

ОБ ЭВОЛЮЦИИ СОЛИТОНА В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Е. Н. Пелиновский

(Горький)

На примере поверхностных волн в тяжелой жидкости рассмотрено распространение уединенной волны в неоднородной среде. Проанализированы процессы распада волны на солитоны в зависимости от перепадов глубины.

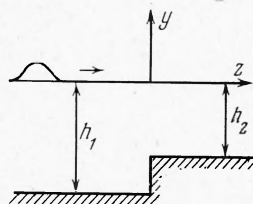
1. Солитоны как специфический вид нелинейных волновых движений в диспергирующих средах интенсивно исследуются в связи с задачами гидродинамики, физики плазмы и электродинамики. Как известно [1,2], произвольное начальное возмущение с течением времени распадается на ряд уединенных волн, число и амплитуды которых могут быть найдены из законов сохранения. В связи с проблемой существования и устойчивости нелинейных стационарных волн вызывает интерес эволюция солитона в неоднородной среде. В данной работе эта задача рассматривается для волн на поверхности тяжелой жидкости переменной глубины, для которых возможна сравнительно простая экспериментальная проверка данных теории. Ряд задач о распространении солитона в неоднородной среде уже рассматривались в литературе, например изучена эволюция одиночной волны в линейном приближении [3], решалась задача об «адиабатической» перестройке солитона в нелинейной постановке при достаточно медленном изменении глубины [4,5]. Известны численные решения нелинейной задачи о набегании солитона на берег [6,7], и имеются экспериментальные работы по этой теме [8,9].

В данной работе рассмотрена эволюция уединенной волны в неоднородной зоне конечных размеров и находится асимптотический вид волнового движения при $t \rightarrow \infty$.

2. Как известно, поведение волны на поверхности жидкости переменной глубины определяется в основном тремя независимыми параметрами: нелинейностью (числом Маха) $M = u / \sqrt{gh}$, дисперсией $D = h^2 / \lambda^2$ и неоднородностью $N = \lambda / L$, где u — скорость частиц жидкости, g — ускорение силы тяжести, h — глубина жидкости, λ — длина волны, L — характерный размер неоднородности. В зависимости от соотношений между этими параметрами могут реализоваться различные виды волновых движений. Ограничиваясь в дальнейшем случае солитона малой амплитуды ($M, D \ll 1$), выделим в зависимости от величины параметра неоднородности пять характерных областей, в которых волновые процессы различны: область I, где $N \gg 1$; область II, где $N \sim 1$; область III, где $M, D \ll N \ll 1$; область IV, где $N \sim M, D$, и область V, где $N \ll M, D$. В областях I — III неоднородность резкая ($N \gg M, D$), так что нелинейные и дисперсионные эффекты не успевают сказываться за время прохождения импульсом зоны переменной глубины; решение в этих областях описывается формулами линейной теории. В области V неоднородность достаточно плавная, так что волна локально остается стационарной, ее амплитуда и длительность изменяются «адиабатически». Можно дать и другую классификацию волновых процессов. В областях III—V неоднородность плавная $N \ll 1$ и можно пренебречь отраженной волной. В области I $N \gg 1$, наоборот, неоднородность можно аппроксимировать

уступом, что существенно упрощает задачу. Разумеется, указанное деление на пять областей носит условный характер, так как нельзя указать их точные границы. Будем считать также, что общий перепад глубин сравнительно небольшой, так что по обе стороны неоднородной зоны справедливо приближение Кортвега — де Вриза [1,2]. В дальнейшем рассматриваются волновые движения в каждой из указанных областей.

3. *Область I.* Исследование волновых процессов в этой области проводится на основе формул линейной теории, причем глубина меняется скачком (фиг. 1). Такая задача легко решается (см., например, [10]) и по заданной падающей волне



Фиг. 1

$$u_0(t, z) = A_0 \operatorname{sch}^2 \left[\frac{t - z / (\sqrt{gh_1} + A_0/3)}{T_0} \right], \quad T_0^2 = 2h_1^{3/2} / A_0 g^{1/2} \quad (3.1)$$

находим для прошедшей u_+ и отраженной u_- следующие выражения:

$$u_+(t, 0) = PA_0 \operatorname{sch}^2 t / T_0, \quad u_-(t, 0) = RA_0 \operatorname{sch}^2 t / T_0$$

$$P = \frac{2\sqrt{H_{12}}}{\sqrt{H_{12} + 1}}, \quad R = \frac{\sqrt{H_{12}} - 1}{\sqrt{H_{12} + 1}} \quad \left(H_{12} = \frac{h_1}{h_2} \right) \quad (3.2)$$

Итак, прошедший и отраженный импульсы имеют «солитоноподобную» форму, однако их длительности отличаются от длительностей стационарных солитонов, имеющих амплитуды PA_0 и RA_0 соответственно. Вследствие этого импульсы начнут формироваться в стационарные. Эволюция начального возмущения, как известно, определяется величиной параметра подобия σ [1]

$$\sigma = T \sqrt{6Ag^{1/2} h^{-3/2}} \quad (3.3)$$

(для солитона $\sigma_c = \sqrt{12}$). Используя (3.1) и (3.2), получаем для прошедшей и отраженной волн

$$\sigma_+ = \sqrt{12} \sqrt{2H_{12}^2 / (H_{12}^2 + 1)}, \quad \sigma_- = \sqrt{12} \sqrt{(H_{12}^2 - 1) / (H_{12}^2 + 1)} \quad (3.4)$$

На фиг. 2 представлены зависимости σ_+ и σ_- от перепада глубин H_{12} .

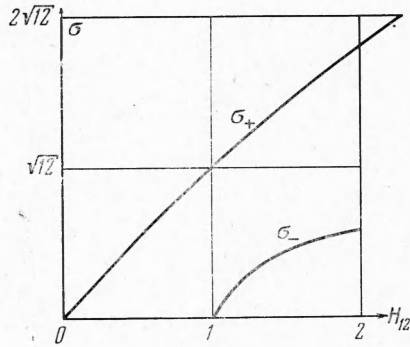
Если волна трансформируется на откосе с $H_{12} > 1$, то отраженная волна формируется только в один солитон (при этом возможно образование осциллирующего хвоста за импульсом [1]), так как $\sigma_- < \sqrt{12}$. Прошедшая волна делится на солитоны, число которых определяется из законов сохранения [1]. Так, при $\sigma_+ < 2\sigma_c$ ($H_{12} < 2.25$) образуются два солитона с амплитудами

$$\sqrt{A_{1,2} / PA_0} = \frac{\sigma_+}{2\sigma_c} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\sigma_+^2 / \sigma_c^2 - 1}{3\sigma_+^2 / \sigma_c^2}} \right] \quad (3.5)$$

При $H_{12} > 2.25$ прошедшая волна делится на три солитона и т. д. Если $H_{12} < 1$, то прошедшая волна формируется в один солитон, а отраженная волна вообще не стремится к стационарной, так как для нее $\int u_- dt < 0$, при этом в сторону $z < 0$ будет распространяться волновой пакет с высокочастотным заполнением (см., например, [11]). В дальнейшем рассматривается падение волны в зону с $H_{12} > 1$.

4. *Область II* ($N \sim 1$). В этой области также можно пренебречь влиянием нелинейных и дисперсионных эффектов при прохождении импульсом зоны переменной глубины, однако необходимо учитывать ре-

альный рельеф дна. Математически задача сводится к решению линейных дифференциальных уравнений, но их интегралы неизвестны, если глубина



Фиг. 2

меняется произвольно. Для некоторых функций $h(z)$ (например, линейного откоса) решение выражается через специальные функции и задача о прохождении импульсом неоднородной зоны решается полностью. Не производя соответствующих выкладок для этих специальных случаев, ограничимся некоторыми оценками, показывающими влияние конечности размеров переходной области. Ясно, что наличие конечной длительности неоднородной зоны приводит к увеличению коэффициента прохождения волны и, следовательно, к большему значению σ_+ . Например, рассматривая трансформацию на откосе, аппроксимированном двумя уступами (фиг. 3), получим

$$\sigma_+^{(2)} = \sqrt{12} \sqrt{4H_{12}^2 / (H_{13}^{1/2} + 1)(H_{32}^{1/2} + 1)} \quad (H_{13} = h_1/h_3, \quad H_{32} = h_3/h_2) \quad (4.1)$$

Легко видеть, что $\sigma_+^{(2)} > \sigma_+$ при одинаковом общем перепаде H_{12} , и, следовательно, при наличии двух уступов возможно образование большего числа солитонов, чем при трансформации волны на одном уступе. Максимального значения функция $\sigma_+^{(2)}$ достигает при $h_3 = H_{12}^{1/2}$.

Подчеркнем еще раз, что в областях I—III задача об эволюции солитона разбивается на два простых: преобразование солитона в неоднородной зоне (линейное приближение) и распад начального импульса в однородной зоне.

5. *Области III—V* ($N \ll 1$). При плавной неоднородности отраженной волной можно пренебречь и свести уравнения гидродинамики к «неоднородному» уравнению Кортевега — де Вриза [4]

$$g\hbar \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\hbar^{3/2}}{6g^{1/2}} \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} + \frac{3}{4} gu \frac{\partial h}{\partial z} = 0, \quad \tau = \int \frac{dz}{\sqrt{gh}} - t \quad (5.1)$$

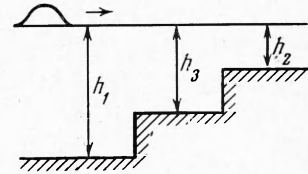
Если параметры нелинейности, дисперсии и неоднородности одного порядка, то получить решение уравнения (5.1) не удастся. Однако можно найти выражения для моментов скорости [1] в явном виде. Так, интегрируя (5.1) по τ , нетрудно получить для первого момента

$$\hbar^{3/4}(z) \int_{-\infty}^{\infty} u(z, t) dt = \hbar_1^{3/4} \int_{-\infty}^{\infty} u_0 dt \quad (5.2)$$

Умножая (5.2) на u и проведя аналогичные выкладки, получим для второго момента

$$\hbar^{3/2}(z) \int_{-\infty}^{\infty} u^2(z, t) dt = \hbar_1^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} u_0^2 dt \quad (5.3)$$

Легко видеть, что второй момент совпадает со средним значением потока энергии [4]. Если дисперсионным членом ($\partial^3 u / \partial \tau^3$) в (5.1) пренебречь нельзя, то найти в явном виде выражения для моментов более высокого



Фиг. 3

порядка не удастся. Знание даже двух моментов позволяет решить в ряде случаев задачу о распаде волны на два солитона, в то время как точное решение в неоднородной области может быть довольно сложным. Рассмотрим по отдельности каждую область.

6. Область III ($M, D \ll N \ll 1$). В этом случае в уравнении (5.1) можно пренебречь нелинейным и дисперсионным членами (как уже указывалось, в областях I—III справедливо линейное приближение) и оно легко интегрируется

$$u(z, \tau) = A_0 [h_1 / h(z)]^{1/4} \operatorname{sch}^2 \tau / T_0 \quad (6.1)$$

Как видно из (6.1), амплитуда волны увеличивается, а длительность остается неизменной. Знание решения (6.1) позволяет с помощью законов сохранения решить задачу о последующей трансформации волны в зоне с постоянной глубиной ($h = h_2$). Опуская выкладки, получим, что волна разбивается на два солитона с амплитудами

$$\sqrt{A_{1,2} / A_0} = 1/2 H_{12}^{3/2} \{1 \pm \sqrt{1 - 4/3 [1 - H_{12}^{-2/4}]}\} \quad (6.2)$$

если $H_{12} < 1.85$. При больших перепадах волна разбивается на три солитона и т. д. Для этого случая параметр подобия равен

$$\sigma = \sqrt{12} H_{12}^{1/6} \quad (6.3)$$

Заметим, что для слабонеоднородной среды ($N \ll 1$) параметр σ больше, чем в случае скачкообразного изменения глубины ($N \gg 1$). Это связано с отсутствием отражения, в результате чего трансформированная через неоднородную зону волна «содержит в себе» больше солитонов.

Рост амплитуды волны приводит к тому, что начинают сказываться нелинейные эффекты. Так как при этом дисперсия уменьшается ($D \approx \approx h / gT_0^2$), то профиль волны начинает искажаться. Решение уравнения (5.1) при таких условиях описывается квазипростой волной [4]

$$u(z, \tau) = A_0 [h_1 / h(z)]^{1/4} \operatorname{sch}^2 \left\{ T_0^{-1} \left[\tau - u h^{3/4} g \int_0^z h^{-7/4} dz' \right] \right\} \quad (6.4)$$

Хотя профиль волны задается неявно формулой (6.4), ее моменты по-прежнему легко находятся по формулам (5.2), (5.3). Поэтому волна разбивается в зоне с $h = h_2$ на два солитона в соответствии с (6.2). При $H_{12} > 1.85$ волна трансформируется в последовательность трех солитонов и т. д. Отметим, что вычисление моментов любого порядка, необходимых для решения задачи о распаде волны на n солитонов, не представляет трудностей. Пренебрегая дисперсионным членом в (5.1), легко найти

$$h^{3n/4} \int_{-\infty}^{\infty} u^n dt = h_1^{3n/4} \int_{-\infty}^{\infty} u_0^n dt \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6.5)$$

(При наличии дисперсии удается найти в явном виде только первые два момента (5.2) и (5.3).)

Таким образом, в области III находится как волна в неоднородной зоне, так и ее асимптотический вид при $t \rightarrow \infty$.

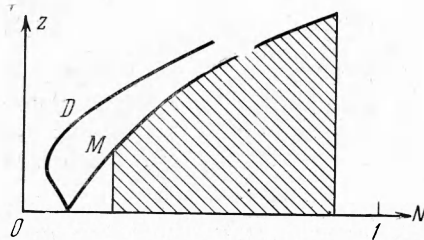
Единственное ограничение на перепад глубин (или, что то же самое, на длину неоднородной зоны) связано с возможностью обрушения волны раньше, чем она выйдет в область с постоянной глубиной. Условие опрокидывания волны для решения (6.4) имеет вид [4]

$$\int_0^z h^{-1/4}(z) dz = \frac{3\sqrt{3}}{4} g T_0 A_0^{-1} h_1^{-1/4} \quad (6.6)$$

Для постоянного уклона дна $\partial h / \partial z = -h_1 / L$ отсюда получаем

$$H_{12} = 1 + \frac{9\sqrt{3}}{16} g T_0 h_1 L^{-1} A_0^{-1} \quad (6.7)$$

При глубинах, соответствующих условию (6.7), становится существенным дисперсионный член, который ограничивает крутизну фронта волны (см. п. 8). Таким образом, хотя параметры волны сначала удовлетворяли



Фиг. 4

области III, в дальнейшем приходится учитывать возрастающую нелинейность и приведенный выше анализ справедлив в области, схематично представленной на фиг. 4 (заштрихованная область). При больших z параметры волны соответствуют области IV.

7. Область V. В этой области глубина меняется достаточно медленно, так что локально волну можно считать стационарной. При этом солитон «адиабатически» перестраивается, сохраняя свою форму неизменной. Этот

случай рассматривался в [3,5], где получено, что амплитуда солитона изменяется в зависимости от глубины следующим образом:

$$A = A_0 [h_1 / h(z)]^{3/2} \quad (7.1)$$

Амплитуда солитона растет быстрее, чем амплитуда квазипростой волны (6.4). Последнее связано с уменьшением длительности (у римановой волны временная длительность не меняется) необходимой для восстановления квазистационарной формы импульса. Однако, как нетрудно убедиться (см. (5.2)), решение в виде солитона с переменной амплитудой не соответствует уравнению для первого момента. Это связано со следующим. Так как протяженность солитона бесконечна, то ясно, что о стационарности всего импульса в неоднородной зоне говорить бессмысленно. Однако часть импульса, в которой сосредоточено, например, 99% всей энергии, находится локально в области с постоянной глубиной и является квазистационарной (именно ее и отождествляем с солитоном). Поэтому невыполнение (5.2) можно приписать «нестационарным хвостам», которые и дают вклад в интеграл $\int u dt$. Таким образом, по мере распространения импульс сохраняет солитоноподобную форму, излучая «лишнюю» часть величины $\int u dt$, равную $(H_{12}^{3/4} - 1) \int u_0 dt$, в хвост¹. Подчеркнем, что условием адиабатического изменения солитона является $L \gg \lambda / M$, а не только $L \gg \lambda$, последнее условие — условие отсутствия отраженной волны. Так как по мере распространения число Маха растет, то условие адиабатического приближения выполняется с большой точностью. Это связано с уменьшением длительности солитона при росте его амплитуды.

8. Область IV. В области IV параметры нелинейности, дисперсии и неоднородности одного порядка и этот случай является промежуточным между случаями, рассмотренными в п. 6 и п. 7. Влияние дисперсии сводится к тому, что длительность волны будет частично «следить» за изменением ее амплитуды, однако не в такой мере, как при адиабатическом изменении солитона. Кроме того, возрастает излучение солитона в хвост. Это приводит к тому, что импульс становится более широким по сравнению с солитоном той же амплитуды и хвосты имеют конечную энергию. В результате амплитуда импульса возрастает по закону типа $[h_1 / h(z)]^2$, где

¹ Аналогичная ситуация имеет место и для диссипативных сред, где при малых потерях солитон сохраняет свою форму независимо от величины $\int u dt$ [12,13].

