$\mathcal{AMS}$ subject classification: 49J20, 65N30

Априорные оценки ошибки и сверхсходимость $P_0^2 - P_1$ смешанных методов конечных элементов для эллиптических задач граничного управления*

Ч. Ксу

School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin 132013, Jilin, China.

E-mail: 386270479@qq.com (Xu Ch.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 1, Vol. 14, 2021.

Ксу Ч. Априорные оценки ошибки и сверхсходимость $P_0^2 - P_1$ смешанных методов конечных элементов для эллиптических задач граничного управления // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 1. — С. 63–76.

В данной статье рассматриваются априорные оценки ошибки и сверхсходимость $P_0^2 - P_1$ смешанных методов конечных элементов для эллиптических задач граничного управления. Переменные состояния и переменные сопряженного состояния аппроксимируются парой $P_0^2 - P_1$ (скорость – давление), а переменная управления аппроксимируется кусочно-постоянными функциями. Сначала мы получим априорные оценки ошибки для переменной управления, переменных состояния и сопряженного состояния. Затем будет получен результат сверхсходимости для переменной управления с помощью оператора проектирования для постобработки.

DOI: 10.15372/SJNM20210105

Ключевые слова: *эллиптические уравнения, задачи граничного управления, априорные оценки ошибки, сверхсходимость, $P_0^2 - P_1$ смешанные методы конечных элементов.*

Xu Ch. A priori error estimates and superconvergence of $P_0^2 - P_1$ mixed finite element methods for elliptic boundary control problems // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 1. — P. 63–76.

In this paper, we discuss a priori error estimates and superconvergence of $P_0^2 - P_1$ mixed finite element methods for elliptic boundary control problems. The state variables and co-state variables are approximated by a $P_0^2 - P_1$ (velocity–pressure) pair and the control variable is approximated by piecewise constant functions. First, we derive a priori error estimates for the control variable, the state variables and the co-state variables. Then we obtain a superconvergence result for the control variable by using postprocessing projection operator.

Keywords: *elliptic equations, boundary control problems, a priori error estimates, superconvergence, $P_0^2 - P_1$ mixed finite element methods.*

1. Введение

Метод конечных элементов успешно используется для решения задач оптимального управления. Об исследованиях сходимости и сверхсходимости для различных задач оптимального управления см. [1, 4, 9, 13, 14, 19–23, 25] для стандартного метода конечных

*Работа поддержана Национальным фондом естественных наук Китая (проект№ 11601014), проектом исследования науки и технологий Департамента образования Цзилинь (JJKH20190634KJ) и проектом развития молодежных исследований и инноваций университета Бэйхуа.

элементов и [2, 3, 5, 11] для смешанного метода конечных элементов. Систематическое описание задач оптимального управления можно найти, например, [15].

В последние годы многие исследователи начали уделять внимание численному моделированию задач граничного управления. В [16, 17] Ян и Лиу обсудили апостериорные оценки ошибки методов конечных элементов для некоторых эллиптических задач граничного управления. В [18] Лиу и Ян рассмотрели конечно-элементные аппроксимации класса задач граничного управления для уравнений Стокса. Они получили не только некоторые результаты по сверхсходимости для аппроксимации управления и состояния, но и асимптотически точные апостериорные оценки ошибки на основе результатов по сверхсходимости. В [12] Гонг и Ян обсудили смешанный метод конечных элементов для задачи граничного управления Дирихле для эллиптических уравнений в частных производных (УЧП). Они рассмотрели задачи оптимального управления как для многоугольных, так и для общих гладких областей, и получили априорные оценки ошибок для оптимального управления, состояния и сопряженного состояния. В [26] Ян с соавторами проанализировали априорные оценки ошибки стандартных методов конечных элементов и смешанных методов конечных элементов для эллиптических задач оптимального управления с граничными наблюдениями. Основная особенность такого рода задач оптимального управления состоит в том, что наблюдения или измерения представляют собой внешние нормальные производные переменной состояния на границе, что снижает регулярность решений этих задач оптимального управления. В [8] Декелник с соавторами рассмотрели конечно-элементную аппроксимацию граничного управления Дирихле для эллиптических УЧП в двумерных и трехмерных искривленных областях. Они рассмотрели вариационную дискретизацию эллиптических задач оптимального управления Дирихле с ограничениями на управление. В [10] Ганзбюргер с соавторами обсуждали априорные оценки ошибки конечно-элементных аппроксимаций для стохастических задач оптимального граничного управления Неймана.

В этой статье мы рассмотрим $P_0^2 - P_1$ смешанные конечно-элементные аппроксимации [6] для некоторого класса эллиптических задач граничного управления. Сначала мы обсудим априорные оценки ошибок для всех переменных. Затем мы получим результат по сверхсходимости для переменной управления, используя оператор проектирования для постобработки. Насколько нам известно, эти результаты являются новыми в литературе по априорным оценкам ошибок и сверхсходимости $P_0^2 - P_1$ смешанных методов конечных элементов для эллиптических задач граничного управления.

Нас интересуют следующие задачи граничного управления для переменных состояния $\boldsymbol{p}$, y и управления u с интегральным ограничением управления:

$$\min_{u\in U_{\mathrm{ad}}} \left\{ \frac{1}{2}\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_d\|^2 + \frac{1}{2}\|y-y_d\|^2 + \frac{\nu}{2}\|, u\|_{0,\partial\Omega}^2 \right\}, \tag{1.1}$$

подчиняющимся уравнению состояния

$$-\mathrm{div}(A(x)\nabla y) + cy = f, \quad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

которое можно записать в виде системы первого порядка:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{p} + cy = f, \qquad \boldsymbol{p} = -A(x)\nabla y, \quad x \in \Omega, \tag{1.3}$$

с граничым условием

$$A(x)\nabla y \cdot \boldsymbol{n} = u + z_b, \quad x \in \partial\Omega, \tag{1.4}$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль на $\partial\Omega$. U_{ad} — допустимое множество переменной управления, определяемое следующим образом:

$$U_{\mathrm{ad}} = \left\{ u \in L^2(\partial\Omega) : \int_{\partial\Omega} u\,dx \geq 0 \right\}. \tag{1.5}$$

Предположим, что $c \geq c_1 > 0$, $c \in L^\infty(\Omega)$, $y_d \in L^2(\Omega)$, $z_b \in L^2(\partial\Omega)$, $\boldsymbol{p}_d \in (L^2(\Omega))^2$ и ν — фиксированное положительное число. Коэффициент $A(x) = (a_{ij}(x))$ является симметричной матричной функцией с $a_{ij}(x) \in W^{1,\infty}(\Omega)$, удовлетворяющей условию эллиптичности

$$a_*|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq a^*|\xi|^2 \quad \forall\ (\xi, x) \in \mathbb{R}^2 \times \overline{\Omega}, \quad 0 < a_* < a^*.$$

Статья построена следующим образом. В пункте 2 мы строим $P_0^2 - P_1$ смешанную конечно-элементную схему аппроксимации для задачи граничного управления (1.1)–(1.4) и даем эквивалентные условия оптимальности. В п. 3 мы получаем не только априорные оценки ошибки для всех переменных, но также результат по сверхсходимости для переменной управления с помощью оператора проектирования для постобработки.

В последнем пункте мы кратко суммируем результаты, полученные в предыдущих пунктах, и обсуждаем будущую работу.

В этой статье приняты стандартные обозначения: $W^{m,p}(\Omega)$ для пространств Соболева на Ω с нормой $\|\cdot\|_{m,p}$, задаваемой $\|v\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p$, и полунормой $|\cdot|_{m,p}$, задаваемой $|v|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p$. Аналогичным образом мы можем определить пространство $W^{m,p}(\partial\Omega)$. Для $p = 2$ обозначим $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ и $\|\cdot\|_m = \|\cdot\|_{m,2}$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{0,2}$. Кроме того, C обозначает общую положительную постоянную, не зависящую от h, где h — пространственный шаг сетки для дискретизации управления и состояния.

2. Смешанные методы для задач оптимального управления

В этом пункте мы построим $P_0^2 - P_1$ смешанную схему конечно-элементной аппроксимации задачи (1.1)–(1.4). Для простоты предположим, что область Ω представляет собой выпуклый многоугольник.

Пусть

$$\boldsymbol{V} = (L^2(\Omega))^2 \quad \text{и} \quad W = H^1(\Omega). \tag{2.1}$$

Как в [6], для (1.3) мы получим следующую смешанную вариационную форму:

$$-(\boldsymbol{p}, \nabla w) + (cy, w) = (f, w) + (u + z_b, w)_{\partial\Omega}\ \forall\ w \in W, \tag{2.2}$$

$$(A^{-1}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) + (\nabla y, \boldsymbol{v}) = 0\ \forall\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}, \tag{2.3}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L^2(\Omega)$, а $(\cdot,\cdot)_{\partial\Omega}$ — скалярное произведение в $L^2(\partial\Omega)$.

Теперь преобразуем (1.1)–(1.4) в следующую слабую форму: найти $(\boldsymbol{p}, y, u) \in \boldsymbol{V} \times W \times U_{\mathrm{ad}}$ так, что

$$\min_{u \in U_{\mathrm{ad}}} \left\{ \frac{1}{2}\|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_d\|^2 + \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2 + \frac{\nu}{2}\|u\|_{0,\partial\Omega}^2 \right\}, \tag{2.4}$$

$$-(\boldsymbol{p}, \nabla w) + (cy, w) = (f, w) + (u + z_b, w)_{\partial\Omega}\ \forall\ w \in W, \tag{2.5}$$

$$(A^{-1}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) + (\nabla y, \boldsymbol{v}) = 0\ \forall\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}. \tag{2.6}$$

Поскольку целевой функционал является выпуклым, то из [15] следует, что задача оптимального управления (2.4)–(2.6) имеет единственное решение $(\boldsymbol{p}, y, u)$ и что триплет $(\boldsymbol{p}, y, u)$ является решением (2.4)–(2.6), если и только если имеется сопряженное состояние $(\boldsymbol{q}, z) \in \boldsymbol{V} \times W$ такое, что $(\boldsymbol{p}, y, \boldsymbol{q}, z, u)$ удовлетворяет следующим условиям оптимальности:

$$-(\boldsymbol{p}, \nabla w) + (cy, w) = (f, w) + (u + z_b, w)_{\partial\Omega} \ \forall\ w \in W, \tag{2.7}$$

$$(A^{-1}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) + (\nabla y, \boldsymbol{v}) = 0 \ \forall\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}, \tag{2.8}$$

$$(\boldsymbol{q}, \nabla w) + (cz, w) = (y - y_d, w) \ \forall\ w \in W, \tag{2.9}$$

$$(A^{-1}\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) - (\nabla z, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_d, \boldsymbol{v}) \ \forall\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}, \tag{2.10}$$

$$(\nu u + z, \tilde{u} - u)_{\partial\Omega} \geq 0 \ \forall\ \tilde{u} \in U_{\mathrm{ad}}. \tag{2.11}$$

Как в [19], неравенство (2.11) можно представить следующим образом:

$$u = \Big(\max\Big\{0, \overline{z|_{\partial\Omega}}\Big\} - z\ |_{\partial\Omega} \Big) \Big/ \nu, \tag{2.12}$$

где $\overline{z|_{\partial\Omega}} = \dfrac{\int_{\partial\Omega} z\,dx}{\int_{\partial\Omega} 1\,dx}$.

Пусть $\mathcal{T}_h$ — регулярная триангуляция многоугольной области Ω, h_T — диаметр элемента T и $h = \max h_T$. Пусть $\partial\mathcal{T}_h$ обозначает множество ребер всех элементов. Определим $\boldsymbol{V}_h \times W_h \subset \boldsymbol{V} \times W$ следующей парой конечных элементов $P_0^2 - P_1$ [6, 24]:

$$\boldsymbol{V}_h = \{\boldsymbol{v}_h = (\boldsymbol{v}_{1h}, \boldsymbol{v}_{2h}) \in \boldsymbol{V} | \boldsymbol{v}_{1h}, \boldsymbol{v}_{2h} \in P_0(T) \ \forall\ T \in \mathcal{T}_h\},$$
$$W_h = \{w_h \in C^0(\Omega) \cap W | w_h \in P_1(T) \ \forall\ T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Приближенное пространство управления задается следующим образом:

$$U_h := \{\tilde{u}_h \in U_{\mathrm{ad}} : \forall\ l \in \partial\mathcal{T}_h \cap \partial\Omega,\ \tilde{u}_h|_l = \mathrm{const}\}.$$

Прежде чем представить смешанную схему конечных элементов, введем три проекционных оператора. Сначала определим лагранжеву интерполяцию [7] $I_h :\ W \to W_h$, удовлетворяющую

$$\|\phi - I_h\phi\|_s \leq Ch^{2-s}\|\phi\|_2, \quad s = 0, 1,\ \forall\ \phi \in H^2(\Omega). \tag{2.13}$$

Затем определим стандартную L^2-проекцию [7] $\Pi_h :\ \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}_h$ таким образом: для любого $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{V}$

$$(\boldsymbol{q} - \Pi_h\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}_h) = 0 \ \ \forall\ \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h, \tag{2.14}$$

$$\|\Pi_h\boldsymbol{q}\| \leq C\|\boldsymbol{q}\|, \tag{2.15}$$

$$\|\boldsymbol{q} - \Pi_h\boldsymbol{q}\| \leq Ch\|\boldsymbol{q}\|_1 \ \ \forall\ \boldsymbol{q} \in (H^1(\Omega))^2. \tag{2.16}$$

Наконец, пусть $Q_h u \in U_h$ — L^2-проекция u, такая, что

$$Q_h u\ |_l = \frac{\int_l u\,dx}{\int_l 1\,dx} \ \ \forall\ l \in \partial\mathcal{T}_h \cap \partial\Omega. \tag{2.17}$$

Мы имеем следующее свойство аппроксимации:

$$\|u - Q_h u\|_{-s,\partial\Omega} \leq Ch^{1+s}\|u\|_{1,\partial\Omega}, \quad s = 0, 1,\ \forall\ u \in W^{1,2}(\partial\Omega). \tag{2.18}$$

Тогда $P_0^2 - P_1$ смешанная конечно-элементная дискретизация (2.4)–(2.6) состоит в следующем: найти $(\boldsymbol{p}_h, y_h, u_h) \in \boldsymbol{V}_h \times W_h \times U_h$ такое, что

$$\min_{u_h\in U_h}\left\{\frac{1}{2}\|\boldsymbol{p}_h-\boldsymbol{p}_d\|^2+\frac{1}{2}\|y_h-y_d\|^2+\frac{\nu}{2}\|u_h\|^2_{0,\partial\Omega}\right\} \tag{2.19}$$

$$-(\boldsymbol{p}_h,\nabla w_h)+(cy_h,w_h)=(f,w_h)+(u_h+z_b,w_h)_{\partial\Omega}\ \forall\ w_h\in W_h, \tag{2.20}$$

$$(A^{-1}\boldsymbol{p}_h,\boldsymbol{v}_h)+(\nabla y_h,\boldsymbol{v}_h)=0\ \forall\ \boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}_h. \tag{2.21}$$

Как и в непрерывном случае, задача оптимального управления (2.19)–(2.21) имеет единственное решение $(\boldsymbol{p}_h,y_h,u_h)$, и триплет $(\boldsymbol{p}_h,y_h,u_h)$ является решением (2.19)–(2.21), если и только если имеется сопряженное состояние $(\boldsymbol{q}_h,z_h)\in\boldsymbol{V}_h\times W_h$ такое, что $(\boldsymbol{p}_h,y_h,\boldsymbol{q}_h,z_h,u_h)$ удовлетворяет следующим условиям оптимальности:

$$-(\boldsymbol{p}_h,\nabla w_h)+(cy_h,w_h)=(f,w_h)+(u_h+z_b,w_h)_{\partial\Omega}\ \forall\ w_h\in W_h, \tag{2.22}$$

$$(A^{-1}\boldsymbol{p}_h,\boldsymbol{v}_h)+(\nabla y_h,\boldsymbol{v}_h)=0\ \forall\ \boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}_h, \tag{2.23}$$

$$(\boldsymbol{q}_h,\nabla w_h)+(cz_h,w_h)=(y_h-y_d,w_h)\ \forall\ w_h\in W_h, \tag{2.24}$$

$$(A^{-1}\boldsymbol{q}_h,\boldsymbol{v}_h)-(\nabla z_h,\boldsymbol{v}_h)=(\boldsymbol{p}_h-\boldsymbol{p}_d,\boldsymbol{v}_h)\ \forall\ \boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}_h, \tag{2.25}$$

$$(\nu u_h+z_h,\tilde{u}_h-u_h)_{\partial\Omega}\geq 0\ \forall\ \tilde{u}_h\in U_h. \tag{2.26}$$

В остальной части статьи мы будем использовать некоторые промежуточные переменные. Для любого $\tilde{u}\in U_{\mathrm{ad}}$ определим решение с дискретным состоянием $(\boldsymbol{p}_h(\tilde{u}),y_h(\tilde{u}),$ $\boldsymbol{q}_h(\tilde{u}),z_h(\tilde{u}))\in(\boldsymbol{V}_h\times W_h)^2$, связанное с $\tilde{u}$, которое удовлетворяет

$$-(\boldsymbol{p}_h(\tilde{u}),\nabla w_h)+(cy_h(\tilde{u}),w_h)=(f,w_h)+(\tilde{u}+z_b,w_h)_{\partial\Omega}\ \forall\ w_h\in W_h, \tag{2.27}$$

$$(A^{-1}\boldsymbol{p}_h(\tilde{u}),\boldsymbol{v}_h)+(\nabla y_h(\tilde{u}),\boldsymbol{v}_h)=0\ \forall\ \boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}_h, \tag{2.28}$$

$$(\boldsymbol{q}_h(\tilde{u}),\nabla w_h)+(cz_h(\tilde{u}),w_h)=(y_h(\tilde{u})-y_d,w_h)\ \forall\ w_h\in W_h, \tag{2.29}$$

$$(A^{-1}\boldsymbol{q}_h(\tilde{u}),\boldsymbol{v}_h)-(\nabla z_h(\tilde{u}),\boldsymbol{v}_h)=(\boldsymbol{p}_h(\tilde{u})-\boldsymbol{p}_d,\boldsymbol{v}_h)\ \forall\ \boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}_h. \tag{2.30}$$

Таким образом, как было определено ранее, точное и численное решения можно записать следующим образом:

$$(\boldsymbol{p},y,\boldsymbol{q},z)=(\boldsymbol{p}(u),y(u),\boldsymbol{q}(u),z(u)),$$
$$(\boldsymbol{p}_h,y_h,\boldsymbol{q}_h,z_h)=(\boldsymbol{p}_h(u_h),y_h(u_h),\boldsymbol{q}_h(u_h),z_h(u_h)).$$

3. Априорные оценки ошибки и сверхсходимость

В данном пункте сначала обсудим априорные оценки ошибок для всех переменных, а затем получим результат по сверхсходимости для переменной управления.

Напомним следующий результат по регулярности.

Лемма 3.1 [7]. *Для каждой функции $F\in L^2(\Omega)$ решение ϕ*

$$-\mathrm{div}(A\nabla\phi)+c\phi=F\quad \text{в }\Omega,\ \ A\nabla\phi\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega}=0, \tag{3.1}$$

принадлежит $H^2(\Omega)$. Кроме того, существует положительная постоянная C такая, что

$$\|\phi\|_2\leq C\|F\|. \tag{3.2}$$

Для получения основных результатов нам необходимы следующие леммы.

Лемма 3.2. *Пусть* $(\boldsymbol{p}_h(u), y_h(u), \boldsymbol{q}_h(u), z_h(u))$ *и* $(\boldsymbol{p}_h(Q_hu), y_h(Q_hu), \boldsymbol{q}_h(Q_hu), z_h(Q_hu))$ *— решения* (2.27)–(2.30) *при* $\tilde{u} = u$ *и* $\tilde{u} = Q_hu$ *соответственно. Тогда мы имеем*:

$$\|\nabla(y_h(u) - y_h(Q_hu))\| + \|\boldsymbol{p}_h(u) - \boldsymbol{p}_h(Q_hu)\| \le Ch, \tag{3.3}$$

$$\|\nabla(z_h(u) - z_h(Q_hu))\| + \|\boldsymbol{q}_h(u) - \boldsymbol{q}_h(Q_hu)\| \le Ch, \tag{3.4}$$

$$\|y_h(u) - y_h(Q_hu)\| + h^{\frac{1}{2}}\|z_h(u) - z_h(Q_hu)\| \le Ch^2, \tag{3.5}$$

$$\|y_h(u) - y_h(Q_hu)\|_{0,\partial\Omega} + h^{\frac{1}{4}}\|z_h(u) - z_h(Q_hu)\|_{0,\partial\Omega} \le Ch^{\frac{3}{2}}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Из уравнений (2.27)–(2.30) легко получить следующие уравнения для ошибок:

$$-(\boldsymbol{p}_h(u) - \boldsymbol{p}_h(Q_hu), \nabla w_h) + (c(y_h(u) - y_h(Q_hu)), w_h) = (u - Q_hu, w_h)_{\partial\Omega}, \tag{3.7}$$

$$(A^{-1}(\boldsymbol{p}_h(u) - \boldsymbol{p}_h(Q_hu)), \boldsymbol{v}_h) + (\nabla(y_h(u) - y_h(Q_hu)), \boldsymbol{v}_h) = 0, \tag{3.8}$$

$$(\boldsymbol{q}_h(u) - \boldsymbol{q}_h(Q_hu), \nabla w_h) + (c(z_h(u) - z_h(Q_hu)), w_h) = (y_h(u) - y_h(Q_hu), w_h), \tag{3.9}$$

$$(A^{-1}(\boldsymbol{q}_h(u) - \boldsymbol{q}_h(Q_hu)), \boldsymbol{v}_h) - (\nabla(z_h(u) - z_h(Q_hu)), \boldsymbol{v}_h) = (\boldsymbol{p}_h(u) - \boldsymbol{p}_h(Q_hu), \boldsymbol{v}_h) \tag{3.10}$$

$\forall\ \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_h$ и $w_h \in W_h$.

Пусть $w_h = y_h(u) - y_h(Q_hu)$ в (3.7) и $\boldsymbol{v}_h = \boldsymbol{p}_h(u) - \boldsymbol{p}_h(Q_hu)$ в (3.8). Сложив два уравнения, получим

$$\left\|A^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{p}_h(u) - \boldsymbol{p}_h(Q_hu))\right\|^2 + \left\|c^{\frac{1}{2}}(y_h(u) - y_h(Q_hu))\right\|^2 = (u - Q_hu, y_h(u) - y_h(Q_hu))_{\partial\Omega}. \tag{3.11}$$

Используя неравенство Коши (2.18) и неравенство

$$\|y_h(u) - y_h(Q_hu)\|_{0,\partial\Omega} \le C\|y_h(u) - y_h(Q_hu)\|_1,$$

заключаем, что

$$\begin{aligned}
&(u - Q_hu, y_h(u) - y_h(Q_hu))_{\partial\Omega} \\
&\qquad \le C\|u - Q_hu\|^2_{0,\partial\Omega} + \varepsilon\|y_h(u) - y_h(Q_hu)\|^2_{0,\partial\Omega} \\
&\qquad \le Ch\|u\|^2_{1,\partial\Omega} + C\varepsilon\|y_h(u) - y_h(Q_hu)\|^2_1 \\
&\qquad \le Ch\|u\|^2_{1,\partial\Omega} + C\varepsilon(\|y_h(u) - y_h(Q_hu)\|^2 + \|\nabla(y_h(u) - y_h(Q_hu))\|^2),
\end{aligned} \tag{3.12}$$

где ε — произвольная малая положительная постоянная.

При выборе $\boldsymbol{v}_h = \nabla(y_h(u) - y_h(Q_hu))$ в (3.8) из неравенства Коши и предположения по A следует, что

$$\|\nabla(y_h(u) - y_h(Q_hu))\| \le C\|\boldsymbol{p}_h(u) - \boldsymbol{p}_h(Q_hu)\|. \tag{3.13}$$

Для достаточно малого ε, объединив предположения для A и c, и (3.11)–(3.13), мы видим, что

$$\|\boldsymbol{p}_h(u) - \boldsymbol{p}_h(Q_hu)\| + \|y_h(u) - y_h(Q_hu)\|_1 \le Ch\|u\|_{1,\partial\Omega}. \tag{3.14}$$

Пусть $\phi \in H^2(\Omega)$ — решение (3.1) при $F = y_h(u) - y_h(Q_hu)$. Мы видим из (3.7) и (3.8), что

$$
\begin{aligned}
\|y_h(u)-y_h(Q_hu)\|^2 =&(y_h(u)-y_h(Q_hu),-\mathrm{div}(A\nabla\phi))+(c(y_h(u)-y_h(Q_hu)),\phi)\\
=&(A\nabla\phi,\nabla(y_h(u)-y_h(Q_hu)))+(c(y_h(u)-y_h(Q_hu)),\phi)\\
=&(A\nabla\phi-\Pi_h(A\nabla\phi),\nabla(y_h(u)-y_h(Q_hu)))-\\
&(A^{-1}(\boldsymbol{p}_h(u)-\boldsymbol{p}_h(Q_hu)),\Pi_h(A\nabla\phi))+(c(y_h(u)-y_h(Q_hu)),\phi)\\
=&(A\nabla\phi-\Pi_h(A\nabla\phi),\nabla(y_h(u)-y_h(Q_hu)))+\\
&(A^{-1}(\boldsymbol{p}_h(u)-\boldsymbol{p}_h(Q_hu)),A\nabla\phi-\Pi_h(A\nabla\phi))-\\
&(\boldsymbol{p}_h(u)-\boldsymbol{p}_h(Q_hu),\nabla(\phi-I_h\phi))+(c(y_h(u)-y_h(Q_hu)),\phi-I_h\phi)+\\
&(u-Q_hu,I_h\phi-\phi)_{\partial\Omega}+(u-Q_hu,\phi)_{\partial\Omega}\\
\le&Ch\|A\|_{1,\infty}\|\phi\|_2\|\nabla(y_h(u)-y_h(Q_hu))\|+\\
&Ch\|A^{-1}\|_{0,\infty}\|A\|_{1,\infty}\|\phi\|_2\|\boldsymbol{p}_h(u)-\boldsymbol{p}_h(Q_hu)\|+\\
&Ch\|\phi\|_2\|\boldsymbol{p}_h(u)-\boldsymbol{p}_h(Q_hu)\|+Ch\|c\|_{0,\infty}\|y_h(u)-y_h(Q_hu)\|\cdot\|\phi\|_2+\\
&C\|u-Q_hu\|_{0,\partial\Omega}\|I_h\phi-\phi\|_{0,\partial\Omega}+C\|u-Q_hu\|_{-1,\partial\Omega}\|\phi\|_{1,\partial\Omega}\\
\le&Ch\|\phi\|_2(\|\boldsymbol{p}_h(u)-\boldsymbol{p}_h(Q_hu)\|+\|y_h(u)-y_h(Q_hu)\|_1)+\\
&Ch\|u\|_{1,\partial\Omega}\|I_h\phi-\phi\|_1+Ch^2\|u\|_{1,\partial\Omega}\|\phi\|_2\\
\le&Ch^2\|u\|_{1,\partial\Omega}\|\phi\|_2,
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

где мы использовали неравенство Коши, (2.13), (2.16), (2.18), (3.14), оценки $\|\phi\|_{1,\partial\Omega}\le C\|\phi\|_2$ и

$$\|I_h\phi-\phi\|_{0,\partial\Omega}\le C\|I_h\phi-\phi\|_1\le Ch\|\phi\|_2.$$

Тогда из (3.2) и (3.15) легко получить

$$\|y_h(u)-y_h(Q_hu)\|\le Ch^2\|u\|_{1,\partial\Omega}. \tag{3.16}$$

Пусть $w_h=z_h(u)-z_h(Q_hu)$ в (3.9) и $\boldsymbol{v}_h=\boldsymbol{q}_h(u)-\boldsymbol{q}_h(Q_hu)$ в (3.10). Тогда мы получим

$$
\begin{aligned}
&\|A^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{q}_h(u)-\boldsymbol{q}_h(Q_hu))\|^2+\|c^{\frac{1}{2}}(z_h(u)-z_h(Q_hu))\|^2\\
&\quad=(y_h(u)-y_h(Q_hu),z_h(u)-z_h(Q_hu))+(\boldsymbol{p}_h(u)-\boldsymbol{p}_h(Q_hu),\boldsymbol{q}_h(u)-\boldsymbol{q}_h(Q_hu)).
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Используя неравенство Коши и предположения для A и c, видно, что

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{q}_h(u)-\boldsymbol{q}_h(Q_hu)\|+\|z_h(u)-z_h(Q_hu)\|\\
&\qquad\le C(\|y_h(u)-y_h(Q_hu)\|+\|\boldsymbol{p}_h(u)-\boldsymbol{p}_h(Q_hu)\|).
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Пусть $\boldsymbol{v}_h=\nabla(z_h(u)-z_h(Q_hu))$ в (3.10), подобно (3.13) мы легко получим

$$\|\nabla(z_h(u)-z_h(Q_hu))\|\le C(\|\boldsymbol{q}_h(u)-\boldsymbol{q}_h(Q_hu))\|+\|\boldsymbol{p}_h(u)-\boldsymbol{p}_h(Q_hu)\|). \tag{3.19}$$

Пусть $\phi\in H^2(\Omega)$ — решение (3.1) при $F=z_h(u)-z_h(Q_hu)$. Из (3.8)–(3.10) мы имеем

$$
\begin{aligned}
\|z_h(u)-z_h(Q_hu)\|^2=&(z_h(u)-z_h(Q_hu),-\mathrm{div}(A\nabla\phi))+(c(z_h(u)-z_h(Q_hu)),\phi)\\
=&(A\nabla\phi,\nabla(z_h(u)-z_h(Q_hu)))+(c(z_h(u)-z_h(Q_hu)),\phi)\\
=&(A\nabla\phi-\Pi_h(A\nabla\phi),\nabla(z_h(u)-z_h(Q_hu)))+(c(z_h(u)-z_h(Q_hu)),\phi)+\\
&(A^{-1}(\boldsymbol{q}_h(u)-\boldsymbol{q}_h(Q_hu)),\Pi_h(A\nabla\phi))-(\boldsymbol{p}_h(u)-\boldsymbol{p}_h(Q_hu),\Pi_h(A\nabla\phi))\\
=&(A\nabla\phi-\Pi_h(A\nabla\phi),\nabla(z_h(u)-z_h(Q_hu)))+(c(z_h(u)-z_h(Q_hu)),\phi)+\\
&(A^{-1}(\boldsymbol{q}_h(u)-\boldsymbol{q}_h(Q_hu)),\Pi_h(A\nabla\phi)-A\nabla\phi)+
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{q}_h(u)-\boldsymbol{q}_h(Q_hu),\nabla\phi)+(\boldsymbol{p}_h(u)-\boldsymbol{p}_h(Q_hu),A\nabla\phi-\Pi_h(A\nabla\phi))-\\
&(\boldsymbol{p}_h(u)-\boldsymbol{p}_h(Q_hu),A\nabla\phi)\\
=&(A\nabla\phi-\Pi_h(A\nabla\phi),\nabla(z_h(u)-z_h(Q_hu)))+(c(z_h(u)-z_h(Q_hu)),\phi-I_h\phi)+\\
&(A^{-1}(\boldsymbol{q}_h(u)-\boldsymbol{q}_h(Q_hu)),\Pi_h(A\nabla\phi)-A\nabla\phi)+\\
&(\boldsymbol{q}_h(u)-\boldsymbol{q}_h(Q_hu),\nabla(\phi-I_h\phi))+(y_h(u)-y_h(Q_hu),I_h\phi-\phi)+\\
&(y_h(u)-y_h(Q_hu),\phi)+(A^{-1}(\boldsymbol{p}_h(u)-\boldsymbol{p}_h(Q_hu)),\Pi_h(A^2\nabla\phi)-A^2\nabla\phi)+\\
&(\nabla(y_h(u)-y_h(Q_hu)),\Pi_h(A^2\nabla\phi)-A^2\nabla\phi)-(y_h(u)-y_h(Q_hu),\operatorname{div}(A^2\nabla\phi))+\\
&(y_h(u)-y_h(Q_hu),A^2\nabla\phi\cdot\boldsymbol{n})_{\partial\Omega}+(\boldsymbol{p}_h(u)-\boldsymbol{p}_h(Q_hu)),A\nabla\phi-\Pi_h(A\nabla\phi))\\
\le&Ch\|A^{-1}\|_{0,\infty}\|A\|_{1,\infty}\|\phi\|_2\|\boldsymbol{q}_h(u)-\boldsymbol{q}_h(Q_hu)\|+Ch\|c\|_{0,\infty}\|z_h(u)-z_h(Q_hu)\|\cdot\|\phi\|_2+\\
&Ch\|A\|_{1,\infty}\|\phi\|_2\|\nabla(z_h(u)-z_h(Q_hu))\|+Ch\|\phi\|_2\|\boldsymbol{q}_h(u)-\boldsymbol{q}_h(Q_hu)\|+\\
&Ch\|\phi\|_2\|y_h(u)-y_h(Q_hu)\|+C\|\phi\|\cdot\|y_h(u)-y_h(Q_hu)\|+\\
&C\|\phi\|_2\|A\|^2_{1,\infty}\|y_h(u)-y_h(Q_hu)\|+Ch\|A\|^2_{1,\infty}\|\phi\|_2\|\nabla(y_h(u)-y_h(Q_hu))\|+\\
&Ch\|A^{-1}\|_{0,\infty}\|A\|^2_{1,\infty}\|\phi\|_2\|\boldsymbol{p}_h(u)-\boldsymbol{p}_h(Q_hu)\|+\\
&C\|A\|^2_{0,\infty,\partial\Omega}\|y_h(u)-y_h(Q_hu)\|_{0,\partial\Omega}\|\nabla\phi\cdot\boldsymbol{n}\|_{0,\partial\Omega}+\\
&Ch\|A\|_{1,\infty}\|\phi\|_2\|\boldsymbol{p}_h(u)-\boldsymbol{p}_h(Q_hu)\|\\
\le&Ch\|\phi\|_2(\|\boldsymbol{q}_h(u)-\boldsymbol{q}_h(Q_hu)\|+\|z_h(u)-z_h(Q_hu)\|_1)+\\
&Ch\|\phi\|_2(\|\boldsymbol{p}_h(u)-\boldsymbol{p}_h(Q_hu)\|+\|y_h(u)-y_h(Q_hu)\|_1)+\\
&C(\|y_h(u)-y_h(Q_hu)\|_{0,\partial\Omega}+\|y_h(u)-y_h(Q_hu)\|)\|\phi\|_2,
\end{aligned}\tag{3.20}$$

где мы также использовали неравенство Коши, (2.13), (2.16) и оценку

$$\|\nabla\phi\cdot\boldsymbol{n}\|_{0,\partial\Omega}\le\|\nabla\phi\|_{0,\partial\Omega}\le C\|\nabla\phi\|_1\le C\|\phi\|_2.$$

Используя неравенство $\|\nu\|_{0,\partial\Omega}\le C\|\nu\|_{\frac12,\Omega}\le C\|\nu\|^{\frac12}\|\nu\|_1^{\frac12}$, (3.14) и (3.16), получим

$$\|y_h(u)-y_h(Q_hu)\|_{0,\partial\Omega}\le C\|y_h(u)-y_h(Q_hu)\|^{\frac12}\|y_h(u)-y_h(Q_hu)\|_1^{\frac12}\le Ch^{\frac32}\|u\|_{1,\partial\Omega}.\tag{3.21}$$

Используя (3.2), (3.14), (3.16), (3.18)–(3.21), мы получим

$$h^{\frac12}\|\nabla(z_h(u)-z_h(Q_hu))\|+h^{\frac12}\|\boldsymbol{q}_h(u)-\boldsymbol{q}_h(Q_hu)\|+\|z_h(u)-z_h(Q_hu)\|\le Ch^{\frac32}\|u\|_{1,\partial\Omega}.\tag{3.22}$$

Аналогично (3.21), используя (3.22), имеем

$$\|z_h(u)-z_h(Q_hu)\|_{0,\partial\Omega}\le Ch^{\frac54}\|u\|_{1,\partial\Omega}.\tag{3.23}$$

Таким образом, доказательство леммы завершено. □

Лемма 3.3. *Пусть* $(\boldsymbol{p},y,\boldsymbol{q},z)$ *— решение* (2.7)–(2.11) *и* $(\boldsymbol{p}_h(u),y_h(u),\boldsymbol{q}_h(u),z_h(u))$ *— решение* (2.27)–(2.30) *при* $\tilde u=u$. *Если решение удовлетворяет*

$$\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\in(H^1(\Omega))^2 \text{ и } y,z\in H^2(\Omega),$$

мы имеем

$$\|\nabla(y-y_h(u))\|+\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h(u)\|\le Ch, \tag{3.24}$$
$$\|\nabla(z-z_h(u))\|+\|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_h(u)\|\le Ch, \tag{3.25}$$
$$\|y-y_h(u)\|+h^{\frac{1}{2}}\|z-z_h(u)\|\le Ch^2, \tag{3.26}$$
$$\|y-y_h(u)\|_{0,\partial\Omega}+h^{\frac{1}{4}}\|z-z_h(u)\|_{0,\partial\Omega}\le Ch^{\frac{3}{2}}. \tag{3.27}$$

Доказательство. Из уравнений (2.7)–(2.10) и (2.27)–(2.30), поскольку $\nabla W_h\subset \boldsymbol{V}_h$, используя (2.14), легко получить следующие уравнения для ошибок:

$$-(\Pi_h\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h(u),\nabla w_h)+(c(I_hy-y_h(u)),w_h)=-(c(y-I_hy),w_h), \tag{3.28}$$
$$(A^{-1}(\Pi_h\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h(u)),\boldsymbol{v}_h)+(\nabla(I_hy-y_h(u)),\boldsymbol{v}_h)=(A^{-1}(\Pi_h\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p})-\nabla(y-I_hy),\boldsymbol{v}_h), \tag{3.29}$$
$$(\Pi_h\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_h(u),\nabla w_h)+(c(I_hz-z_h(u)),w_h)=-(c(z-I_hz),w_h)+(y-y_h(u),w_h), \tag{3.30}$$
$$(A^{-1}(\Pi_h\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_h(u)),\boldsymbol{v}_h)-(\nabla(I_hz-z_h(u)),\boldsymbol{v}_h)=(A^{-1}(\Pi_h\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q})+\nabla(z-I_hz),\boldsymbol{v}_h)+ (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h(u)),\boldsymbol{v}_h) \tag{3.31}$$

$\forall\ \boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}_h$ и $w_h\in W_h$.

Пусть $w_h=I_hy-y_h(u)$ в (3.28) и $\boldsymbol{v}_h=\Pi_h\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h(u)$ в (3.29). Тогда имеем

$$\begin{aligned}&\|A^{-\frac{1}{2}}(\Pi_h\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h(u))\|^2+\|c^{\frac{1}{2}}(I_hy-y_h(u))\|^2\\&=-(c(y-I_hy),I_hy-y_h(u))+(A^{-1}(\Pi_h\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p})-\nabla(y-I_hy),\Pi_h\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h(u)).\end{aligned} \tag{3.32}$$

Используя неравенство Коши, предположения по A и c, (2.13) и (2.16), имеем

$$\|\Pi_h\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h(u)\|+\|I_hy-y_h(u)\|\le Ch(\|y\|_2+\|\boldsymbol{p}\|_1). \tag{3.33}$$

Пусть $\boldsymbol{v}_h=\nabla(I_hy-y_h(u))$ в (3.29). Тогда из предположения по A, неравенства Коши, (2.13) и (2.16) следует, что

$$\|\nabla(I_hy-y_h(u))\|\le C\|\Pi_h\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h(u)\|+Ch(\|y\|_2+\|\boldsymbol{p}\|_1). \tag{3.34}$$

Пусть $\phi\in H^2(\Omega)$ является решением (3.1) при $F=y-y_h(u)$. Аналогично (3.15) находим, что

$$\begin{aligned}\|y-y_h(u)\|^2=&(A\nabla\phi-\Pi_h(A\nabla\phi),\nabla(y-y_h(u)))+\\&(A^{-1}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h(u)),A\nabla\phi-\Pi_h(A\nabla\phi))-\\&(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h(u),\nabla(\phi-I_h\phi))+(c(y(u_h)-y_h),\phi-I_h\phi)\\\le&Ch\|A\|_{1,\infty}\|\phi\|_2\|\nabla(y-y_h(u))\|+\\&Ch\|A^{-1}\|_{0,\infty}\|A\|_{1,\infty}\|\phi\|_2\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h(u)\|+\\&Ch\|\phi\|_2\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h(u)\|+Ch\|c\|_{0,\infty}\|y-y_h(u)\|\cdot\|\phi\|_2\\\le&Ch\|\phi\|_2(\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h(u)\|+\|\nabla(y-y_h(u))\|+\|y-y_h(u)\|).\end{aligned} \tag{3.35}$$

Используя (3.33)–(3.35), (3.2), (2.13), (2.16) и неравенство треугольника, получим

$$h\|\nabla(y-y_h(u))\|+h\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h(u)\|+\|y-y_h(u)\|\le Ch^2(\|y\|_2+\|\boldsymbol{p}\|_1). \tag{3.36}$$

Аналогичным образом, взяв $w_h=I_hz-z_h(u)$ в (3.30) и $\boldsymbol{v}_h=\Pi_h\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_h(u)$ в (3.31), легко получим

$$\|\Pi_h\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_h(u)\|+\|I_hz-z_h(u)\|\le C(\|y-y_h(u)\|+\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h(u)\|)+Ch(\|z\|_2+\|\boldsymbol{q}\|_1). \tag{3.37}$$

Выбрав $\boldsymbol{v}_h=\nabla(I_hz-z_h(u))$ в (3.31), аналогично (3.34) мы получим

$$\|\nabla(I_hz-z_h(u))\|\le C(\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h(u)\|+\|\Pi_h\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_h(u)\|)+Ch(\|z\|_2+\|\boldsymbol{q}\|_1). \tag{3.38}$$

Пусть $\phi\in H^2(\Omega)$ является решением (3.1) при $F=z-z_h(u)$. Аналогично (3.20) имеем

$$\begin{aligned}\|z-z_h(u)\|^2 =&(A\nabla\phi-\Pi_h(A\nabla\phi),\nabla(z-z_h(u)))+(c(z-z_h(u)),\phi-I_h\phi)+\\&(A^{-1}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_h(u)),\Pi_h(A\nabla\phi)-A\nabla\phi)+\\&(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_h(u),\nabla(\phi-I_h\phi))+(y-y_h(u),I_h\phi-\phi)+\\&(y-y_h(u),\phi)+(A^{-1}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h(u)),\Pi_h(A^2\nabla\phi)-A^2\nabla\phi)+\\&(\nabla(y-y_h(u)),\Pi_h(A^2\nabla\phi)-A^2\nabla\phi)-(y-y_h(u),\operatorname{div}(A^2\nabla\phi))+\\&(y-y_h(u),A^2\nabla\phi\cdot\boldsymbol{n})_{\partial\Omega}+(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h(u)),A\nabla\phi-\Pi_h(A\nabla\phi))\\\le&Ch\|A^{-1}\|_{0,\infty}\|A\|_{1,\infty}\|\phi\|_2\|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_h(u)\|+Ch\|c\|_{0,\infty}\|z-z_h(u)\|\cdot\|\phi\|_2+\\&Ch\|A\|_{1,\infty}\|\phi\|_2\|\nabla(z-z_h(u))\|+Ch\|\phi\|_2\|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_h(u)\|+\\&Ch\|\phi\|_2\|y-y_h(u)\|+C\|\phi\|\cdot\|y-y_h(u)\|+\\&C\|\phi\|_2\|A\|_{1,\infty}^2\|y-y_h(u)\|+Ch\|A\|_{1,\infty}^2\|\phi\|_2\|\nabla(y-y_h(u))\|+\\&Ch\|A^{-1}\|_{0,\infty}\|A\|_{1,\infty}^2\|\phi\|_2\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h(u)\|+\\&C\|A\|_{0,\infty,\partial\Omega}^2\|y-y_h(u)\|_{0,\partial\Omega}\|\nabla\phi\|_{0,\partial\Omega}+\\&Ch\|A\|_{1,\infty}\|\phi\|_2\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h(u)\|.\end{aligned} \tag{3.39}$$

Заметим, что

$$\|y-y_h(u)\|_{0,\partial\Omega}\le C\|y-y_h(u)\|^{\frac12}\|y-y_h(u)\|_1^{\frac12}\le Ch^{\frac32}(\|y\|_2+\|\boldsymbol{p}\|_1). \tag{3.40}$$

Объединив (3.36)–(3.40), (3.12), (3.13), (3.16) и неравенство треугольника, получим

$$\|z-z_h(u)\|+h^{\frac12}(\|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_h(u)\|+\|\nabla(z-z_h(u))\|)\le Ch^{\frac32}(\|y\|_2+\|\boldsymbol{p}\|_1+\|z\|_2+\|\boldsymbol{q}\|_1). \tag{3.41}$$

Тогда имеем

$$\|z-z_h(u)\|_{0,\partial\Omega}\le C\|z-z_h(u)\|^{\frac12}\|z-z_h(u)\|_1^{\frac12}\le Ch^{\frac54}(\|y\|_2+\|\boldsymbol{p}\|_1+\|z\|_2+\|\boldsymbol{q}\|_1). \tag{3.42}$$

Это завершает доказательство. □

Лемма 3.4. *Пусть* $(\boldsymbol{p}_h,y_h,\boldsymbol{q}_h,z_h)$ *и* $(\boldsymbol{p}_h(Q_hu),y_h(Q_hu),\boldsymbol{q}_h(Q_hu),z_h(Q_hu))$ — *решения* (2.27)–(2.30) *при* $\tilde u=u_h$ *и* $\tilde u=Q_hu$ *соответственно. Тогда мы имеем*

$$(u_h-Q_hu,z_h-z_h(Q_hu))_{\partial\Omega}\ge0. \tag{3.43}$$

Доказательство. Из уравнений (2.27)–(2.30) легко получить следующие уравнения для ошибок:

$$-(\boldsymbol{p}_h-\boldsymbol{p}_h(Q_hu),\nabla w_h)+(c(y_h-y_h(Q_hu)),w_h)=(u_h-Q_hu,w_h)_{\partial\Omega}, \tag{3.44}$$
$$(A^{-1}(\boldsymbol{p}_h-\boldsymbol{p}_h(Q_hu)),\boldsymbol{v}_h)+(\nabla(y_h-y_h(Q_hu)),\boldsymbol{v}_h)=0, \tag{3.45}$$
$$(\boldsymbol{q}_h-\boldsymbol{q}_h(Q_hu),\nabla w_h)+(c(z_h-z_h(Q_hu)),w_h)=(y_h-y_h(Q_hu),w_h), \tag{3.46}$$
$$(A^{-1}(\boldsymbol{q}_h-\boldsymbol{q}_h(Q_hu)),\boldsymbol{v}_h)-(\nabla(z_h-z_h(Q_hu)),\boldsymbol{v}_h)=(\boldsymbol{p}_h-\boldsymbol{p}_h(Q_hu),\boldsymbol{v}_h), \tag{3.47}$$

$\forall\ \boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}_h$ и $w_h\in W_h$.

Пусть $w_h=z_h-z_h(Q_hu)$ в (3.44), $\boldsymbol{v}_h=\boldsymbol{q}_h-\boldsymbol{q}_h(Q_hu)$ в (3.45), $w_h=y_h-y_h(Q_hu)$ в (3.46) и $\boldsymbol{v}_h=\boldsymbol{p}_h-\boldsymbol{p}_h(Q_hu)$ в (3.47) соответственно. Легко заметить, что

$$(u_h-Q_hu,z_h-z_h(Q_hu))_{\partial\Omega}=\|y_h(Q_hu)-y_h\|^2+\|\boldsymbol{p}_h(Q_hu)-\boldsymbol{p}_h\|^2, \tag{3.48}$$

что дает (3.43).

Используя такой же анализ устойчивости, что и в лемме 3.2, получим

Лемма 3.5. *Пусть* $(\boldsymbol{p}_h,y_h,\boldsymbol{q}_h,z_h)$ *и* $(\boldsymbol{p}_h(Q_hu),y_h(Q_hu),\boldsymbol{q}_h(Q_hu),z_h(Q_hu))$ *— решения* (2.27)–(2.30) *при* $\tilde u=u_h$ *и* $\tilde u=Q_hu$ *соответственно. Тогда мы имеем*

$$\|\nabla(y_h(Q_hu)-y_h)\|+\|\boldsymbol{p}_h(Q_hu)-\boldsymbol{p}_h\|\le C\|Q_hu-u_h\|_{0,\partial\Omega}, \tag{3.49}$$
$$\|\nabla(z_h(Q_hu)-z_h)\|+\|\boldsymbol{q}_h(Q_hu)-\boldsymbol{q}_h\|\le C\|Q_hu-u_h\|_{0,\partial\Omega}, \tag{3.50}$$
$$\|y_h(Q_hu)-y_h\|+\|z_h(Q_hu)-z_h\|\le C\|Q_hu-u_h\|_{0,\partial\Omega}, \tag{3.51}$$
$$\|y_h(Q_hu)-y_h\|_{0,\partial\Omega}+\|z_h(Q_hu)-z_h\|_{0,\partial\Omega}\le C\|Q_hu-u_h\|_{0,\partial\Omega}. \tag{3.52}$$

Теперь обсудим свойство сверхсходимости для переменной управления.

Лемма 3.6. *Пусть* u, u_h *— решения* (2.7)–(2.11), (2.22)–(2.26) *соответственно. Предположим, что все условия лемм 3.2–3.3 выполняются. Тогда мы имеем*

$$\|Q_hu-u_h\|_{0,\partial\Omega}\le Ch^{\frac{5}{4}}. \tag{3.53}$$

Доказательство. Возьмем $\tilde u=u_h$ в (2.11) и $\tilde u_h=Q_hu$ в (2.26) для получения следующих двух неравенств:

$$(\nu u+z,u_h-u)_{\partial\Omega}\ge 0$$

и

$$(\nu u_h+z_h,Q_hu-u_h)_{\partial\Omega}\ge 0.$$

Заметим, что $u_h-u=u_h-Q_hu+Q_hu-u$. Сложив эти два неравенства, получим

$$(\nu u_h-\nu u+z_h-z,Q_hu-u_h)_{\partial\Omega}+(\nu u+z,Q_hu-u)_{\partial\Omega}\ge 0. \tag{3.54}$$

Таким образом, используя (3.54) и определение Q_h, мы находим

$$\begin{aligned}\nu\|Q_hu-u_h\|^2_{0,\partial\Omega}=&\nu(Q_hu-u,Q_hu-u_h)_{\partial\Omega}+\nu(u-u_h,Q_hu-u_h)_{\partial\Omega}\\ \le&(z_h-z,Q_hu-u_h)_{\partial\Omega}+(\nu u+z,Q_hu-u)_{\partial\Omega}\\ =&(z_h-z_h(Q_hu),Q_hu-u_h)_{\partial\Omega}+(z_h(Q_hu)-z_h(u),Q_hu-u_h)_{\partial\Omega}+\\ &(z_h(u)-z,Q_hu-u_h)_{\partial\Omega}+(\nu u+z,Q_hu-u)_{\partial\Omega}\\ =:&\sum_{i=1}^4 J_i.\end{aligned} \tag{3.55}$$

Сначала из леммы 3.4 следует, что

$$J_1=-(u_h-Q_hu,z_h-z_h(Q_hu))_{\partial\Omega}\le 0. \tag{3.56}$$

Используя неравенство Коши и лемму 3.2, получим

$$J_2 \le Ch^{\frac{5}{2}} \|u\|^2_{1,\partial\Omega} + \frac{\nu}{4} \|Q_h u - u_h\|^2_{0,\partial\Omega}. \tag{3.57}$$

Аналогичным образом, используя неравенство Коши и лемму 3.3, имеем

$$J_3 \le Ch^{\frac{5}{2}} (\|y\|_2^2 + \|z\|_2^2 + \|\boldsymbol{p}\|_1^2 + \|\boldsymbol{q}\|_1^2) + \frac{\nu}{4} \|Q_h u - u_h\|^2_{0,\partial\Omega}. \tag{3.58}$$

Для J_4 из (2.12) и определения Q_h нам известно,что

$$J_4 = \max\left\{0, \overline{z|_{\partial\Omega}}\right\} \int_{\partial\Omega} (Q_h u - u)\, dx = 0. \tag{3.59}$$

Теперь мы можем получить (3.53) с использованием (3.55)–(3.59).

Используя леммы 3.2, 3.3, леммы 3.5, 3.6 и неравенство треугольника, получаем

Теорема 3.1. *Пусть* $(y, \boldsymbol{p}, z, \boldsymbol{q})$ *и* $(y_h, \boldsymbol{p}_h, z_h, \boldsymbol{q}_h)$ *— решения* (2.7)–(2.11) *и* (2.22)–(2.26) *соответственно. Предположим, что все условия лемм 3.2, 3.3 выполняются. Тогда имеем*

$$\|y - y_h\|_{0,\partial\Omega} + \|z - z_h\|_{0,\partial\Omega} \le Ch^{\frac{5}{4}}, \tag{3.60}$$

$$\|\nabla(y - y_h)\| + \|\nabla(z - z_h)\| + \|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_h\| + \|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_h\| \le Ch, \tag{3.61}$$

$$\|y - y_h\| + \|z - z_h\| \le Ch^{\frac{5}{4}}. \tag{3.62}$$

Используя лемму 3.6, (2.18) и неравенство треугольника, получим

Теорема 3.2. *Пусть* u, u_h *— решения* (2.7)–(2.11), (2.22)–(2.26) *соответственно. Предположим, что все условия лемм 3.2, 3.3 выполняются.*

Тогда мы имеем

$$\|u - u_h\|_{0,\partial\Omega} \le Ch. \tag{3.63}$$

Для увеличения точности аппроксимации в глобальном масштабе, аналогично случаю, рассмотренному в [19], построим следующий проекционный оператор постобработки дискретного сопряженного состояния на допустимое множество:

$$\hat{u} = \left(\max\left\{0, \overline{z_h|_{\partial\Omega}}\right\} - z_h|_{\partial\Omega} \right) \Big/ \nu, \tag{3.64}$$

где $\overline{z_h|_{\partial\Omega}} = \dfrac{\int_{\partial\Omega} z_h\, dx}{\int_{\partial\Omega} 1\, dx}$.

Теперь мы можем получить следующий результат по сверхсходимости для переменной управления.

Теорема 3.3. *Пусть* u *— решение* (2.7)–(2.11) *и* $\hat{u}$ *— функция, построенная в* (3.64). *Предположим, что все условия теоремы 3.1 выполняются. Тогда мы имеем*

$$\|u - \hat{u}\|_{0,\partial\Omega} \le Ch^{\frac{5}{4}}. \tag{3.65}$$

Доказательство. Из (2.12) и (3.64) получим

$$\|u - \hat{u}\|_{0,\partial\Omega} \le C\|z - z_h\|_{0,\partial\Omega}. \tag{3.66}$$

С использованием (3.60) и (3.66) мы завершаем доказательство теоремы. □

Замечание 3.1. Заметим, что граничные интегралы в (3.20) и (3.39) равны нулю, когда A является диагональной матрицей. Таким образом, мы можем улучшить оценки (3.60), (3.62) и (3.65) следующим образом:

$$\|u-\hat{u}\|_{0,\partial\Omega}+\|y-y_h\|_{0,\partial\Omega}+\|z-z_h\|_{0,\partial\Omega} \leq Ch^{\frac{3}{2}}, \tag{3.67}$$

$$\|y-y_h\|+\|z-z_h\| \leq Ch^{\frac{3}{2}}. \tag{3.68}$$

4. Выводы

В данной статье мы обсуждали $P_0^2-P_1$ смешанный метод конечных элементов для линейной эллиптической задачи граничного управления (1.1)–(1.4). Отметим, что градиент основной переменной для этого метода принадлежит квадратично интегрируемому пространству, а не классическому $H(\mathrm{div};\Omega)$ пространству. С использованием этого метода мы можем получить две аппроксимации для градиента основной переменной y: одна из них — численная аппроксимация решения $\boldsymbol{p}_h$, а другая является производной приближенного решения y_h. Представляется, что наши априорные оценки ошибки и сверхсходимость для эллиптических задач граничного управления с использованием таких смешанных методов конечных элементов являются новыми. В нашей будущей работе мы будем изучать апостериорные оценки ошибки и построим адаптивный алгоритм. Кроме того, мы будем рассматривать параболические задачи граничного управления.

Литература

1. **Bonnans J.F. and Casas E.** An extension of Pontryagin's principle for state-constrained optimal control of semilinear elliptic equations and variational inequalities // SIAM J. Control Optim.— 1995.— Vol. 33, iss. 1.— P. 274–298.
2. **Chen Y.** Superconvergence of mixed finite element methods for optimal control problems // Math. Comp.— 2008.— Vol. 77, № 263.— P. 1269–1291.
3. **Chen Y.** Superconvergence of quadratic optimal control problems by triangular mixed finite element methods // Int. J. Numer. Meths. Eng.— 2008.— Vol. 75, № 8.— P. 881–898.
4. **Chen Y. and Dai Y.** Superconvergence for optimal control problems governed by semi-linear elliptic equations // J. Sci. Comput.— 2009.— Vol. 39, № 2.— P. 206–221.
5. **Chen Y., Huang Y., Liu W.B. and Yan N.** Error estimates and superconvergence of mixed finite element methods for convex optimal control problems // J. Sci. Comput.— 2010.— Vol. 42, iss. 3.— P. 382–403.
6. **Chen S.C. and Chen H.R.** New mixed element schemes for second order elliptic problem // Math. Numer. Sin.— 2010.— Vol. 32, iss. 2.— P. 213–218.
7. **Ciarlet P.G.** The Finite Element Method for Elliptic Problems.— Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1978.
8. **Deckelnick K., Günther A. and Hinze M.** Finite element approximation of Dirichlet boundary control for elliptic PDEs on two and three-dimensional curved domains // SIAM J. Control Optim.— 2009.— Vol. 48, № 4.— P. 2798–2819.
9. **Gunzburger M.D. and Hou L.S.** Finite-dimensional approximation of a class of constrained nonlinear optimal control problems // SIAM J. Control Optim. — 1996. — Vol. 34, № 3. — P. 1001–1043.

10. **Gunzburger M.D., Lee H. and Lee J.** Error estimates of stochastic optimal Neumann boundary control problems // SIAM J. Numer. Anal. — 2011. — Vol. 49, № 3/4. — P. 1532–1552.
11. **Guo H., Fu H. and Zhang J.** A splitting positive definite mixed finite element method for elliptic optimal control problem // Appl. Math. Comput. — 2013. — Vol. 219, iss. 24. — P. 11178–11190.
12. **Gong W. and Yan N.** Mixed finite element method for Dirichlet boundary control problem governed by elliptic PDEs // SIAM J. Control Optim. — 2011. — Vol. 49, № 3. — P. 984–1014.
13. **Knowles G.** Finite element approximation of parabolic time optimal control problems // SIAM J. Control Optim. — 1982. — Vol. 20. — P. 414–427.
14. **Li R., Liu W.B., Ma H. and Tang T.** Adaptive finite element approximation for distributed elliptic optimal control problems // SIAM J. Control Optim. — 2002. — Vol. 41, № 5. — P. 1321–1349.
15. **Lions J.L.** Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations — Berlin: Springer-Verlag, 1971.
16. **Liu W. and Yan N.** A posteriori error estimates for some model boundary control problems // J. Comput. Appl. Math. — 2000. — Vol. 120, № 1. — P. 159–173.
17. **Liu W. and Yan N.** A posteriori error estimates for convex boundary control problems // SIAM J. Numer. Anal. — 2001. — Vol. 39. — P. 73–99.
18. **Liu H. and Yan N.** Superconvergence and a posteriori error estimates for boundary control of Stokes problems // J. Comput. Math. — 2006. — Vol. 24. — P. 343–356.
19. **Meyer C. and Rösch A.** Superconvergence properties of optimal control problems // SIAM J. Control Optim. — 2004. — Vol. 43, № 3. — P. 970–985.
20. **Meyer C. and Rösch A.** L^{∞}-estimates for approximated optimal control problems // SIAM J. Control Optim. — 2005. — Vol. 44, iss. 5. — P. 1636–1649.
21. **Meidner D. and Vexler B.** A priori error estimates for space-time finite element discretization of parabolic optimal control problems part I: problems without control constraints // SIAM J. Control Optim. — 2008. — Vol. 47, iss. 3. — P. 1150–1177.
22. **Meidner D. and Vexler B.** A priori error estimates for space-time finite element discretization of parabolic optimal control problems part II: problems with control constraints // SIAM J. Control Optim. — 2008. — Vol. 47, iss. 3. — P. 1301–1329.
23. **McKinght R.S. and Borsarge W.E.** The Ritz–Galerkin procedure for parabolic control problems // SIAM J. Control. — 1973. — Vol. 11, № 3. — P. 510–542.
24. **Shi F., Yu J.P. and Li K.T.** A new stabilized mixed finite-element method for Poisson equation based on two local Gauss integrations for linear element pair // Int. J. Comput. Math. — 2011. — Vol. 88. — P. 2293–2305.
25. **Yang D., Chang Y. and Liu W.** A priori error estimate and superconvergence analysis for an optimal control problem of bilinear type // J. Comput. Math. — 2008. — Vol. 26, № 4. — P. 471–487.
26. **Yan M., Gong W. and Yan N.** Finite element methods for elliptic optimal control problems with boundary observations // Appl. Numer. Math. — 2015. — Vol. 90. — P. 190–207.

Поступила в редакцию 15 июля 2019 г.
После рецензирования без замечаний 29 октября 2019 г.
Принята к печати 21 октября 2020 г.