^2}\right] \times$$
$$\times \left(\frac{a_1^2}{\tau_1} + \frac{a_2^2}{\tau_2} + \frac{a_3^2}{\tau_3}\right)^{-1}$$

Для положительности $Q$ достаточно потребовать выполнения неравенств

$$\frac{a_1E_{a_1}-a_2E_{a_2}}{a_1^2-a_2^2}>0,\qquad \frac{a_2E_{a_2}-a_3E_{a_3}}{a_2^2-a_3^2}>0,\qquad \frac{a_3E_{a_3}-a_1E_{a_1}}{a_3^2-a_1^2}>0$$

В п. 5 выяснится, что эти неравенства являются необходимым следствием гиперболичности рассматриваемой системы.

**4. Приведение системы к форме, содержащей вторые производные скоростей, и получение условий вещественности характеристик.** В качестве исходной для дальнейшего рассмотрения возьмем описанную ранее систему

$$\rho\frac{du_k}{dt}-\frac{\partial\sigma_{ki}}{\partial\varepsilon_{mn}}\frac{\partial\varepsilon_{mn}}{\partial x_i}-\frac{\partial\sigma_{ki}}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial x_i}=f_k \tag{4.1}$$

$$\frac{d\varepsilon_{mn}}{dt}=\frac{1}{2}\left[(\delta_{ml}-2\varepsilon_{ml})\,\delta_{jn}+(\delta_{nl}-2\varepsilon_{nl})\,\delta_{jm}\right]\frac{\partial u_l}{\partial x_j}+\varphi_{mn} \tag{4.2}$$

$$\frac{dS}{dt}=\varkappa=\frac{1}{E_S}Q \tag{4.3}$$

Применим к каждому из уравнений (4.1) оператор $d\,/\,dt$ и в результат подставим производные по $\partial\,/\,\partial x_i$, найденные из уравнений (4.2) и (4.3). Проделаем это приведение подробно.

Заметив, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}+u_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tag{4.4}$$

продифференцируем по $x_i$ уравнения (4.2) и (4.3)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{d\varepsilon_{mn}}{dt}=\frac{1}{2}\left[(\delta_{ml}-2\varepsilon_{ml})\,\delta_{jn}+(\delta_{nl}-2\varepsilon_{nl})\,\delta_{jm}\right]\frac{\partial^2u_l}{\partial x_i\,\partial x_j}-$$
$$-\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\left(\delta_{jn}\frac{\partial\varepsilon_{ml}}{\partial x_i}+\delta_{jm}\frac{\partial\varepsilon_{nl}}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial\varphi_{mn}}{\partial x_i} \tag{4.5}$$
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{dS}{dt}=\frac{\partial\varkappa}{\partial x_i}$$

Применим к уравнению (4.1) оператор $d\,/\,dt$, воспользуемся правилом коммутации (4.4) операторов $d\,/\,dt$ и $\partial\,/\,\partial x_i$

$$\rho\left(\frac{d}{dt}\right)^2u_k-\frac{\partial\sigma_{ki}}{\partial\varepsilon_{mn}}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{d\varepsilon_{mn}}{dt}-\frac{\partial\sigma_{ki}}{\partial S}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{dS}{dt}+$$
$$+\frac{\partial\sigma_{ki}}{\partial\varepsilon_{mn}}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\varepsilon_{mn}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial\sigma_{ki}}{\partial S}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x_\alpha}+\frac{du_k}{dt}\frac{d\rho}{dt}- \tag{4.6}$$
$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\sigma_{ki}}{\partial\varepsilon_{mn}}\right)\frac{\partial\varepsilon_{mn}}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\sigma_{ki}}{\partial S}\right)\frac{\partial S}{\partial x_i}=\frac{df_k}{dt}$$

и заменим второе и третье слагаемые на их выражения (4.5). Для упрощения записи введем также обозначения $a_{kl}^{ij}$ для следующего тензора:

$$a_{kl}^{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_{ki}}{\partial\varepsilon_{mn}}\left[(\delta_{ml}-2\varepsilon_{ml})\,\delta_{jn}+(\delta_{nl}-2\varepsilon_{nl})\,\delta_{jm}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}(\delta_{ml}-2\varepsilon_{ml})\frac{\partial\sigma_{ki}}{\partial\varepsilon_{mj}}+\frac{1}{2}(\delta_{nl}-2\varepsilon_{nl})\frac{\partial\sigma_{ki}}{\partial\varepsilon_{jn}}=$$
$$={}^1/_2\,\rho\,(\delta_{k\alpha}-2\varepsilon_{k\alpha})(\delta_{\beta l}-2\varepsilon_{\beta l})(E_{\varepsilon_{\alpha i}\varepsilon_{\beta j}}+E_{\varepsilon_{\alpha i}\varepsilon_{j\beta}})- \tag{4.7}$$
$$-\rho\delta_{lj}(\delta_{k\alpha}-2\varepsilon_{k\alpha})E_{\varepsilon_{\alpha i}}-\rho\delta_{kj}(\delta_{\alpha l}-2\varepsilon_{\alpha l})E_{\varepsilon_{\alpha i}}-\rho\,(\delta_{kl}-2\varepsilon_{kl})E_{\varepsilon_{ji}}$$

Пользуясь ортогональной системой координат, не различаем у тензоров ковариантных и контравариантных составляющих. Индексы $ij$ у тензора $a_{kl}^{ij}$ подняты только для того, чтобы отметить отличие их роли от роли индексов $kl$ в последующих формулах и сделать эти формулы удобными для чтения. Заметим теперь, что

$$\frac{1}{\rho} a_{kl}^{ij} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{\rho} a_{kl}^{ji} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{1}{2\rho} (a_{kl}^{ij} + a_{kl}^{ji}) \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j} = A_{kl}^{ij} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j}$$

Обозначим через $A_{kl}^{ij}$ симметризованный по $i$, $j$ тензор

$$A_{kl}^{ij} = (a_{kl}^{ij} + a_{kl}^{ji}) / 2\rho \tag{4.8}$$

В результате (4.6) перепишется так:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 u_k - A_{kl}^{ij} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial \varepsilon_{mn}} \left[ \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \left( \delta_{jn} \frac{\partial \varepsilon_{ml}}{\partial x_i} + \delta_{jm} \frac{\partial \varepsilon_{nl}}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial x_i} \right] -$$
$$- \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial S} \frac{\partial \varkappa}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial \varepsilon_{mn}} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial S} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial S}{\partial x_\alpha} -$$
$$- \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial \varepsilon_{mn}} \right) \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial S} \right) \frac{\partial S}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{df_k}{dt} + \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{du_k}{dt} \tag{4.9}$$

последнее слагаемое в правой части получено с помощью уравнения неразрывности

$$\delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{du_k}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \frac{du_k}{dt}$$

Выразим теперь коэффициенты $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial \varepsilon_{mn}}\right)$ и $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial S}\right)$ через $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\partial u_l / \partial x_j$ при помощи (4.2) и (4.3).

Заменив в изучаемой системе (4.1) — (4.3) уравнения (4.1) первого порядка для $u_k$ на полученные уравнения (4.9) второго порядка, приведем ее к следующему виду:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 u - A^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - B^i \frac{\partial v}{\partial x_i} = F \tag{4.10}$$
$$\frac{dv}{dt} = C^k \frac{\partial u}{\partial x_k} + \varphi$$

Здесь

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ S \end{pmatrix}$$

$A^{ij}$ — квадратные матрицы порядка $3 \times 3$

$$A^{ij} = A^{ij}(v) = \begin{pmatrix} A_{11}^{ij} & A_{12}^{ij} & A_{13}^{ij} \\ A_{21}^{ij} & A_{22}^{ij} & A_{23}^{ij} \\ A_{31}^{ij} & A_{32}^{ij} & A_{33}^{ij} \end{pmatrix}$$

$B^k$ — прямоугольные матрицы порядка $3\times 7$

$$B^k = B^k(v, \partial u / \partial x)$$

$C^k$ — прямоугольные матрицы порядка $7\times 3$

$$C^k = C^k(v)$$

В правой части системы стоят векторы $F$ и $\varphi$ размерностей 3 и 7 соответственно

$$F = F(v, du / dt, \partial u / \partial x), \qquad \varphi = \varphi(v)$$

Для матричных элементов $A_{kl}^{ij}$ из (4.7) и (4.8) получаем формулу, выражающую их через производные $E$ по компонентам тензора деформации

$$\begin{aligned} A_{kl}{}^{ij} = {}^1/_4(\delta_{k\alpha} - 2\varepsilon_{k\alpha})(\delta_{\beta l} - 2\varepsilon_{\beta l})(E_{\varepsilon_{\alpha i}\varepsilon_{\beta j}} + E_{\varepsilon_{\alpha i}\varepsilon_{j\beta}} + E_{\varepsilon_{\alpha j}\varepsilon_{\beta i}} + E_{\varepsilon_{\alpha j}\varepsilon_{i\beta}}) - \\ - {}^1/_2(\delta_{lj}E_{\varepsilon_{\alpha i}} + \delta_{li}E_{\varepsilon_{\alpha j}})(\delta_{k\alpha} - 2\varepsilon_{k\alpha}) - {}^1/_2(\delta_{kj}E_{\varepsilon_{\alpha i}} + \delta_{ki}E_{\varepsilon_{\alpha j}})(\delta_{l\alpha} - 2\varepsilon_{l\alpha}) - \\ - {}^1/_2(E_{\varepsilon_{ij}} + E_{\varepsilon_{ji}})(\delta_{kl} - 2\varepsilon_{kl}) \end{aligned} \tag{4.11}$$

Из этой формулы следуют соотношения симметрии:

$$A_{kl}{}^{ij} = A_{lk}{}^{ji} = A_{kl}{}^{ji}$$

При вычислении характеристик системы (4.10) надо иметь в виду, что в характеристическое уравнение должны входить только коэффициенты при старших производных, т. е. при вторых производных вектора $u$ и при первых производных вектора $v$. Обозначим через $I_p$ единичную матрицу порядка $p \times p$, а через $\Omega$ — выражение $\omega + u_i\xi_i$ ($\omega$, $\xi_i$ — компоненты волнового вектора или вектора нормали к характеристической поверхности). Уравнение характеристик имеет вид

$$\begin{vmatrix} \Omega^2 I_3 - \xi_i\xi_j A^{ij} - \xi_i B^i \\ 0 \qquad \Omega I_7 \end{vmatrix} = (\omega + u_i\xi_i)^7 \det \| (\omega + u_i\xi_i)^2 I_3 - A^{ij}\xi_i\xi_j \| = 0$$

Множитель $(\omega + u_i\xi_i)^7$ в характеристическом уравнении показывает, что линия тока является кратной характеристикой. Уравнение шестой степени

$$\det \| A^{ij}\xi_i\xi_j - (\omega + u_i\xi_i)^2 I_3 \| = 0$$

из-за симметричности матриц $A^{ij}$ имеет при любых фиксированных $\xi_k$ вещественные корни $(\omega + u_i\xi_i)^2$.

Отсюда видно, что для гиперболичности системы, т. е. для вещественности корней $\omega$, необходимо, чтобы при всех $\xi_k$ ($\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \neq 0$) матрица третьего порядка $A^{ij}\xi_i\xi_j$ была положительно определенной.

В дальнейшем приведем различные формулы для вычисления элементов $A_{kl}^{ij}$ в системе координат, связанной с главными осями тензора деформаций (п. 5), и покажем, как система (4.10) может быть приведена к симметрической гиперболической по Фридрихсу системе уравнений первого порядка (п. 6).

5. **Вычисление элементов матрицы $A_{kl}^{ij}$ в главных осях тензора деформаций.** Покажем, что в главных осях тензора деформаций матрица $A = \| A_{ij} \|$ имеет следующий вид:

$$\| A^{ij} \| = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} L_1 & 0 & 0 & 0 & {}^1/_2 N_3 & 0 & 0 & 0 & {}^1/_2 N_2 \\ 0 & e^{2d_1} M_3 & 0 & {}^1/_2 N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2d_1} M_2 & 0 & 0 & 0 & {}^1/_2 N_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & {}^1/_2 N_3 & 0 & e^{2d_2} M_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1/_2 N_3 & 0 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & 0 & {}^1/_2 N_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2d_2} M_1 & 0 & {}^1/_2 N_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & {}^1/_2 N_2 & 0 & 0 & 0 & e^{2d_3} M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^1/_2 N_1 & 0 & e^{2d_3} M_1 & 0 \\ {}^1/_2 N_2 & 0 & 0 & 0 & {}^1/_2 N_1 & 0 & 0 & 0 & L_3 \end{array}\right)$$

где

$$L_1 = a_1^2 E_{a_1 a_1}, \qquad M_1 = (a_1 a_2 a_3)^{2/3} \frac{a_2 E_{a_2} - a_3 E_{a_3}}{a_2^2 - a_3^2}$$

$$N_1 = a_2 a_3 \left[ E_{a_2 a_3} - \frac{a_2 E_{a_3} - a_3 E_{a_2}}{a_2^2 - a_3^2} \right] \tag{5.1}$$

Формулы для остальных $L_i$, $M_i$, $N_i$ получаются из (5.1) циклической заменой индексов. Через параметры $\rho$, $D$, $\Delta$, $d_i$ коэффициенты $L_1$, $M_1$, $N_1$ выражаются так:

$$\begin{gathered} L_1 = 2\rho E_\rho + \rho^2 E_{\rho\rho} + ({}^2/_3 - d_1) E_D + {}^1/_3 (2d_1 - D - 3d_2 d_3) E_\Delta + \\ + d_1^2 E_{DD} + (\Delta / d_1 + D / 3)^2 E_{\Delta\Delta} - 2\rho d_1 E_{\rho D} - \\ - 2\rho (\Delta / d_1 + D / 3) E_{\rho\Delta} + 2 (\Delta + d_1 D / 3) E_{D\Delta} \\ M_1 = \frac{2 (d_2 - d_3)}{e^{2d_2} - e^{2d_3}} \frac{E_D - d_1 E_\Delta}{2} \\ N_1 = 2\rho E_\rho + \rho^2 E_{\rho\rho} - {}^1/_3 E_D + {}^1/_3 (2d_1 - D) E_\Delta + \Delta d_1^{-1} E_{DD} + \\ + \left( d_1 \Delta - \frac{D\Delta}{9d_1} - \frac{2d_1^2}{9} D \right) E_{\Delta\Delta} + d_1 \rho E_{\rho D} + \rho \left( \frac{\Delta}{d_1} + \frac{D}{3} \right) E_{\rho\Delta} + \\ + \left( \frac{2}{3} d_1 D - \Delta \right) E_{D\Delta} - \frac{d_2 e^{2d_3} - d_3 e^{2d_2}}{e^{2d_3} - e^{2d_2}} E_D - \frac{d_3 e^{2d_3} - d_2 e^{2d_2}}{e^{2d_3} - e^{2d_2}} d_1 E_\Delta \end{gathered} \tag{5.2}$$

Характеристическое уравнение в главных осях принимает вид

$$0 =$$

$$= \begin{vmatrix} L_1 \xi_1^2 + e^{2d_2} M_3 \xi_2^2 + e^{2d_3} M_2 \xi_3^2 - \Omega^2 & N_3 \xi_1 \xi_2 & N_2 \xi_1 \xi_3 \\ N_3 \xi_2 \xi_1 & e^{2d_1} M_3 \xi_1^2 + L_2 \xi_2^2 + e^{2d_3} M_1 \xi_3^2 - \Omega^2 & N_1 \xi_2 \xi_3 \\ N_2 \xi_3 \xi_1 & N_1 \xi_3 \xi_2 & e^{2d_1} M_2 \xi_1^2 + e^{2d_2} M_1 \xi_2^2 + L_3 \xi_3^2 - \Omega^2 \end{vmatrix}$$

Напомним, что $\Omega = \omega + u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3$.

Условие гиперболичности системы требует положительной определенности матрицы, корнями которой являются $\Omega^2$. В частности, при любых, не равных одновременно нулю, $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ сумма $L_1 \xi_1^2 + e^{2d_2} M_3 \xi_2^2 + e^{2d_3} M_2 \xi_3^2$ должна быть положительна, т. е. для гиперболичности необходима положительность $L_1$, $M_2$, $M_3$. Напомним, что в п. 3 неравенства

$$\frac{a_2E_{a_2}-a_3E_{a_3}}{a_2^2-a_3^2}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3}M_1>0,\qquad \frac{a_3E_{a_3}-a_1E_{a_1}}{a_3^2-a_1^2}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3}M_2>0$$

$$\frac{a_1E_{a_1}-a_2E_{a_2}}{a_1^2-a_2^2}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3}M_3>0$$

обеспечивали выполнение закона возрастания энтропии при релаксации касательных напряжений. В случае линейной теории упругости предполагается, что деформации малы, т. е. во всяком случае $d_1$, $d_2$, $d_3$ можно считать малыми ($e^{2d_i}\approx 1$, $\rho\approx\rho_0$), а уравнение состояния задается в форме

$$\rho_0E={}^1/_2\lambda(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})^2+\mu(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji})=(\lambda/2+\mu/3)(\varepsilon_1+$$
$$+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2+\mu[(\varepsilon_1-{}^1/_3(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3))^2+(\varepsilon_2-{}^1/_3(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3))^2+$$
$$+(\varepsilon_3-{}^1/_3(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3))^2]\approx(\lambda/2+\mu/3)(1-\rho/\rho_0)^2+2\mu D$$

При этом получается, что

$$L_1=L_2=L_3=(\lambda+2\mu)/\rho_0,\qquad M_1=M_2=M_3=\mu/\rho_0$$
$$N_1=N_2=N_3=(\lambda+\mu)/\rho_0$$

и характеристическое уравнение выглядит так:

$$\left[\Omega^2-\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)\right]\left[\Omega^2-\frac{\mu}{\rho_0}(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)\right]\times$$
$$\times\left[\Omega^2-\frac{\mu}{\rho_0}(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)\right]^2=0$$

Это известная форма характеристического уравнения линейной теории упругости.

Теперь приступим к вычислению матриц $A^{ij}$, т. е. к получению формул (5.1). Из формул (4.11) п. 4 следует, что для вычисления $A_{kl}^{ij}$ достаточно уметь вычислять первые и вторые производные от $E$ по компонентам тензора деформаций $E_{\varepsilon_{ij}}$, $E_{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}}$.

Будем вычислять производные в главных осях тензора деформаций, т. е. при $\varepsilon_{ij}=0$ $(i\neq j)$, $\varepsilon_{ii}=\varepsilon_{ii}^\circ$. Пусть $\varepsilon_i$ — корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix}\varepsilon_{11}-\varepsilon & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}-\varepsilon & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}-\varepsilon\end{vmatrix}=-(\varepsilon-\varepsilon_1)(\varepsilon-\varepsilon_2)(\varepsilon-\varepsilon_3)=0$$

Будем предполагать, что среди диагональных элементов $\varepsilon_{11}^\circ$, $\varepsilon_{22}^\circ$, $\varepsilon_{33}^\circ$ нет совпадающих. В дальнейшем это ограничение может быть снято непрерывным продолжением формул для $A_{kl}^{ij}$ на случай той или иной кратности. Разложим $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ по степеням $\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}^\circ$ $(i\neq j)$

$$\varepsilon_i=\varepsilon_{ii}^\circ+(\varepsilon_{ii}-\varepsilon_{ii}^\circ)+\sum_{p\neq q,\,r\neq s}\alpha_{pqrs}^i\varepsilon_{pq}\varepsilon_{rs}+\ldots=\varepsilon_{ii}+\delta_i$$

Для вычисления $\alpha_{pqrs}^1$ подставляем это разложение в характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}-\delta_1 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}-\varepsilon_{11}-\delta_1 & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}-\varepsilon_{11}-\delta_1\end{vmatrix}=$$
$$=-\delta_1(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{11})(\varepsilon_{33}-\varepsilon_{11})-(\varepsilon_{33}-\varepsilon_{11})\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}-(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{11})\varepsilon_{13}\varepsilon_{31}+\ldots=0$$

Величина $\delta_i$ второго порядка малости, а порядок малости отброшенных членов четвертый.

Отсюда

$$\delta_1 = -\frac{\varepsilon_{12}\,\varepsilon_{21}}{\varepsilon_{22}-\varepsilon_{11}} - \frac{\varepsilon_{13}\,\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}-\varepsilon_{11}} + \ldots = -\frac{\varepsilon_{12}\,\varepsilon_{21}}{\varepsilon_{22}^{\circ}-\varepsilon_{11}^{\circ}} - \frac{\varepsilon_{13}\,\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}^{\circ}-\varepsilon_{11}^{\circ}} + \ldots$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} - \frac{\varepsilon_{12}\,\varepsilon_{21}}{\varepsilon_{22}^{\circ}-\varepsilon_{11}^{\circ}} - \frac{\varepsilon_{13}\,\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}^{\circ}-\varepsilon_{11}^{\circ}}$$

и, далее

$$\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\varepsilon_{11}} = 1, \qquad \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\varepsilon_{pq}} = 0$$

если одновременно не выполнено условие $p=1,\ q=1$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_1}{(\partial\varepsilon_{ij})^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\varepsilon_1}{\partial\varepsilon_{23}\partial\varepsilon_{32}} = 0, \quad \frac{\partial^2\varepsilon_1}{\partial\varepsilon_{12}\,\partial\varepsilon_{21}} = \frac{1}{\varepsilon_{11}^{\circ}-\varepsilon_{22}^{\circ}} = \frac{1}{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_1}{\partial\varepsilon_{13}\,\partial\varepsilon_{31}} = \frac{1}{\varepsilon_{11}^{\circ}-\varepsilon_{33}^{\circ}} = \frac{1}{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$$

Все остальные производные вычисляются по аналогичным формулам, получающимся циклической перестановкой индексов.

В итоге имеем

$$E_{\varepsilon_{pq}} = E_{\varepsilon_i}\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\varepsilon_{pq}}$$

$$E_{\varepsilon_{pq}\varepsilon_{rs}} = E_{\varepsilon_i}\frac{\partial^2\varepsilon_i}{\partial\varepsilon_{pq}\,\partial\varepsilon_{rs}} + E_{\varepsilon_i\varepsilon_j}\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\varepsilon_{pq}}\,\frac{\partial\varepsilon_j}{\partial\varepsilon_{rs}}$$

$$E_{\varepsilon_{ii}} = E_{\varepsilon_i}, \qquad E_{\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj}} = E_{\varepsilon_i\varepsilon_j}$$

$$E_{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}} = \frac{E_{\varepsilon_i}-E_{\varepsilon_j}}{\varepsilon_i-\varepsilon_j} \qquad (i \neq j)$$

а все остальные производные равны нулю.

Рассмотрим параметризацию

$$E = E(a_1, a_2, a_3, S) = E\left(\frac{1}{\sqrt{1-2\varepsilon_1}}, \frac{1}{\sqrt{1-2\varepsilon_2}}, \frac{1}{\sqrt{1-2\varepsilon_3}}, S\right)$$

В терминах $a_i$ производные пишутся так:

$$\begin{gathered} E_{\varepsilon_{ii}} = a_i^3 E_{a_i}, \qquad E_{\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj}} = a_i^3 a_j^3 E_{a_i a_j} \\ E_{\varepsilon_{ii}\varepsilon_{ii}} = a_i^6 E_{a_i a_i} + 3a_i^5 E_{a_i} \\ E_{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}} = 2a_i^2 a_j^2\,\frac{a_i^3 E_{a_i} - a_j^3 E_{a_j}}{a_j^2 - a_i^2}\ (i \neq j) \end{gathered} \tag{5.3}$$

а все остальные производные равны нулю.

Использование (5.3) в формулах (4.11) приводит к формулам (5.1) для $A_{kl}^{ij}$ в выбранной системе координат. Получение формул (5.2) из (5.1) — элементарное, хотя и громоздкое упражнение на замену переменных. На нем останавливаться не будем.

**6. Симметрическая система уравнений первого порядка.** В п. 4 показано, каким образом уравнения теории упругости могут быть приведены к форме (4.10).

Эта же система может быть переписана так:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 u - (A^{ij} + X^{ij})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - B^i\frac{\partial v}{\partial x_i} = F$$

$$\frac{dv}{dt} = C^k\frac{\partial u}{\partial x_k} + \varphi$$

В этой записи введены вполне произвольные кососимметрические ($X^{ij} = -X^{ji} = -X^{ij*}$) матрицы, конкретные выражения для которых будут указаны впоследствии.

Введем новые переменные

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du_1/dt \\ du_2/dt \\ du_3/dt \end{pmatrix}, \qquad q_j = \begin{pmatrix} q_{1j} \\ q_{2j} \\ q_{3j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial u_1/\partial x_j \\ \partial u_2/\partial x_j \\ \partial u_3/\partial x_j \end{pmatrix}$$

и перепишем с их помощью уравнения в виде системы первого порядка

$$du/dt = w$$

$$\frac{dw}{dt} - (A^{ij} + X^{ij})\frac{\partial q_j}{\partial x_i} - B^i\frac{\partial v}{\partial x_i} = F$$

$$\frac{dq_j}{dt} - \frac{\partial w}{\partial x_j} = -q_{\alpha j}q_\alpha \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$dv/dt = \psi$$

Удобно вместо нее рассмотреть систему, получающуюся заменой уравнений, которые стоят в последних двух строчках, их линейными комбинациями

$$du/dt = w$$

$$\frac{dw}{dt} - (A^{ij} + X^{ij})\frac{\partial q_j}{\partial x_i} - B^i\frac{\partial v}{\partial x_i} = F$$

$$(A^{ji} + X^{ji})\frac{dq_i}{dt} + B^j\frac{dv}{dt} - (A^{ji} + X^{ji})\frac{\partial w}{\partial x_i} = \Phi_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$B^{k*}\frac{dq_k}{dt} + P\frac{dv}{dt} - B^{k*}\frac{\partial w}{\partial x_k} = \Psi$$

В последнее уравнение введена еще одна произвольная матрица $P$, ее выбор будет также описан в дальнейшем. Если ввести вектор неизвестных функций

$$U = \begin{pmatrix} u \\ w \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ v \end{pmatrix}$$

то последнюю систему можно записать в следующем симметричном виде:

$$\begin{pmatrix} I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^{11} & A^{12}+X^{12} & A^{13}+X^{13} & B^1 \\ 0 & 0 & A^{21}+X^{21} & A^{22} & A^{23}+X^{23} & B^2 \\ 0 & 0 & A^{31}+X^{31} & A^{32}+X^{32} & A^{33} & B^3 \\ 0 & 0 & B^{1*} & B^{2*} & B^{3*} & P \end{pmatrix}\frac{dU}{dt} + \tag{6.1}$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A^{i1}-X^{i1} & -A^{i2}-X^{i2} & -A^{i3}-X^{i3} & -B^i \\ 0 & -A^{1i}-X^{1i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A^{2i}-X^{2i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A^{3i}-X^{3i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B^{i*} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial U}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} w \\ F \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Psi \end{pmatrix}$$

Чтобы эта система оказалась симметрической $t$-гиперболической по Фридрихсу, нужно выбрать $X^{ij}$, $P$ так, чтобы вся матрица, являющаяся коэффициентом при $dU \,/\, dt$, была положительно определенной. Нетрудно показать, что если матрица

$$\begin{pmatrix} A^{11} & A^{12}+X^{22} & B^{13}+X^{13} \\ A^{21}+X^{21} & A^{22} & A^{23}+X^{23} \\ A^{31}+X^{31} & A^{32}+X^{32} & A^{33} \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

положительно определена, то выбором «достаточно большой» матрицы $P$ (т. е. положительно определенной $P$ с достаточно большим наименьшим собственным значением) можно добиться положительной определенности всей интересующей нас матрицы. В качестве $X^{ij}$ выберем

$$X_{kl}{}^{ij} = \begin{cases} A_{kl}{}^{ij}, & \text{если } k > l, \ i < j \\ 0\,, & \text{если } k = l, \ i \neq j \\ -A_{kl}{}^{ij}, & \text{если } k < l, \ i < j \end{cases}$$
$$X_{kl}{}^{ii} = 0$$

При таком выборе $X^{ij}$ матрица (6.2) в системе координат, оси которой направлены по главным осям тензора деформаций, выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_2 \\ 0 & e^{2d_1}M_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2d_1}M_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2d_2}M_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_3 & 0 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & 0 & N_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2d_2}M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2d_3}M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2d_3}M_1 & 0 \\ N_2 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & L_3 \end{pmatrix}$$

Условия ее положительной определенности таковы:

$$M_1 > 0, \qquad M_2 > 0, \qquad M_3 > 0 \tag{6.3}$$
$$L_1 > 0, \qquad L_1L_2 - N_3^2 > 0, \qquad \begin{vmatrix} L_1 & N_3 & N_2 \\ N_3 & L_2 & N_1 \\ N_2 & N_1 & L_3 \end{vmatrix} > 0$$

и представляют собой ограничения на уравнение состояния

$$E = E\,(\rho, D, \Delta, S)$$

Интересно отметить, что эти ограничения более жесткие, чем условия гиперболичности системы (4.10), и, конечно, зависят от конкретного выбора $X^{ij}$.

Как уже отмечалось (см. п. 5), в случае линейной теории упругости

$$L_1 = L_2 = L_3 = (\lambda + 2\,\mu) \,/\, \rho_0$$
$$M_1 = M_2 = M_3 = \mu \,/\, \rho_0$$
$$N_1 = N_2 = N_3 = (\lambda + \mu) \,/\, \rho_0$$

Условия положительной определенности (6.3) при этом сводятся к неравенствам

$$\mu > 0, \ \lambda > -4/3\,\mu$$

тогда как условия гиперболичности

$$\mu > 0, \ \lambda > -2\,\mu$$

В книге [16] отмечается, что, как правило, для всех упругих сред

$$\mu > 0, \quad \lambda > 0$$

Отметим, что корни характеристического определителя системы (6.1)

$$\begin{vmatrix} \Omega I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega I_3 & -(A^{i1}+X^{i1})\xi_i & -(A^{i2}+X^{i2})\xi_i & -(A^{i3}+X^{i3})\xi_i & -B^i\xi_i \\ 0 & -(A^{1i}+X^{1i})\xi_i & \Omega(A^{11}+X^{11}) & \Omega(A^{12}+X^{12}) & \Omega(A^{13}+X^{13}) & \Omega B^1 \\ 0 & -(A^{2i}+X^{2i})\xi_i & \Omega(A^{21}+X^{21}) & \Omega(A^{22}+X^{22}) & \Omega(A^{23}+X^{23}) & \Omega B^2 \\ 0 & -(A^{3i}+X^{3i})\xi_i & \Omega(A^{31}+X^{31}) & \Omega(A^{32}+X^{32}) & \Omega(A^{33}+X^{33}) & \Omega B^3 \\ 0 & -B^{i*}\xi_i & \Omega B^{1*} & \Omega B^{2*} & \Omega B^{3*} & \Omega P \end{vmatrix} =$$

$$= \Omega^{16} \det \| \Omega^2 I_3 - \xi_i \xi_j A^{ij} \| \det \begin{pmatrix} A^{11}+X^{11} & A^{12}+X^{12} & A^{13}+X^{13} & B^1 \\ A^{21}+X^{21} & A^{22}+X^{22} & A^{23}+X^{23} & B^2 \\ A^{31}+X^{31} & A^{32}+X^{32} & A^{33}+X^{33} & B^3 \\ B^{1*} & B^{2*} & B^{3*} & P \end{pmatrix}$$

не зависят от матриц $X^{ij}$, $B^i$, $P$.

Поступила 21 IV 1972

## ЛИТЕРАТУРА


1. Руткевич И. М. О распространении малых возмущений в вязко-упругой жидкости. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1, стр. 41—56.
2. Murnaghan F. D. Finite deformation of an elastic solid. Amer. J. Math., 1937, vol. 59, No. 2, pp. 235—260.
3. Кутилин Д. И. Теория конечных деформаций. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
4. Гольденблат И. И. Нелинейные проблемы теории упругости, М., «Наука», 1969.
5. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1970.
6. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
7. Косевич А. М. Дислокации и точечные дефекты. Упругое и диффузионное взаимодействие. В сб. «Материалы школы по теории дефектов в кристаллах и радиационных нарушений. Телави ГрузССР, 11—28 октября 1965», Тбилиси, 1966.
8. Уилкинс М. Л. Расчет упруго-пластических течений. В сб. «Вычислительные методы в гидродинамике», М., «Мир», 1967.
9. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., Изд-во АН СССР, 1961.
10. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., «Наука», 1967.
11. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
12. Годунов С. К. Интересный класс квазилинейных систем. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 3, стр. 521—523.
13. Годунов С. К. Проблема обобщенного решения в теории квазилинейных уравнений и в газовой динамике. Усп. матем. н., 1962, т. 17, вып. 3, стр. 147—158.
14. Friedrichs K. O., Lax P. D. Systems of conservation equations with a convex extension. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1971, vol. 68, No. 8, pp. 1686—1688.
15. Годунов С. К. Симметрическая форма уравнений магнитной гидродинамики. Численные методы механики сплошной среды. ВЦ СО АН СССР, 1972, т. 3, № 1, стр. 26—34.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 7. Теория упругости. М., «Наука», 1965.