

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ НА ОГРАНИЧЕННОМ УЧАСТКЕ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

УДК 535.5

В. П. Житников

Уфимский государственный авиационный технический университет,
450000 Уфа

Исследованию течений несжимаемой жидкости посвящены многие работы. Например, в [1] в линейном приближении решена задача о течении несжимаемой жидкости через уступ. Установлена закономерность изменения амплитуды волн за уступом. Нелинейная задача этого вида исследована в [2]. Особый интерес имеет вывод о том, что при симметричной форме уступа свободная поверхность потока также симметрична. Численно-аналитическое решение задач о волнах, возникающих за ступенью на дне и за вихрем под поверхностью, проведено в [3].

Задача об истечении несжимаемой жидкости из-под щита решена с помощью методов малого параметра [4] и в линейном приближении [5]. Найдено точное решение, и исследовано его асимптотическое поведение. Определены длины волн и их фаза на достаточном удалении от точки отрыва.

В отличие от указанных выше задач, при кавитационном обтекании препятствий свободная граница состоит, как правило, из двух участков конечной длины. Однако в работах [6–8], посвященных исследованию кавитационных течений несжимаемой жидкости, не было обнаружено решений волнового вида. Тем не менее возможность существования таких решений на свободной поверхности, ограниченной по длине, не может быть исключена.

Известно, что задача о течении капиллярной жидкости, как и несжимаемой, допускает решения типа поверхностных волн. Такие решения на ограниченной поверхности были получены численно в [9]. Ниже на основе такой же методики проведено исследование одной из задач о течении несжимаемой жидкости с ограниченным участком свободной поверхности. Кроме того, для волн с малой амплитудой проведено сравнение с решением линейной задачи, что позволило подтвердить достоверность полученных результатов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о течении полуограниченного потока идеальной невязкой несжимаемой несжимаемой жидкости вдоль стенки, состоящей из частей DA и BD' (расположенных под углом друг к другу) со щелью AB ширины $2l$ между ними (рис. 1, а). На границе DA угол наклона вектора скорости жидкости к оси x $\theta = \theta_A = \beta\pi$, на BD' $\theta = -\theta_A$. Параметры свободной поверхности жидкости ACB связаны интегралом Бернулли, который при постоянном давлении над поверхностью имеет вид

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 + \frac{2}{Fr} \frac{y}{l} = \text{const}, \quad Fr = \frac{v_0^2}{gl}, \quad (1.1)$$

где v — модуль вектора скорости жидкости; v_0 — его значение, например, в точке A ; g — ускорение свободного падения, направленное вертикально вниз; y — ордината точки свободной поверхности; Fr — число Фруда.

Решение задачи проводится с помощью метода Леви-Чивита. Для этого область течения конформно отображается на верхнюю полуплоскость ζ с выброшенным полукругом

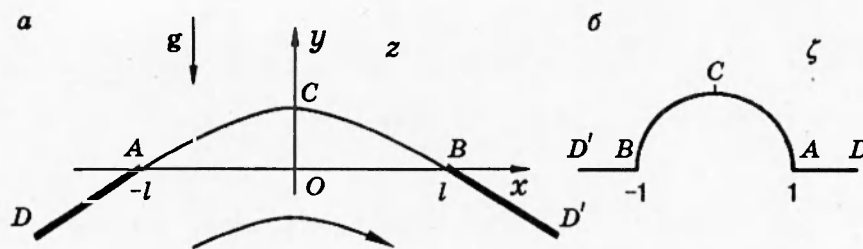


Рис. 1

единичного радиуса (рис. 1, б). Тогда комплексный потенциал

$$W = \varphi + i\psi = -\frac{a}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) \quad (1.2)$$

(a — положительная постоянная).

Рассмотрим функцию Жуковского $\omega = i \ln \frac{1}{v_0} \frac{dW}{dz} = \theta + i\tau$, где θ — угол между вектором скорости и осью x , $\tau = \ln(v/v_0)$. Подставив θ и τ в (1.1) и продифференцировав полученное выражение при $\zeta = e^{i\sigma}$ ($0 \leq \sigma \leq \pi$) по $ds = (1/v)d\varphi = (a/v) \sin \sigma d\sigma$ (s — дуговая абсцисса, отсчитываемая от точки A), получим дифференциальное уравнение равновесия свободной поверхности весомой жидкости:

$$c_3 \frac{d\tau}{d\sigma} + \alpha \sin \theta \cdot \sin \sigma = 0, \quad \alpha = \frac{vg}{v_0^3} = \frac{a}{Fr v_0 l}. \quad (1.3)$$

2. Построение решения. Симметричное относительно вертикальной оси решение задачи, удовлетворяющее граничным условиям, ищется в виде функции

$$z = -b \left[\zeta + \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} \zeta^{-(2m+1)} \right] \zeta^{-2\beta} e^{i\beta\pi} + iR \quad (2.1)$$

(b, R, c_{2m+1} — действительные постоянные).

Предполагая непрерывное изменение угла $\theta(s)$ при переходе от стенки к свободной поверхности, необходимо потребовать, чтобы вблизи точек A и B выполнялось условие $z = O(\zeta \pm 1)^2$. Это справедливо, если производная

$$\frac{dz}{d\zeta} = - \left[(1 - 2\beta)\zeta - \sum_{m=0}^{\infty} (2m + 1 + 2\beta)c_{2m+1} \zeta^{-(2m+1)} \right] \zeta^{-2\beta-1} e^{i\beta\pi}$$

равна нулю при $\zeta = \pm 1$. Следовательно, коэффициенты c_{2m+1} должны удовлетворять уравнению

$$(1 - 2\beta) - \sum_{m=0}^{\infty} (2m + 1 + 2\beta)c_{2m+1} = 0. \quad (2.2)$$

Функция Жуковского для данной задачи может быть представлена формулой

$$\begin{aligned} \omega(\zeta) = \beta\pi + i2\beta \ln \zeta - i \ln \left[(1 - 2\beta) - \frac{1}{\zeta} \sum_{m=0}^{\infty} (2m + 1 + 2\beta)c_{2m+1} \zeta^{-(2m+1)} \right] + \\ + i \ln \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta} + \omega_0(\zeta) + iR_1 = \beta\pi + i2\beta \ln \zeta - i \ln \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} d_{2m} \zeta^{-2m} \right] + \omega_0(\zeta) + iR_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

(в последнем выражении учтено условие (2.2)). Функция $\omega_0(\zeta)$ используется для выделения

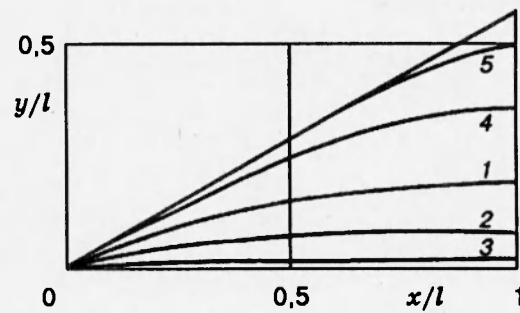


Рис. 2

особенностей решения в различных предельных случаях. В основном случае (при гладкой свободной границе) $\omega_0(\zeta) = 0$. Действительные константы R_1 и R_2 выбираются из условия равенства нулю функции $\tau(\zeta) = \ln(v/v_0)$ в условленной точке (здесь — в точке A).

3. Численное решение. Задача решается численно методом коллокаций аналогично [9]. При этом искомыми являются коэффициенты c_{2m+1} ($m = \overline{0, N}$) в сумме (2.1), которые определяются из условия (1.1) или (1.3), заданного на дискретном множестве точек $\zeta = e^{i\sigma_m}$, $\sigma_m = \pi m / (2N)$. Значение Fr задается в некотором диапазоне, границы которого зависят от β .

При $Fr = \infty$ решение отвечает течению невесомой жидкости. Точное решение для этого случая получается, если положить в (2.3)

$$c_1 = \frac{1 + 2\beta}{2(1 - 2\beta)}, \quad c_{2m+1} = 0, \quad m = 1, \dots, \infty. \quad (3.1)$$

Формы свободной поверхности для $\beta = 1/6$ приведены на рис. 2. Решение, соответствующее $Fr = \infty$, показано кривой 1. Кривые 2, 3 отвечают $1/Fr = -8$ и -128 (вектор силы тяжести при $Fr < 0$ направлен вверх). При $1/Fr \rightarrow -\infty$ точки свободной поверхности приближаются к прямой $y = 0$. В пределе течение представляет собой обтекание полигона, составленного стенками DA , BD' и горизонтальным отрезком AB .

Для решений с $Fr > 0$ (кривые 4 и 5 соответствуют $1/Fr = 0,9$ и $0,89$) также существует предельное решение, при приближении к которому высота точки C и кривизна свободной поверхности в этой точке растут. В пределе кривизна становится бесконечной, и на свободной поверхности образуется излом со скачком угла $\Delta\theta = -\pi/3$ (аналогично периодической волне Стокса).

Формы свободной поверхности для $\beta = 0$ приведены на рис. 3. В этом случае для всех чисел Фруда (в том числе и для $Fr \leq 0$) возможно тривиальное решение, однако при $Fr > 0$ существуют и другие. В частности, конфигурации, аналогичные рассмотренным выше для $\beta = 1/6$, изображены в нижней части рисунка (кривые 1, 2 отвечают $1/Fr = 1,575$; 2). При уменьшении числа Фруда ординаты точек свободной поверхности уменьшаются и при $1/Fr = 2,7509$ решение вырождается в тривиальное. Тем не менее при дальнейшем уменьшении Fr рассматриваемая ветвь решения продолжается, при этом ординаты точек поверхности становятся отрицательными (кривые 3–5 рассчитаны для $1/Fr = 3$; 6; 50). При $Fr \rightarrow 0$ (имеется в виду, что скорость в точке A стремится к нулю) в точке A появляется излом линии тока со скачком угла $\Delta\theta = -\pi/3$ (кривая 6).

4. Предельные случаи. Для расчета рассмотренных выше предельных конфигураций типа волны Стокса и других необходимо изменить вид функции $\omega_0(\zeta)$, чтобы учесть

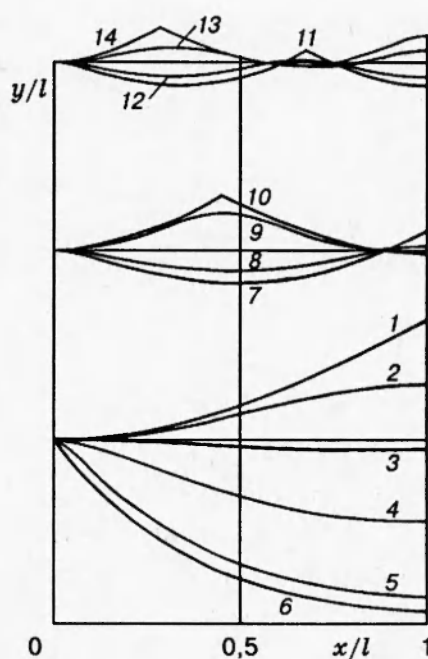


Рис. 3

возникающие особенности (изломы) на свободной поверхности. Так, функция Жуковского предельного решения первого типа с изломом поверхности в точке C (рис. 3, кривые 1, 7) ищется в виде (2.3), где

$$\omega_0(\zeta) = \frac{i}{3} \ln \frac{\zeta^2 + 1}{2\zeta^2}. \quad (4.1)$$

Отметим, что для $\beta = 1/6$ при подстановке (4.1) в (2.3) получается точное решение, если положить $d_{2m} = 0$ ($m \geq 1$):

$$\omega = \frac{\pi}{6} + \frac{i}{3} \ln \frac{\zeta^2 + 1}{2\zeta}.$$

Это решение представляет собой обтекание угла. Подставляя его в (1.3), найдем, что $\alpha = 2/3$, тогда $Fr = 2/\sqrt{3}$. Для $\beta \neq 1/6$ задача решается численно, при этом параметр α (или Fr) включается в число искомых.

На рис. 4 приведены зависимости ординаты точки C от числа, обратного числу Фруда ($1/Fr$) для различных типов решений при разных β (кривые 1-7 для $\beta = 0; 1/200; 1/24; 1/12; -1/200; -1/24; -1/6$). Предельное решение типа (4.1) показано точками I .

Предельное решение второго типа с изломом линии тока в точках A и B (рис. 3, кривая 6) можно получить, если положить

$$\omega_0(\zeta) = i \frac{2}{3} \ln \frac{\zeta^2 - 1}{2\zeta^2}. \quad (4.2)$$

В данном случае в качестве v_0 можно взять любую точку, где скорость не равна нулю, например точку C . На рис. 4 решениям типа (4.2) соответствуют предельные значения y_0/l при $1/Fr \rightarrow \infty$.

Нетрудно проверить, что для $\beta = -1/6$ функции (2.3), (4.2) при $d_{2m} = 0$ ($m \geq 1$)

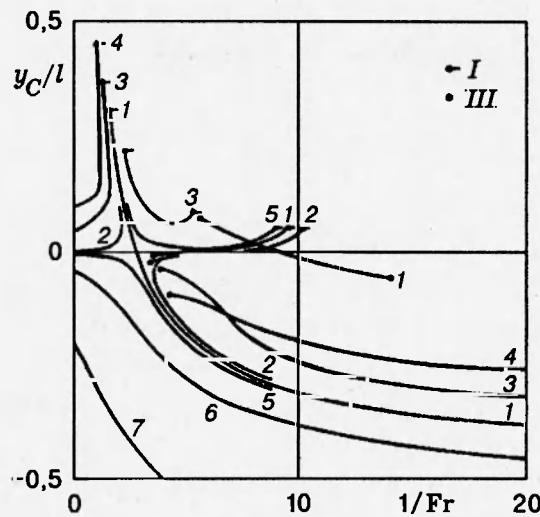


Рис. 4

представляют собой точное решение задачи:

$$\omega = -\frac{\pi}{6} + \frac{i}{3} \ln \zeta + i \frac{2}{3} \ln \frac{\zeta^2 - 1}{2\zeta^2}, \quad \varkappa = \frac{8}{3}. \quad (4.3)$$

Таким же образом для $\beta = 1/3$ функция

$$\omega = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3} i_{III} \frac{\zeta^2 - 1}{2\zeta} \quad (4.4)$$

является предельным решением задачи при $\varkappa \rightarrow \infty$. При этом свободная граница течения представляет собой отрезок горизонтальной прямой. Наличие набора точных решений упрощает верификацию и оценку погрешности численных методов.

Третий тип предельных решений характеризуется изломом свободной поверхности в некоторой точке, находящейся между A и C (рис. 3, кривые 10, 11, 14). Пусть образом этой точки на параметрической поверхности является точка $\zeta = e^{i\sigma_0}$. Тогда для этого решения

$$\omega_0(\zeta) = \frac{i}{3} \ln \frac{(\zeta^2 - e^{2i\sigma_0})(\zeta^2 - e^{-2i\sigma_0})}{4\zeta^4}. \quad (4.5)$$

При численном решении задачи в этом случае параметры \varkappa и σ_0 включаются в число искомых.

По рис. 4 можно судить о наличии различных ветвей решений, каждая из которых заканчивается предельными решениями. Например, для $\beta = 0$ (рис. 4, кривые 1) первая ветвь заканчивается с одной стороны точкой, отвечающей предельному случаю первого типа ($1/Fr = 1,575$), с другой — имеет асимптотическое решение второго типа ($1/Fr = \infty$). На рис. 3 этой ветви соответствуют кривые 1-6.

Вторая ветвь решений с $\beta = 0$ (рис. 3, кривые 7-10 для $1/Fr = 9,5; 8; 3,8; 3,6$) ограничена снизу (по параметру $1/Fr$) предельным решением третьего типа (точки III на рис. 4), сверху — первого. Следует отметить, что предельные решения первого типа 1 и 7 отличаются знаком ординат точек поверхности в окрестности точки A .

Имеют место и другие решения при $\beta = 0$, в частности показанные на рис. 3 кривыми 11-14 для $1/Fr = 14; 12; 7; 5,4$.

n	$1/\text{Fr}$	$1/\text{Fr}^*$
1	2,749	2,751
2	5,891	5,892
3	9,032	9,030
4	12,174	12,173

5. Решения с волнообразной формой границы. Линейное приближение. Численное исследование показало, что существует последовательность решений с возрастающим числом горбов и впадин. Каждое решение определено в некотором интервале значений Fr . Граничные значения этих интервалов для решений с двумя и более горбами отвечают рассмотренным выше предельным решениям третьего вида.

Решения задачи с малыми значениями ординат для $\beta = 0$ допускают линейное приближение. Для проверки численных результатов было проведено их сравнение с аналитическими решениями, найденными на основе асимптотических зависимостей, полученных в [5].

Согласно [5], форма поверхности струи, истекающей из-под горизонтального щита (при $\beta = 0$, $l = \infty$), может быть при $x \rightarrow \infty$ описана функцией

$$\theta(x) = A \sin \left(2\pi \frac{x}{\lambda} + \frac{\pi}{8} \right), \quad \lambda = 2\pi \frac{v_0^2}{g} \quad (5.1)$$

(x отсчитывается от кромки щита).

Перейти к задаче с конечной длиной свободной поверхности можно по аналогии с [8] путем зеркального отражения части потока со щитом относительно вертикальной прямой, проходящей через любую точку свободной поверхности, где $\theta(x) = 0$. Справедливость такой операции обосновывается тем, что в соответствии с [5] величина $\omega(z)$ при заглублении в поток достаточно быстро приближается к своему предельному значению $\omega(\infty) = i \ln(v_0/v_\infty)$. В связи с этим следует ожидать, что влияние щита сказывается лишь на небольшом участке свободной поверхности, ближайшем к кромке щита.

Таким образом, перемещая вертикальную ось симметрии в разные точки x_i с $\theta(x_i) = 0$, можно получить конфигурации с различным количеством волн на свободной поверхности. При этом с учетом сдвига фаз на $-\pi/8$ в (5.1) нетрудно найти связь длины щели $2l$ с длиной λ и количеством волн n :

$$2l = n\lambda - 2\frac{\pi}{8} \frac{\lambda}{2\pi} = \left(n - \frac{1}{8}\right)\lambda.$$

Отсюда получим дискретный ряд чисел Фруда, соответствующих разным n :

$$\text{Fr}_n = \frac{1}{\pi(n - 1/8)}. \quad (5.2)$$

В таблице представлены значения $1/\text{Fr}_n$ для $n = 1, \dots, 4$, а также значения $1/\text{Fr}_n^*$, рассчитанные при решении нелинейной задачи, соответствующие точкам пересечения оси x кривыми $y_C(1/\text{Fr})$ для $\beta = 0$ (рис. 4). Видно, что результаты, рассчитанные разными способами, весьма близки.

Таким образом, численное исследование задачи о течении весоной жидкости вдоль стенки со щелью показало, что при $\text{Fr} > 0$ существует последовательность решений с нарастающим количеством волн на свободной поверхности. Для решений с $\beta = 0$ и ма-

лой амплитудой волн получена приближенная формула, которая позволяет с достаточно высокой точностью определить значения $F_{гн}$, соответствующие каждому решению.

Было показано, что точки свободной поверхности для $F_{г} > 0$ при увеличении числа волн ($F_{г} \rightarrow 0$) приближаются к отрезку прямой AB , но крутизна фронта волны, вообще говоря, не убывает. В частности, существует последовательность решений типа волн Стокса. Для $F_{г} < 0$ в пределе при $F_{г} \rightarrow 0$ свободная поверхность также превращается в отрезок горизонтальной прямой. Однако при $F_{г} < 0$ волны не возникают.

Тем самым следует предположить, что волны на поверхности весомой жидкости могут существовать и в других случаях, например в кавитационных течениях при поперечной направленности силы тяжести. При этом волны могут появиться только на нижней свободной поверхности, так как на верхней местное значение $F_{г} < 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев О. М. О гравитационных волнах при течении жидкости через уступ // Тр. семин. по обратным краевым задачам. Казань: Казан. ун-т, 1964. Вып. 2. С. 33–41.
2. Киселев О. М. О течении тяжелой жидкости в канале с криволинейным дном // ПММ. 1976. Т. 40, № 4. С. 630–640.
3. Маклаков Д. В. Нелинейная теория докритических течений. Предельные режимы обтекания. Казань, 1992. (Препр. / Казан. ун-т; № 2).
4. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979.
5. Котляр Л. М. Истечение тяжелой жидкости из-под щита // Тр. семин. по краевым задачам. Казань: Казан. ун-т, 1969. Вып. 6. С. 88–93.
6. Гузевский Л. Г. Кавитационное обтекание пластины в поперечном поле силы тяжести // ПМТФ. 1971. № 5. С. 132–136.
7. Вишневский В. А., Котляр Л. М., Терентьев А. Г. Влияние сил тяжести в задачах кавитационного обтекания препятствий // Вопросы прикл. математики и механики. Чебоксары: Чуваш. ун-т, 1974. Вып. 3. С. 9–24.
8. Котляр Л. М., Троепольская О. В. О некоторых течениях с развитой кавитацией в поле силы тяжести // Там же. С. 86–95.
9. Житников В. П. О капиллярных волнах на ограниченном участке поверхности жидкости // Гидродинамика больших скоростей. Чебоксары: Чуваш. ун-т, 1990. С. 24–31.

Поступила в редакцию 4/VIII 1994 г.
