

УДК 539.370

## АНАЛИЗ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ФАЗОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В ПЛАСТИНАХ И ОБОЛОЧКАХ

Л. И. Шкутин

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск  
E-mail: shkutin@icm.krasn.ru

Задача об осесимметричной деформации оболочки в интервале прямого фазового превращения сформулирована приближенно как нелинейная краевая задача термоупругости с неявной зависимостью от температуры (через фазовый параметр, имитирующий объемную долю кристаллов новой фазы). Приведены результаты численного анализа задач о выпучивании круговой пластины и пологого сферического купола из NiTi-сплава (никелид титана) под действием нормального давления в интервале прямого фазового превращения. В зависимости от параметра нагрузки и фазового параметра построены ветви выпученных форм равновесия. С ростом фазового параметра наблюдается стремительный рост прогибов при фиксированном параметре нагрузки. Показана эволюция форм выпучивания и распределения фазовых деформаций по меридиональной координате.

**Ключевые слова:** сплавы с памятью формы, фазовые превращения, фазовые деформации, пластины, оболочки, выпучивание, численный анализ.

Уникальные механические свойства сплава с памятью формы обусловлены его термоупругими фазовыми превращениями [1]. Охлаждение нагруженного образца в интервале фазового превращения вызывает фазовую деформацию, девиатор которой при фиксированной температуре пропорционален девиатору внутреннего напряжения [2]. При последующем нагревании образца через интервал обратного превращения ранее приобретенная фазовая деформация частично или полностью исчезает (эффект памяти формы). Металлические сплавы, испытывающие фазовые превращения при термоциклировании, применяются в основном для изготовления термочувствительных конструктивных элементов. В тонкостенных элементах из таких сплавов наиболее ярко проявляется эффект памяти формы.

К настоящему времени достигнуты определенные успехи в построении математических уравнений, моделирующих эффекты фазовых превращений и памяти формы. В данной работе используются микромеханические определяющие соотношения, предложенные и обоснованные в [2, 3]. В работе [4] эти уравнения используются при решении линейной задачи устойчивости прямоугольной пластины в интервале прямого превращения. Анализ нелинейных задач о плоских фазовых деформациях стержней и пластин выполнен в [5]. Решения нелинейных осесимметричных задач, рассматриваемых ниже, получены в рамках кинематической модели оболочки с независимыми поворотами поперечных волокон [6].

**Механические уравнения осесимметричной деформации оболочки.** Рассмотрим оболочку с осесимметричной базовой поверхностью  $A$ . Пусть  $(r, t_2, z)$  — цилиндрическая система координат, относительно которой происходит движение материальных то-

чек деформируемой оболочки,  $\mathbf{i}_J$  — ортонормированный базис этой системы. Локальная система координат  $t_J$  с ортонормированным базисом  $\mathbf{e}_J^0(t_1, t_2)$  связывается с базовой поверхностью оболочки. Параметр  $t_1 \in [0, 1]$  отсчитывается вдоль меридиана,  $t_2 \in [0, 2\pi]$  — вдоль параллели,  $t_3 \in [-1, +1]$  — вдоль нормали к поверхности. Здесь и ниже прописные латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, строчные — 1, 2, запятая перед индексом означает частную производную по соответствующей координате.

В недеформированном состоянии меридиан базовой поверхности задан параметрическими уравнениями

$$r = la_2(t), \quad z = la_3(t) \quad \forall t \in [0, 1], \quad (1)$$

где  $l$  — длина меридиана;  $a_2, a_3$  — известные функции параметра  $t = t_1$ . Ортонормированные базисы  $\mathbf{i}_J$  и  $\mathbf{e}_J^0$  могут быть связаны друг с другом ортогональным преобразованием  $\mathbf{e}_J^0 = \mathbf{i}_J \cdot O^0$  с тензором-ротатором  $O^0(t)$ , компоненты которого в обоих базисах задаются ортогональной матрицей

$$O_{JK}^0 = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & 0 & \sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где  $\theta_0(t)$  — угол поворота базиса  $\mathbf{e}_J^0$  относительно вектора  $\mathbf{e}_2^0 = \mathbf{i}_2$ . По определению справедливости зависимости  $a_{2,1} = \cos \theta_0, a_{3,1} = -\sin \theta_0$ .

Изучается осесимметричная деформация купола, при которой базовая поверхность остается осесимметричной и уравнение ее меридиана записывается, подобно (1), в параметрическом виде

$$r = ly_2(t), \quad z = ly_3(t) \quad \forall t \in [0, 1], \quad (3)$$

где  $y_2, y_3$  — искомые функции произвольной точки  $t$ .

Ортогональным преобразованием  $\mathbf{e}_J = \mathbf{i}_J \cdot O = \mathbf{e}_J^0 \cdot \overline{O^0} \cdot O$  с тензором-ротатором  $O(t)$  введем локальный ортонормированный базис  $\mathbf{e}_J(t)$ , вращающийся в процессе деформации ( $\overline{O^0}$  — тензор, сопряженный с  $O^0$ ). Компоненты ротатора  $O$  в базисах  $\mathbf{i}_J$  и  $\mathbf{e}_J$  определяются матрицей вида (2):

$$O_{JK} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Здесь  $\theta = \theta_0 + \vartheta$  — угол поворота базиса  $\mathbf{e}_J$  относительно вектора  $\mathbf{i}_2$ ;  $\vartheta(t)$  — приращение угла поворота вследствие деформации. В начальном состоянии  $\vartheta = 0$  и базис  $\mathbf{e}_J$  совпадает с  $\mathbf{e}_J^0$ . Локальный поворот, представленный матрицей (4), имеет только одну степень свободы — угол поворота  $\theta$  или  $\vartheta = \theta - \theta_0$ .

Для анализа осесимметричных деформаций используются механические уравнения нелинейной модели оболочки с независимыми полями конечных перемещений и поворотов [6, 7]. Исходная система уравнений включает кинематические зависимости

$$\begin{aligned} y_2' &= (1 + u_{11}) \cos \theta + u_{13} \sin \theta, & y_3' &= -(1 + u_{11}) \sin \theta + u_{13} \cos \theta, \\ u_{22} &= a_2^{-1}(y_2 - a_2), & v_{11} &= (\theta - \theta_0)', & v_{22} &= a_2^{-1}(\sin \theta - \sin \theta_0) \end{aligned} \quad (5)$$

и динамические (статические) уравнения

$$\begin{aligned} (a_2 T_1)' - T_{22} + a_2 P_1 &= 0, & (a_2 T_3)' + a_2 P_3 &= 0, \\ (a_2 M_{11})' - M_{22} \cos \theta - a_2 T_{13} + a_2 Q_2 &= 0, \\ T_{11} = T_1 \cos \theta - T_3 \sin \theta, & T_{13} = T_1 \sin \theta + T_3 \cos \theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $u_{iJ}(t)$ ,  $v_{ii}(t)$ ,  $T_{iJ}(t)$ ,  $M_{ii}(t)$  — компоненты метрических и изгибных деформаций, усилий и моментов в повернутом базисе;  $T_1(t)$ ,  $T_3(t)$ ,  $P_1(t)$ ,  $P_3(t)$ ,  $Q_2(t)$  — компоненты усилий, внешних поверхностных сил и моментов в цилиндрическом базисе; штрих обозначает производную по  $t$ .

**Микромеханические определяющие соотношения.** Объемное поле осесимметричных деформаций оболочки измеряется векторами  $\mathbf{w}_1 = w_{11}\mathbf{e}_1 + w_{13}\mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{w}_2 = w_{22}\mathbf{e}_2$ , а поле напряжений — векторами  $\mathbf{s}_1 = S_{11}\mathbf{e}_1 + S_{13}\mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{s}_2 = S_{22}\mathbf{e}_2$ , где  $S_{11}$ ,  $S_{22}$  — нормальные напряжения растяжения-сжатия;  $S_{13}$  — поперечное касательное напряжение.

Для того чтобы установить связь между деформациями и напряжениями в интервале прямого фазового превращения, используем систему “несвязных” [4] микромеханических определяющих соотношений

$$\begin{aligned} w_{11} &= \varphi_{11} + \frac{S_{11} - \nu S_{22}}{E}, & w_{22} &= \varphi_{22} + \frac{S_{22} - \nu S_{11}}{E}, & w_{13} &= \varphi_{13} + \frac{S_{13}}{G}, \\ \frac{d\varphi_{11}}{dq} &= \varkappa_0 \varphi_{11} + \frac{2S_{11} - S_{22}}{3\sigma_0}, & \frac{d\varphi_{22}}{dq} &= \varkappa_0 \varphi_{22} + \frac{2S_{22} - S_{11}}{3\sigma_0}, & \frac{d\varphi_{13}}{dq} &= \varkappa_0 \varphi_{13} + \frac{S_{13}}{\sigma_0}, \quad (7) \\ q &= \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{T_+ - T}{T_+ - T_-}\right), & T_- &\leq T \leq T_+, & 0 &\leq q \leq 1. \end{aligned}$$

Здесь  $w_{iJ}$ ,  $\varphi_{iJ}$  — полные и фазовые деформации;  $E$ ,  $G$  — модули упругого растяжения-сжатия и сдвига;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\varkappa_0$ ,  $\sigma_0$  — экспериментальные константы сплава в интервале прямого превращения;  $T_+$ ,  $T_-$  — температуры начала и завершения прямого превращения;  $T$  — текущая температура;  $q$  — внутренний параметр состояния, трактуемый как объемная доля мартенситной фазы. В приведенных соотношениях не учитываются термическая деформация сплава и объемный эффект фазового превращения, поэтому  $\varphi_{iJ}$  являются также компонентами девиатора фазовых деформаций. Дополнительно полагаем, что фазовое превращение представляет собой температурный процесс с равномерным распределением температуры по объему образца, поэтому параметр  $q$  не зависит от координат.

Из (7) следует, что фазовые деформации определяются дифференциальными (по параметру  $q$ ) уравнениями. Первые слагаемые их правых частей ответственны за развитие (рост) кристаллов мартенсита, вторые — за зарождение и ориентацию кристаллов в направлении действующих напряжений. Присутствующие в (7) модули упругости сплава не остаются постоянными в интервале фазового превращения, а изменяются от их значений в аустените до значений в мартенсите. Учитывая смысл параметра  $q$ , эти модули можно представить в интервале фазового превращения в виде осредненных по Фойгту зависимостей

$$E = qE_- + (1 - q)E_+, \quad \nu = q\nu_- + (1 - q)\nu_+, \quad G = E/(2 + 2\nu),$$

где нижний индекс “−” соответствует мартенситной фазе, “+” — аустенитной фазе.

Полагая, что напряжения зависят от параметра  $q$  значительно слабее, чем фазовые деформации, найдем приближенное решение дифференциальных уравнений (7)

$$\varphi_{11} \simeq \eta \frac{2S_{11} - S_{22}}{3\sigma_0 \varkappa_0}, \quad \varphi_{22} \simeq \eta \frac{2S_{22} - S_{11}}{3\sigma_0 \varkappa_0}, \quad \varphi_{13} \simeq \eta \frac{S_{13}}{\sigma_0 \varkappa_0}, \quad \eta(q) = \exp(\varkappa_0 q) - 1. \quad (8)$$

Это решение удовлетворяет физическим условиям: фазовые деформации отсутствуют в аустените (при  $q = 0$ ) и достигают максимальных значений в мартенсите (при  $q = 1$ ).

Подставляя функции (8) в первые три уравнения системы (7), получим приближенные определяющие соотношения

$$\begin{aligned} E_0 w_{11} &\simeq \eta_1 S_{11} - \eta_2 S_{22}, & E_0 w_{22} &\simeq \eta_1 S_{22} - \eta_2 S_{11}, & E_0 w_{13} &\simeq \eta_3 S_{13}, \\ \eta_1(q) &\equiv \frac{E_0}{E} + \eta \frac{2E_0}{3\sigma_0 \kappa_0}, & \eta_2(q) &\equiv \nu \frac{E_0}{E} + \eta \frac{E_0}{3\sigma_0 \kappa_0}, & \eta_3(q) &\equiv \frac{E_0}{G} + \eta \frac{E_0}{\sigma_0 \kappa_0}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $E_0$  — константа с размерностью напряжения, которую удобно отождествить с одной из констант  $E_-, E_+$ .

Уравнения (9) представляют фазовое превращение как термоупругую деформацию с неявной зависимостью от температуры (через параметр  $q$ ).

В соответствии с принятой моделью оболочки имеем

$$w_{11} \simeq u_{11} + hl^{-1}t_3v_{11}, \quad w_{22} \simeq u_{22} + hl^{-1}t_3v_{22}, \quad w_{13} \simeq u_{13} \quad \forall t_3 \in [-1, +1]$$

( $2h$  — толщина оболочки). Подставляя эти значения в (9) и интегрируя по толщине, получаем результирующие (моментные) определяющие соотношения

$$\begin{aligned} C_0 u_{11} &\simeq \eta_1 T_{11} - \eta_2 T_{22}, & C_0 u_{22} &\simeq \eta_1 T_{22} - \eta_2 T_{11}, & C_0 u_{13} &\simeq \eta_3 T_{13}, \\ l^{-1} H_0 v_{11} &\simeq \eta_1 M_{11} - \eta_2 M_{22}, & l^{-1} H_0 v_{22} &\simeq \eta_1 M_{22} - \eta_2 M_{11}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $C_0 = 2hE_0$ ,  $H_0 = 2h^3E_0/3$  — параметры жесткости. При записи полной системы уравнений соотношения (10) удобно представить в виде

$$\begin{aligned} u_{11} &\simeq (1 - \gamma^2)\eta_1 T_{11} C_0^{-1} - \gamma u_{22}, & u_{13} &\simeq \eta_3 T_{13} C_0^{-1}, \\ v_{11} &\simeq (1 - \gamma^2)\eta_1 M_{11} l H_0^{-1} - \gamma v_{22}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$T_{22} \simeq \gamma T_{11} + C_0 \eta_1^{-1} u_{11}, \quad M_{22} \simeq \gamma M_{11} + H_0 l^{-1} \eta_1^{-1} v_{11}, \quad \gamma = \eta_2 \eta_1^{-1}.$$

**Безразмерная формулировка замкнутой системы уравнений.** Уравнения (5), (6) и (11) образуют замкнутую систему одномерных нелинейных уравнений, решение которой зависит от параметра  $q$ . Эта система может быть представлена в безразмерном виде

$$\begin{aligned} y'_0 &= a_2^{-1}[(1 - \gamma^2)\eta_1 y_1 - \gamma(\sin y_0 - \sin \theta_0)] + \theta'_0, \\ y'_1 &= a_2^{-1}[\gamma y_1 + \eta_1^{-1}(\sin y_0 - \sin \theta_0)] \cos y_0 + \varepsilon^{-1} f_3 - a_2 q_2, \\ y'_2 &= a_2^{-1} \varepsilon \eta_3 f_3 \sin y_0 + (1 + \varepsilon f_1) \cos y_0, \\ y'_3 &= a_2^{-1} \varepsilon \eta_3 f_3 \cos y_0 - (1 + \varepsilon f_1) \sin y_0, \\ y'_4 &= a_2^{-1}[\gamma f_2 + \varepsilon^{-1} \eta_1^{-1}(y_2 - a_2)] - a_2 p_1, & y'_5 &= -a_2 p_3, \\ f_1 &\equiv a_2^{-1}[(1 - \gamma^2)\eta_1 f_2 - \varepsilon^{-1} \gamma(y_2 - a_2)], \\ f_2 &\equiv y_4 \cos y_0 - y_5 \sin y_0, & f_3 &\equiv y_4 \sin y_0 + y_5 \cos y_0 \end{aligned} \quad (12)$$

относительно неизвестных функций

$$y_0 = \theta, \quad y_1 = \frac{a_2 M_{11} l}{H_0}, \quad y_2 = \frac{r}{l}, \quad y_3 = \frac{z}{l}, \quad y_4 = \frac{a_2 T_1}{\varepsilon C_0}, \quad y_5 = \frac{a_2 T_3}{\varepsilon C_0}.$$

В систему (12) входят параметры состояния сплава  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \gamma = \eta_2/\eta_1$ , параметры внешних нагрузок  $p_1 = P_1 l / (\varepsilon C_0)$ ,  $p_3 = P_3 l / (\varepsilon C_0)$ ,  $q_2 = Q_2 l^2 / H_0$  и геометрический параметр оболочки  $\varepsilon^2 = h^2 / (3l^2)$ .

Граничные условия для системы (12) формулируются в конкретных задачах. При численном интегрировании системы ее решения отыскиваются для дискретных значений параметра  $q$  в интервале  $0 \leq q \leq 1$ . Последнее равенство в (7) связывает параметр  $q$  с температурой сплава.

Представленные ниже решения краевых задач получены для стержней и пластин, изготовленных из сплава NiTi (никелид титана) со следующими экспериментальными значениями параметров термоупругого мартенситного превращения [3]:  $T_- = 25$  °C,  $T_+ = 50$  °C,  $E_- = 28$  ГПа,  $E_+ = 84$  ГПа,  $E_0 = E_+$ ,  $\sigma_0 = 0,049E_+$ ,  $\kappa_0 = 0,718$ ,  $\nu_- = 0,48$ ,  $\nu_+ = 0,33$ .

**Выпучивание пластины под действием равномерного давления.** Рассматривается шарнирная круговая пластина, нагруженная в аустенитной фазе равномерным нормальным давлением интенсивности  $P$ . Исходная форма базовой поверхности (1) задается параметрами  $\theta_0 = 0$ ,  $z = 0$ ,  $r = lt$ , причем  $l$  — радиус ее опорного контура.

Изучается осесимметричная деформация пластины (3) в интервале фазового превращения. Компоненты поверхностной нагрузки в системе (12) задаются функциями  $p_1 = p \sin y_0$ ,  $p_3 = p \cos y_0$ ,  $q_2 = 0$ , где  $p = Pl/(\varepsilon C_0)$  — численный параметр давления. Граничные условия на опорном контуре выражаются равенствами

$$y_1(1) = 0, \quad y_2(1) = 1, \quad y_3(1) = 0. \quad (13)$$

В полюсе пластины должны выполняться условия

$$T_{13}(0) = 0, \quad T_{11}(0) - T_{22}(0) = 0, \quad M_{11}(0) - M_{22}(0) = 0, \quad (14)$$

сформулированные через основные неизвестные функции [7, 8].

Результаты численного решения нелинейной краевой задачи (12)–(14), полученного методом стрельбы с использованием пакета Mathcad [7], представлены на рис. 1 ( $w$  — отношение максимального прогиба к радиусу, выраженное в процентах). Точки соответствуют эволюции параметра состояния  $w$  в интервале фазового превращения при фиксированном значении параметра давления и растущем параметре  $q$ : в аустенитной фазе пластина была нагружена давлением  $p = 0,01$ , а затем подвержена охлаждению через интервал фазового превращения.

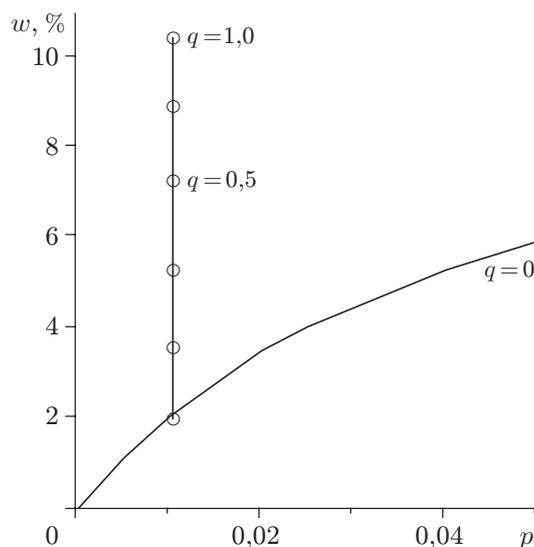


Рис. 1. Результаты численного решения задачи о деформировании круговой пластины, нагруженной равномерным давлением, при  $\varepsilon = 0,025$ : сплошная линия — равновесные состояния в аустенитной фазе при изменении параметра  $p$ ; точки — эволюция параметра состояния  $w$  при  $p = 0,01$

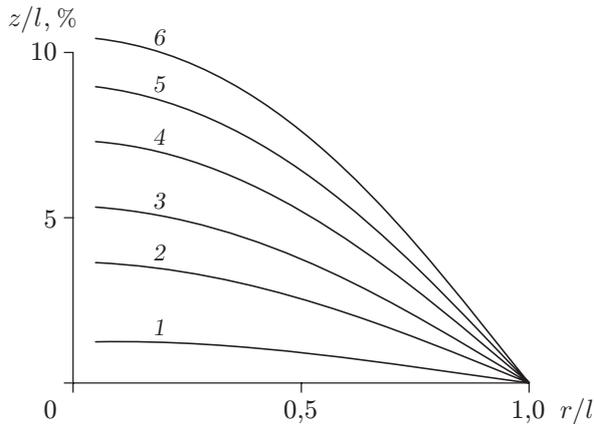


Рис. 2

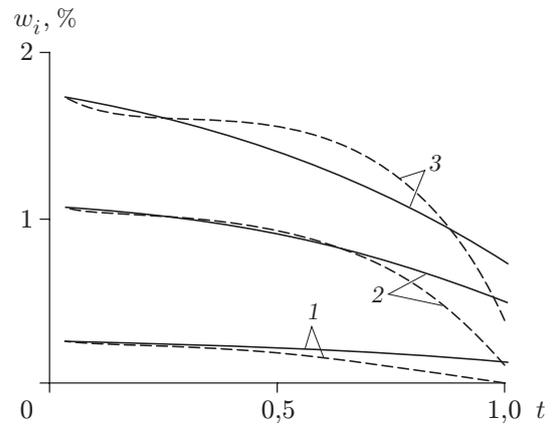


Рис. 3

Рис. 2. Формы выпучивания круговой пластины при  $p = 0,01$  и различных значениях параметра  $q$ :

1 —  $q = 0$ ; 2 —  $q = 0,1$ ; 3 —  $q = 0,25$ ; 4 —  $q = 0,5$ ; 5 —  $q = 0,75$ ; 6 —  $q = 1$

Рис. 3. Эволюция фазовых деформаций на верхней поверхности круговой пластины при  $p = 0,01$  и различных значениях  $q$ :

сплошные линии — окружные деформации; штриховые — радиальные деформации;

1 —  $q = 0$ ; 2 —  $q = 0,5$ ; 3 —  $q = 1$

Таблица 1

| $q$  | $w, \%$ | $\vartheta(1)$ | $\tau_i(0)$ | $\mu_i(0)$ | $w_i(0), \%$ | $w_3(1), \%$ | $s_i(0)$ | $s_3(1)$ |
|------|---------|----------------|-------------|------------|--------------|--------------|----------|----------|
| 0    | 2,03    | 0,0305         | 1,55        | 7,48       | 0,2428       | 0,0311       | 14,500   | 0,4677   |
| 0,10 | 3,61    | 0,0538         | 2,22        | 6,32       | 0,4633       | 0,0518       | 13,170   | 0,4144   |
| 0,25 | 5,28    | 0,0794         | 2,51        | 4,89       | 0,7197       | 0,0786       | 10,980   | 0,3543   |
| 0,50 | 7,28    | 0,1116         | 2,51        | 3,49       | 1,0667       | 0,1205       | 8,560    | 0,2924   |
| 0,75 | 8,91    | 0,1389         | 2,39        | 2,70       | 1,3890       | 0,1647       | 7,056    | 0,2529   |
| 1,00 | 10,40   | 0,1649         | 2,24        | 2,18       | 1,7313       | 0,2166       | 6,016    | 0,2237   |

Формы выпучивания (формы меридиана) пластины при различных значениях параметра  $q$  показаны на рис. 2. На рис. 3 представлена эволюция фазовых деформаций на верхней (свободной) поверхности пластины при различных значениях параметра  $q$ . Видно, что максимальные значения радиальных и окружных деформаций достигаются в полюсе и не превышают 2 %.

В табл. 1 приведены более подробные данные об эволюции фазовых деформаций пластины при  $p = 0,01$ . Для ряда значений параметра  $q$  указаны граничные значения прогиба  $w$ , угла поворота  $\vartheta$ , деформаций  $w_i = w_{ii}$ ,  $w_3 = w_{i3}$ , параметров внутренних усилий  $\tau_i = 100T_{ii}/(\varepsilon C_0)$ , внутренних моментов  $\mu_i = 100M_{ii}l/H_0$  и напряжений  $s_i = 100S_{ii}/(\varepsilon E_0)$ ,  $s_3 = 100S_{i3}/(\varepsilon E_0)$ . Тангенциальные компоненты тензоров деформаций и напряжений достигают наибольших значений в полюсе пластины, а поперечные (на порядок меньшие) — на опорном контуре. Из табл. 1 следует, что в зависимости от параметра  $q$  фазовые деформации изменяются значительно быстрее, чем напряжения. Этот результат не противоречит исходному предположению о слабой зависимости напряжений от параметра  $q$ .

**Выпучивание сферического купола под действием равномерного давления.** Исходная форма меридиана купола (1) задается параметрами

$$\theta_0 = \alpha t, \quad a_2 = \alpha^{-1} \sin \theta_0, \quad a_3 = \alpha^{-1} (\cos \theta_0 - \cos \alpha),$$

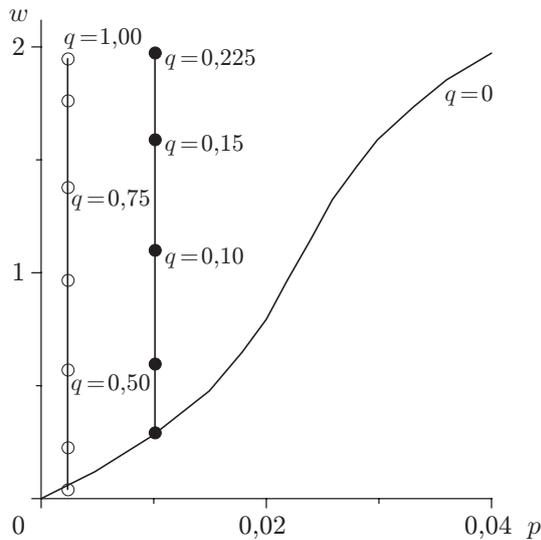


Рис. 4

Рис. 4. Результаты численного решения задачи о деформировании сферического купола, нагруженного равномерным давлением, при  $\varepsilon = 0,025$ :

сплошная линия — равновесные состояния в аустенитной фазе при изменении параметра  $p$ ; точки — эволюция параметра состояния  $w$  при фиксированном параметре  $p$  (светлые точки —  $p = 0,002$ ; темные точки —  $p = 0,01$ )

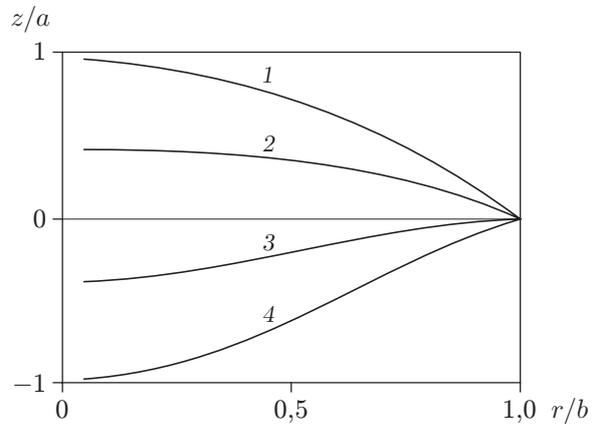


Рис. 5

Рис. 5. Формы выпучивания сферического купола при  $p = 0,002$  и различных значениях  $q$ :

1 —  $q = 0,1$ ; 2 —  $q = 0,5$ ; 3 —  $q = 0,75$ ; 4 —  $q = 1$

где  $\alpha$  — угол наклона меридиана в опорной точке. Условия шарнирного опирания купола формулируются равенствами вида (13), причем  $y_2(1) = \alpha^{-1} \sin \alpha$ . Условия (14) остаются неизменными. На рис. 4 представлены результаты численного решения этой задачи при  $\varepsilon = 0,025$  ( $w$  — отношение максимального прогиба к начальной высоте купола).

Формы выпучивания купола при  $p = 0,002$  и различных значениях параметра  $q$  показаны на рис. 5. Ордината  $z$  отнесена к высоте  $a$ , абсцисса  $r$  — к радиусу  $b$  опорного контура. Кривая 1 ( $q = 0,1$ ) практически совпадает с начальной формой меридиана, а кривая 4 ( $q = 1$ ) соответствует вывернутому состоянию купола. Выворачивание купола происходит без скачка, поскольку зависимость  $w(q)$  является монотонно возрастающей (подобно зависимости  $w(p)$ ).

На рис. 6 представлена эволюция фазовых деформаций на верхней (нагруженной) поверхности купола при различных значениях параметра  $q$ . На нем показано распределение меридиональных (штриховые линии) и окружных (сплошные линии) деформаций по координате  $t$ . Видно, что максимальные значения меридиональных и окружных деформаций достигаются в полюсе и не превышают 1 %.

В табл. 2 приведены более подробные данные об эволюции фазовых деформаций купола при  $p = 0,002$ . Для ряда значений параметра  $q$  приведены абсолютные граничные значения прогиба  $w$ , угла поворота  $\vartheta$ , деформаций  $w_i$ , параметров внутренних усилий  $\tau_i$ , внутренних моментов  $\mu_i$  и напряжений  $s_i$ . Как и в задаче о пластине, тангенциальные компоненты тензоров деформаций и напряжений достигают наибольших значений в полюсе, поперечные (на порядок меньшие) — на опорном контуре, при этом в зависимости от параметра  $q$  фазовые деформации изменяются значительно быстрее, чем напряжения.

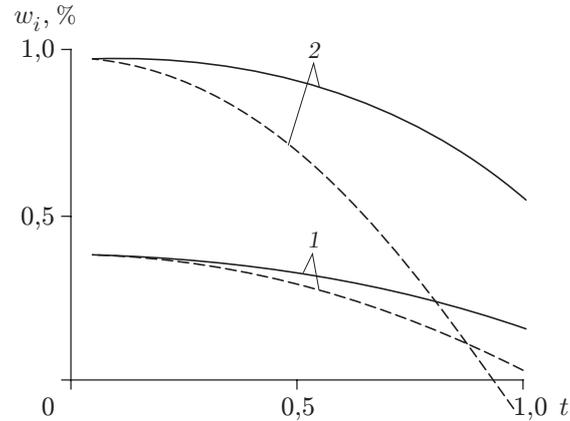


Рис. 6. Эволюция фазовых деформаций на верхней поверхности сферического купола при  $p = 0,002$  и различных значениях  $q$ :

сплошные линии — окружные деформации; штриховые — меридиональные деформации; 1 —  $q = 0,5$ ; 2 —  $q = 1$

Таблица 2

| $q$  | $w$    | $\vartheta(1)$ | $\tau_i(0)$ | $\mu_i(0)$ | $w_i(0), \%$ | $w_3(1), \%$ | $s_i(0)$ | $s_3(1)$ |
|------|--------|----------------|-------------|------------|--------------|--------------|----------|----------|
| 0    | 0,0514 | 0,0034         | 0,7314      | 0,8090     | 0,0357       | 0,0037       | 2,133    | 0,0557   |
| 0,10 | 0,1156 | 0,0075         | 0,7227      | 0,8832     | 0,0792       | 0,0071       | 2,252    | 0,0565   |
| 0,25 | 0,2374 | 0,0152         | 0,7333      | 0,9860     | 0,1600       | 0,0132       | 2,441    | 0,0595   |
| 0,50 | 0,5814 | 0,0365         | 0,7570      | 1,2976     | 0,3744       | 0,0288       | 3,005    | 0,0700   |
| 0,75 | 1,3976 | 0,0869         | 0,5137      | 2,0046     | 0,7846       | 0,0649       | 3,986    | 0,0997   |
| 1,00 | 1,9554 | 0,1233         | 0,0781      | 1,8824     | 0,9609       | 0,1006       | 3,338    | 0,1039   |

**Заключение.** Полученные решения следует рассматривать как приближенные, в которых пренебрегается скоростями изменения межфазных напряжений по сравнению со скоростями фазовых деформаций в температурном интервале фазового превращения. Обоснованием такого решения можно считать наличие “площадок текучести” на экспериментальных кривых зависимостей напряжений от фазовых деформаций.

Предложенная в работе формулировка уравнений позволяет приближенно ставить и решать сильнонелинейные осесимметричные задачи о фазовых деформациях в тонких оболочках и пластинах при иных нагрузках и граничных условиях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Курдюмов Г. В., Хандрос Л. Г. О “термоупругом” равновесии и мартенситных превращениях // Докл. АН СССР. 1949. Т. 66, № 2. С. 211–214.
2. Мовчан А. А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы // Пробл. машиностроения и надежности машин. 1994. № 6. С. 47–53.
3. Мовчан А. А. Учет переменности упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1998. № 1. С. 79–90.
4. Мовчан А. А., Сильченко Л. Г. Об устойчивости пластины из сплава с памятью формы при прямом термоупругом фазовом превращении // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68, № 1. С. 83–90.
5. Шкутин Л. И. Анализ плоских фазовых деформаций стержней и пластин // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 2. С. 156–164.

- 
6. **Шкутин Л. И.** Инкрементальная модель деформации оболочки // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 5. С. 202–207.
  7. **Шкутин Л. И.** Численный анализ осесимметричных форм выпучивания конических оболочек // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 6. С. 159–165.
  8. **Шкутин Л. И.** Численный анализ осесимметричных форм выпучивания пластин при радиальном сжатии // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 1. С. 107–114.

*Поступила в редакцию 20/II 2006 г.,  
в окончательном варианте — 24/V 2006 г.*

---