

УДК 539.374

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

С. И. Сенашов, О. В. Гомонова, О. Н. Черепанова*

Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнева,
660037 Красноярск, Россия* Сибирский федеральный университет, 660041 Красноярск, Россия
E-mails: sen@sibsau.ru, gomonova@sibsau.ru, cheronic@mail.ru

Рассматривается задача построения точных решений пространственных уравнений среды Мизеса на основе группы непрерывных преобразований, допускаемой системой (задача Б. Д. Аннина). Приводятся новые классы решений пространственных уравнений пластичности. Решена задача о сжатии слоя упругопластического материала жесткими плитами. При этом материал подчиняется экспоненциальному условию пластичности, предложенному Б. Д. Анниным.

Ключевые слова: идеальная пластичность, точные решения, законы сохранения, упругопластическая задача.

DOI: 10.15372/PMTF20210520

Введение. В 80-х гг. XX в. Б. Д. Анниным была сформулирована задача построения новых решений уравнений пластичности с помощью методов группового анализа. Новые решения данной задачи получены в настоящей работе.

Б. Д. Аннин предложил условие пластичности в экспоненциальном виде, которое нашло применение при анализе напряженно-деформированного состояния горных пород. Это условие использовано в данной работе при решении упругопластической задачи о сжатии слоя жесткими плитами.

1. Задача построения решений уравнений идеальной пластичности. Б. Д. Аннин поставил следующую задачу: найти новые решения пространственных уравнений пластичности с условием текучести Мизеса с помощью методов группового анализа, изложенных в работе [1].

В настоящее время известно лишь несколько точных решений уравнений пластичности (см. [2]). Наибольший интерес представляют решения ранга 2, в которых три компонента вектора скорости деформации и гидростатическое давление зависят от двух переменных в некоторой системе координат. Такие решения найдены в работах [2–7].

Для построения решений ранга 2 была вычислена алгебра Ли, допускаемая пространственной системой дифференциальных уравнений пластичности, построена оптимальная система одномерных подалгебр и на ее основе найдены новые решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Министерством образования и науки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных научно-образовательных математических центров (соглашение 075-02-2021-1384).

Система пространственных уравнений пластичности среды Мизеса в декартовой системе координат $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ в стационарном случае имеет вид

$$\partial_j s_{ij} = \partial_i p, \quad s_{ij} = \lambda(\partial_i u_j + \partial_j u_i)/2, \quad \partial_i u_i = 0, \quad s_{ij} s_{ij} = 2k_s^2, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Здесь s_{ij} — компоненты девиатора напряжений; $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$ — компоненты вектора скорости; λ — неотрицательная функция; k_s — постоянная пластичности; p — гидростатическое давление; по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Исключая из системы (1) компоненты девиатора напряжений, получаем нелинейную систему уравнений

$$\begin{aligned} \partial_i p = \frac{\sqrt{2}k_s}{A^3} \partial_{ii}^2 u_i - \frac{\sqrt{2}k_s}{A^2} e_{ij} e_{mn} \partial_{mi}^2 u_n, \quad e_{ij} e_{ij} = A^2, \quad \partial_i u_i = 0, \\ i, j = 1, 2, 3, \quad m, n = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2)$$

где e_{ij} — компоненты тензора скоростей деформации. Известно, что система уравнений (2) является системой эллиптического типа.

В работе [2] показано, что группа симметрий системы (2) порождается следующими операторами:

$$\begin{aligned} X_i = \partial_{x_i}, \quad Y_i = \partial_{u_i}, \quad N = x_i \partial_{x_i}, \quad M = u_i \partial_{u_i}, \quad i = 1, 2, 3, \\ T_1 = x_2 \partial_{x_3} - x_3 \partial_{x_2}, \quad T_2 = x_3 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_3}, \quad T_3 = x_1 \partial_{x_2} - x_2 \partial_{x_1}, \\ Z_1 = x_2 \partial_{x_3} - x_3 \partial_{x_2} + u_2 \partial_{u_3} - u_3 \partial_{u_2}, \quad Z_2 = x_3 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_3} + u_3 \partial_{u_1} - u_1 \partial_{u_3}, \\ Z_3 = x_1 \partial_{x_2} - x_2 \partial_{x_1} + u_1 \partial_{u_2} - u_2 \partial_{u_1}, \quad S = \partial_p. \end{aligned} \quad (3)$$

Операторам X_i , Y_i , N , M соответствуют непрерывные преобразования

$$x'_i = x_i + a_i, \quad u'_i = u_i + b_i, \quad x'_i = x_i e^a, \quad u'_i = u_i e^b, \quad i = 1, 2, 3,$$

определяющие переносы по координатам и компонентам вектора скоростей, а также растяжения.

Из преобразований T_i следует, что при жестких перемещениях

$$\begin{aligned} u'_2 = u_2 - c_1 x_3, \quad u'_3 = u_3 + c_1 x_2, \quad u'_1 = u_1 + c_2 x_3, \\ u'_3 = u_3 - c_2 x_1, \quad u'_2 = u_2 + c_3 x_1, \quad u'_1 = u_1 - c_3 x_2 \end{aligned}$$

система уравнений (2) не меняется. Группы, порождаемые операторами Z_i , представляют собой непрерывные вращения вокруг трех координатных осей. Преобразование S описывает инвариантность гидростатического давления относительно сдвигов $p' = p + d$. В приведенных выше формулах a_i , b_i , c_i , d — групповые параметры; обычно предполагается, что они непрерывно меняются в окрестности нуля.

Решения, построенные в работах [3–7], являются инвариантными решениями относительно некоторых одномерных подгрупп точечных преобразований, порождаемых операторами (3). В данном случае инвариантность означает неизменность решений при некоторых преобразованиях, порождаемых группой симметрий (3). Следовательно, все приведенные выше решения в подходящей системе координат можно записать как функции только двух независимых переменных. Это справедливо и для решений, построенных в данной работе.

В [2] приведена оптимальная система одномерных подалгебр. В силу критерия инвариантности [1] инвариантные решения ранга 2 можно построить только на некоторых из этих подалгебр:

$$X_1 + \gamma S, \quad X_1 + Z_1 + \gamma S, \quad \alpha M + N + \gamma S, \quad N + Y_1 + \gamma S, \quad Z_1 + \alpha N + Y_1 + \gamma S,$$

$$\begin{aligned}
Z_1 + \alpha N + \beta M + \gamma S, & \quad X_1 + \alpha Z_1 + M + \gamma S, & \quad X_1 + Y_1 + \alpha T_1 + \gamma S, \\
X_1 + Z_1 + T_1 + \gamma S, & \quad M + N + T_1 + \gamma S, & \quad Z_1 + Y_1 + \alpha T_1 + \gamma S, \\
X_1 + \alpha X_2 + T_2 + \beta T_3 + \gamma S, & \quad X_1 + Z_1 + Y_1 + \alpha T_1 + \gamma S.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь α, β, γ — произвольные постоянные, различным значениям которых соответствуют неподобные подалгебры.

Используя (4), можно указать все различные решения уравнений (2) ранга 2. Явные представления этих решений приведены в работе [2].

Следует отметить, что найдены не все инвариантные решения ранга 2. Таким образом, решение задачи, поставленной Б. Д. Анниным, далеко от завершения.

Приведем основные результаты, полученные при решении сформулированной выше задачи методами группового анализа:

1) построены точные решения, описывающие спирально-винтовые пластические течения [2, 8];

2) построен новый класс решений, обобщающих решение Д. Д. Ивлева [2];

3) построен новый класс решений задачи В. Прагера [9].

Представим новые решения задачи Р. Хилла [3]. Напомним, что Р. Хилл предложил искать решение уравнений (1) в виде

$$\tau_{xz} = -f_x, \quad \tau_{yz} = f_y, \quad 2\sigma_z^2 + 6(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = 6, \tag{5}$$

где $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ — безразмерные компоненты тензора напряжений, отнесенные к пределу текучести (заметим, что в (1) $\sigma_z = s_{33} + p, \tau_{xz} = s_{13}, \tau_{yz} = s_{23}$); остальные компоненты тензора напряжений равны нулю; f — некоторая гладкая функция двух переменных, которая является решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{(Ax + By + C)f_x}{\sqrt{1 - f_x^2 - f_y^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{(Ax + By + C)f_y}{\sqrt{1 - f_x^2 - f_y^2}} = 0, \tag{6}$$

A, B, C — произвольные постоянные.

Следует отметить, что Р. Хилл не нашел ни одного решения уравнения (6). Построим некоторые решения этого уравнения при значениях констант $A = B = 0, C = 1$. Дифференцируя уравнение и применяя простые преобразования, получаем

$$(1 - (f_x)^2)f_{yy} + 2f_x f_y f_{xy} + (1 - (f_y)^2)f_{xx} = 0. \tag{7}$$

Следует отметить, что в современных справочниках по дифференциальным уравнениям такое уравнение отсутствует (см., например, [10]).

Приведем некоторые новые точные решения уравнения (7):

$$f_1 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad f_2 = \operatorname{Arctsh} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad f_3 = \ln \left| \frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda y} \right|,$$

где λ — произвольная постоянная. Покажем, каким образом с использованием этих решений можно построить новые решения уравнения (7). Это уравнение с помощью контактных преобразований Лежандра

$$x = \partial_\xi w, \quad y = \partial_\eta w, \quad w(\xi, \eta) + f(x, y) = x\xi + y\eta,$$

где w — новая искомая функция; ξ, η — новые независимые переменные, записывается в виде

$$(1 - \xi^2) \partial_{\xi\xi}^2 w - 2\xi\eta w \partial_{\xi\eta}^2 w + (1 - \eta^2) \partial_{\eta\eta}^2 w = 0. \tag{8}$$

В отличие от (7) уравнение (8) является линейным, поэтому линейная комбинация его решений также является решением этого уравнения. Пусть w^1, w^2 — два решения уравнения (8), соответствующие, например, решениям f_1, f_2 . Тогда формула

$$w_{12}^\alpha = (1 - \alpha)w^1 + \alpha w^2 \quad (9)$$

представляет собой решение уравнения (7) при любых значениях параметра $\alpha \in [0, 1]$.

Пусть f_1, f_2 — два решения уравнения (7), которые после преобразования Лежандра переходят в w^1, w^2 . Тогда, применив к выражению (9) обратное преобразование Лежандра, нетрудно показать, что с использованием образа w_{12}^α при любых α можно получить новые решения уравнения (7). Таким образом, любые два решения уравнения (7) позволяют найти бесконечное число решений этого уравнения.

Используем данную процедуру для решений f_1, f_2, f_3 уравнения (7). Применяя преобразование Лежандра и используя формулу (9), получаем следующие решения уравнения (8):

$$\begin{aligned} w_{12}^\alpha &= (1 - \alpha) \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} + \alpha \left(\ln \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{1 - \xi^2}} - \xi \operatorname{Arcth} \xi + \eta \operatorname{Arcth} \eta \right), \\ w_{13}^\alpha &= (1 - \alpha) \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} - \alpha \left(\operatorname{Arcsh} \sqrt{\frac{1 - \xi^2 - \eta^2}{\xi^2 + \eta^2}} + \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} \right), \\ w_{23}^\alpha &= (1 - \alpha) \left(\ln \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{1 - \xi^2}} - \xi \operatorname{Arcth} \xi + \eta \operatorname{Arcth} \eta \right) - \\ &\quad - \alpha \left(\operatorname{Arcsh} \sqrt{\frac{1 - \xi^2 - \eta^2}{\xi^2 + \eta^2}} + \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} \right). \end{aligned}$$

Применяя к этим выражениям обратное преобразование Лежандра, находим новые решения уравнения (7) в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} f_{12}^\alpha &= - \left((1 - \alpha) \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} + \alpha \ln \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{1 - \xi^2}} - \xi \operatorname{Arcth} \xi + \eta \operatorname{Arcth} \eta \right) + \\ &\quad + \alpha (-\xi \operatorname{Arcth} \xi + \eta \operatorname{Arcth} \eta), \\ x &= \frac{(1 - \alpha)\eta}{\xi^2 + \eta^2} - \alpha \operatorname{Arcth} \xi, \quad y = -\frac{(1 - \alpha)\xi}{\xi^2 + \eta^2} + \alpha \operatorname{Arcth} \eta, \\ f_{13}^\alpha &= - \left[(1 - \alpha) \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} + \alpha \left(\operatorname{Arcsh} \sqrt{\frac{1 - \xi^2 - \eta^2}{\xi^2 + \eta^2}} + \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} \right) \right] + \\ &\quad + \alpha \left(\xi^2 \frac{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}}{\xi^2 + \eta^2} + \eta^2 \frac{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}}{\xi^2 + \eta^2} \right), \\ x &= \frac{(1 - \alpha)\eta}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{\alpha\xi\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y = \frac{-(1 - \alpha)\xi}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{\alpha\eta\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}}{\xi^2 + \eta^2}, \\ f_{32}^\alpha &= - \left[(1 - \alpha) \left(\operatorname{Arcsh} \sqrt{\frac{1 - \xi^2 - \eta^2}{\xi^2 + \eta^2}} + \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \alpha \left(\ln \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{1 - \xi^2}} - \xi \operatorname{Arcth} \xi + \eta \operatorname{Arcth} \eta \right) \right], \end{aligned}$$

$$x = (1 - \alpha)\xi \frac{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}}{\xi^2 + \eta^2} - \alpha\xi \operatorname{Arcth} \xi, \quad y = (1 - \alpha)\eta \frac{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}}{\xi^2 + \eta^2} + \alpha\eta \operatorname{Arcth} \eta.$$

Найденные решения описывают пластическое течение материала призматического стержня с постоянной формой поперечного сечения, деформируемого силами, приложенными к его концам. В предположении, что ось z параллельна образующей, а оси x, y лежат в плоскости поперечного сечения, внешние нагрузки являются статически эквивалентными продольной силе:

$$Z = \pm\sqrt{3}k \iint \sqrt{1 - f_x^2 - f_y^2} dx dy,$$

крутящему моменту:

$$G_z = \iint (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dx dy = -2k \iint f dx dy$$

и изгибающему моменту с компонентами

$$G_x = \pm\sqrt{3}k \iint y \sqrt{1 - f_x^2 - f_y^2} dx dy, \quad G_y = \mp\sqrt{3}k \iint x \sqrt{1 - f_x^2 - f_y^2} dx dy.$$

Существуют также другие решения уравнений (6), (7), которые в данной работе не приводятся.

2. Инвариантное решение на подалгебре $X_3 + \gamma S$. Рассмотрим подалгебру $X_3 + \gamma S$, подобную подалгебре $X_1 + \gamma S$ в (4). Инвариантные решения на ней будем искать в виде

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = w(x, y), \quad p = p(x, y) + \gamma z. \quad (10)$$

Подставляя соотношения (10) в систему уравнений (1), получаем

$$\begin{aligned} \partial_x \sigma_x + \partial_y \tau_{xy} &= 0, & \partial_x \tau_{xy} + \partial_y \sigma_y &= 0, & \partial_x \tau_{xz} + \partial_y \tau_{yz} &= \gamma, & \partial_x u + \partial_y v &= 0, \\ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) &= 6k_s^2, \\ \sigma_x - p &= \lambda \partial_x u, & \sigma_y - p &= \lambda \partial_y v, & \sigma_z - p &= 0, \\ 2\tau_{xy} &= \lambda(\partial_x v + \partial_y u), & 2\tau_{xz} &= \lambda \partial_x w, & 2\tau_{yz} &= \lambda \partial_y w. \end{aligned} \quad (11)$$

Выполним замену переменных в (11) по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= k(\sqrt{3} \cos \omega + \sin \omega \cos 2\varphi), & \sigma_y &= k(\sqrt{3} \cos \omega - \sin \omega \cos 2\varphi), \\ \tau_{xy} &= k \sin \omega \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь k — некоторая постоянная ($0 < |k| < k_s$); ω, φ — гладкие функции.

Подставляя (12) в (11), получаем

$$\begin{aligned} (-\cos \omega + \sqrt{3} \sin \omega \cos 2\varphi) \partial_x \omega + \sqrt{3} \sin \omega \sin 2\varphi \partial_y \omega - 2 \sin \omega \partial_y \varphi &= 0, \\ (\cos \omega + \sqrt{3} \sin \omega \cos 2\varphi) \partial_y \omega + \sqrt{3} \sin \omega \sin 2\varphi \partial_x \omega + 2 \sin \omega \partial_x \varphi &= 0, \\ \partial_x \tau_{xz} + \partial_y \tau_{yz} = \gamma, & \partial_x u + \partial_y v = 0, & \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k_s^2 - k^2 = K^2, \\ \sigma_x - p = \lambda \partial_x u, & \sigma_y - p = \lambda \partial_y v, & \sigma_z - p = 0, \\ 2\tau_{xy} = \lambda(\partial_x v + \partial_y u), & 2\tau_{xz} = \lambda \partial_x w, & 2\tau_{yz} = \lambda \partial_y w. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (13) следует, что исходная система (1) распалась на две системы уравнений, содержащих только напряжения. Первые два уравнения в (13) фактически совпадают с уравнениями, описывающими плоское напряженное состояние:

$$\begin{aligned} (-\cos \omega + \sqrt{3} \sin \omega \cos 2\varphi) \partial_x \omega + \sqrt{3} \sin \omega \sin 2\varphi \partial_y \omega - 2 \sin \omega \partial_y \varphi &= 0, \\ (\cos \omega + \sqrt{3} \sin \omega \cos 2\varphi) \partial_y \omega + \sqrt{3} \sin \omega \sin 2\varphi \partial_x \omega + 2 \sin \omega \partial_x \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Третье, четвертое и пятое уравнения подобны уравнениям, описывающим кручение пластического стержня при $\gamma = 0$ и пределе текучести K :

$$\partial_x \tau_{xz} + \partial_y \tau_{yz} = \gamma, \quad \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k_s^2 - k^2 = K^2. \quad (15)$$

Решая уравнения (14), (15), можно получить компоненты тензора напряжений, при этом $\sigma_z = p = (\sigma_x + \sigma_y)/2$. Остается найти значение постоянной k .

Для определения компонент вектора скорости получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_x u}{2\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\partial_y v}{2\sigma_y - \sigma_x} = \frac{\partial_x v + \partial_y u}{6\tau_{xy}}, \\ \partial_x \left(\frac{\partial_x w}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2}} \right) + \partial_y \left(\frac{\partial_y w}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2}} \right) = \gamma. \end{aligned}$$

Заметим, что решение системы уравнений (10) является суперпозицией плоского напряженного состояния и кручения пластического тела вокруг оси z .

3. Задача о сжатии слоя материала двумя жесткими параллельными плитами. Рассмотрим слой упругопластического материала длиной l и шириной h , сжимаемый двумя горизонтальными жесткими плитами (рис. 1).

Контур $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, ограничивающий сжимаемый слой, задается уравнениями

$$\begin{aligned} \Gamma_1: \quad 0 < x < l, \quad y = h, \quad \Gamma_2: \quad x = 0, \quad 0 < y < h, \\ \Gamma_3: \quad 0 < x < l, \quad y = 0, \quad \Gamma_4: \quad x = l, \quad 0 < y < h. \end{aligned}$$

При проведении численных расчетов выбраны размеры слоя $l = 0,1$ м, $h = 0,02$ м.

Пусть слой сжимается постоянной силой вдоль оси y , границы Γ_2 и Γ_4 свободны от внешних усилий. Предполагаем, что контур Γ находится в пластическом состоянии. Необходимо определить положение границы между областями упругого и пластического деформирования материала, возникающими при сжатии слоя плитами. При этом материал удовлетворяет экспоненциальному условию пластичности, предложенному Б. Д. Анниным [11]:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = 4k^2 \left(1 - \exp \left(-\frac{\sigma_0}{k} + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2k} \right) \right)^2 \quad (16)$$

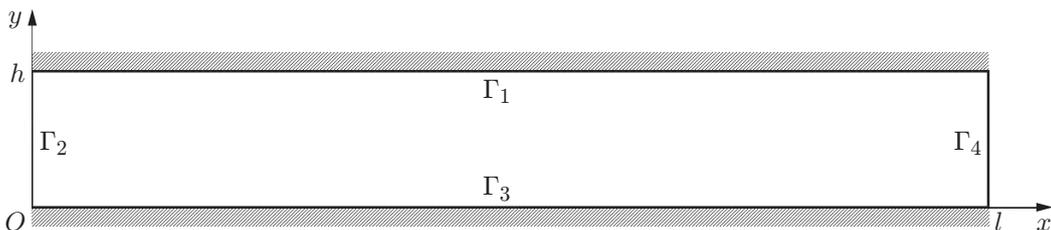


Рис. 1. Слой материала, сжимаемый горизонтальными плитами

(σ_x, σ_y, τ — компоненты тензора напряжений; k — постоянная пластичности, равная пределу текучести материала при чистом сдвиге; σ_0 — постоянная материала). Выполнив замену $\sigma_x/(2k) = \sigma'_x + \sigma_0/(2k)$, $\sigma_y/(2k) = \sigma'_y + \sigma_0/(2k)$, $\tau/(2k) = \tau'$ в формуле (16), получаем

$$(\sigma'_x - \sigma'_y)^2 + 4\tau'^2 = (1 - e^{\sigma'_x + \sigma'_y})^2. \quad (17)$$

Для определения границы между областями упругого и пластического деформирования необходимо решить плоскую упругопластическую задачу, которая состоит в определении функций $\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'$, удовлетворяющих уравнениям равновесия во всей области, ограниченной контуром Γ :

$$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'}{\partial x} = 0,$$

условию пластичности (17) в области пластического деформирования и на контурах пластины, уравнению совместности в напряжениях

$$\Delta(\sigma'_x + \sigma'_y) = 0$$

(Δ — оператор Лапласа) и неравенству

$$(\sigma'_x - \sigma'_y)^2 + 4\tau'^2 < (1 - e^{\sigma'_x + \sigma'_y})^2$$

в области упругого деформирования.

Граничные условия для слоя записываются следующим образом:

$$\sigma'_x n_1 + \tau' n_2 = X, \quad \sigma'_y n_2 + \tau' n_1 = Y. \quad (18)$$

Здесь n_1, n_2 — компоненты вектора \mathbf{n} нормали к контуру Γ ; X, Y — компоненты вектора внешних усилий.

Учитывая, что на границах Γ_2 и Γ_4 внешние силы не действуют, и используя условия (17), (18), находим значения нормальных и касательных напряжений, возникающих на этих границах при сжатии слоя:

$$\begin{aligned} \sigma'_x \cdot 1 + \tau' \cdot 0 &= 0, & \sigma'_y \cdot 0 + \tau' \cdot 1 &= 0, \\ (\sigma'_x - \sigma'_y)^2 + 4\tau'^2 &= (1 - e^{\sigma'_x + \sigma'_y})^2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\sigma'_x = 0, \quad \sigma'_y = 0, \quad \tau' = 0.$$

Перпендикулярно горизонтальным границам Γ_1, Γ_3 слоя действует сжимающая сила, компоненты которой равны $X = 0, Y = p$ ($p < 0$). Найдём значения напряжений, возникающих на этих границах при сжатии:

$$\begin{aligned} \sigma'_x \cdot 0 + \tau' \cdot 1 &= 0, & \sigma'_y \cdot 1 + \tau' \cdot 0 &= p, \\ (\sigma'_x - \sigma'_y)^2 + 4\tau'^2 &= (1 - e^{\sigma'_x + \sigma'_y})^2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\sigma'_y = p, \quad \tau' = 0, \quad \sigma'_x = p \pm (1 - e^{\sigma'_x + p}).$$

Для определения значений напряжений $\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'$ во внутренних точках области, ограниченной контуром Γ , использован численно-аналитический метод. Более подробно данный метод и этапы решения упругопластической задачи описаны в работах [12, 13].

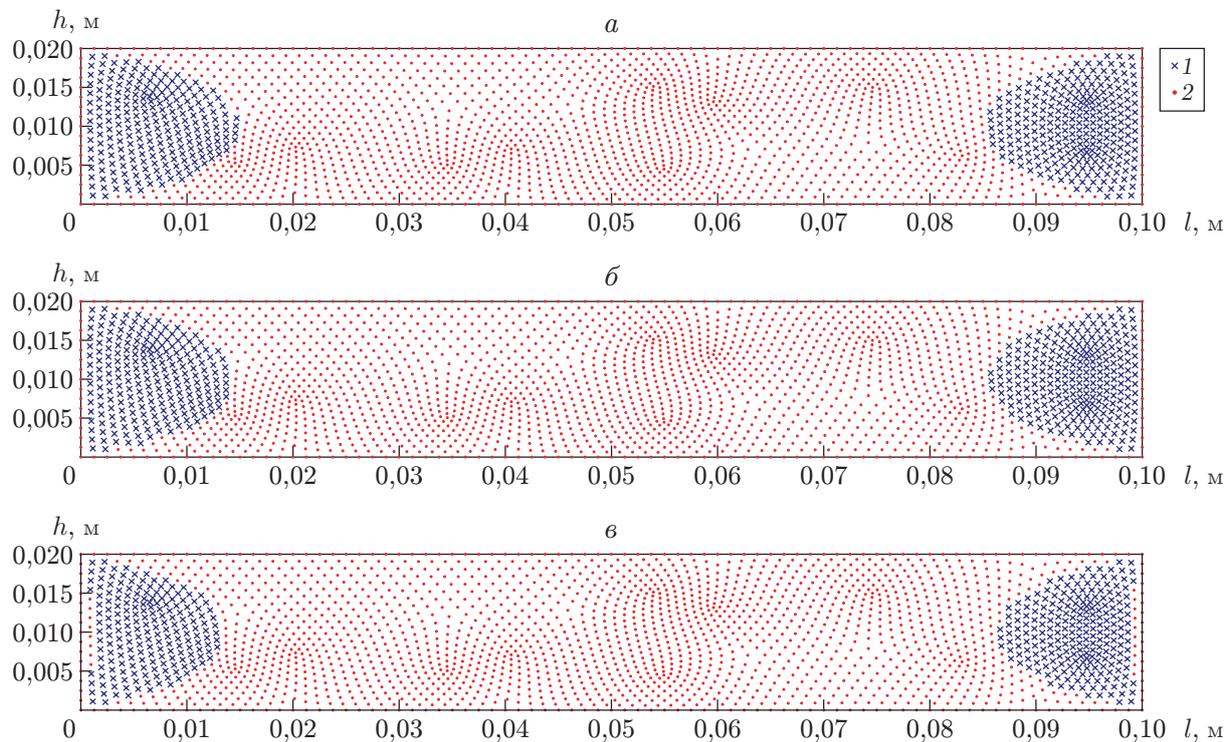


Рис. 2. Области упругого (1) и пластического (2) деформирования в сжимаемом слое при различных значениях приложенного усилия p :

a — $p = -0,1$; $б$ — $p = -0,5$; $в$ — $p = -1$

На рис. 2 представлены области упругого и пластического деформирования в сжимаемом слое материала при различных значениях p .

Следует отметить, что условие пластичности, предложенное Б. Д. Анниным, применяется для описания предельного состояния горных пород. Решения некоторых задач со свойствами материала, удовлетворяющими условию (16), приведены, например, в работах [14, 15].

Таким образом, в работе построены новые классы точных решений уравнений идеальной пластичности и решена задача о сжатии слоя упругопластического материала жесткими плитами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. **Аннин Б. Д.** Групповые свойства уравнений упругости и пластичности / Б. Д. Аннин, В. О. Бытев, С. И. Сенашов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.
3. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
4. **Прагер В.** Трехмерное пластическое течение при однородном напряженном состоянии // Механика. 1958. № 3. С. 23–27.
5. **Ивлев Д. Д.** Предельное состояние деформируемых тел и горных пород / Д. Д. Ивлев, Л. А. Максимова, Р. И. Непершин и др. М.: Физматлит, 2008.
6. **Задоян М. А.** Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992.
7. **Аннин Б. Д.** Новые точные решения пространственных уравнений пластичности Треска // Докл. АН. 2007. Т. 415, № 4. С. 482–485.

8. **Сенашов С. И.** Решение уравнений пластичности в случае спирально-винтовой симметрии // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317, № 1. С. 57–59.
9. **Сенашов С. И., Савостьянова И. Л.** Новые трехмерные пластические течения, соответствующие однородному напряженному состоянию // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22, № 3. С. 114–117.
10. **Polyanin A. D.** Handbook of nonlinear partial differential equations. 2nd ed. / A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev. N. Y.: Taylor Francis Group, 2012.
11. **Аннин Б. Д.** Одна плоская упругопластическая задача при экспоненциальном условии текучести // Инж. журн. Механика твердого тела. 1966. № 3. С. 122–123.
12. **Senashov S. I., Gomonova O. V.** Construction of elastoplastic boundary in problem of tension of a plate weakened by holes // Intern. J. Nonlinear Mech. 2019. V. 108. P. 7–10.
13. **Гомонова О. В., Сенашов С. И.** Определение областей упругого и пластического деформирования в задаче об одноосном растяжении пластины, ослабленной отверстиями // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 1. С. 179–186.
14. **Мирсалимов В. М.** Некоторые упругопластические задачи для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий // ПМТФ. 1974. № 4. С. 133–138.
15. **Аннин Б. Д., Коробейников С. Н.** Методы теории упругости и пластичности в механике горных пород и геодинамике // Эколог. вестн. науч. центров ЧЭС. 2012. № 1. С. 9–19.

*Поступила в редакцию 23/VI 2021 г.,
после доработки — 23/VI 2021 г.
Принята к публикации 28/VI 2021 г.*
