

УДК 539.311:539.37:539.383

ВЛИЯНИЕ ЖЕСТКИХ СВЯЗЕЙ НА ИЗМЕНЕНИЕ ФОРМЫ ГИДРОСТАТИЧЕСКИ СЖАТОЙ ОБОЛОЧКИ

В. В. Киселев, Д. В. Долгих

Институт физики металлов им. М. Н. Михеева УрО РАН, 620990 Екатеринбург, Россия

E-mails: kiseliev@imp.uran.ru, dolgihd@imp.uran.ru

В рамках упрощенных нелинейных моделей с использованием аналитических и численных методов проведен анализ изменения поперечного сечения оболочки при наличии внешних и внутренних связей. Показано, что подходящий выбор связей позволяет устранять нежелательные складки и придавать круговой оболочке форму правильного полого многогранника.

Ключевые слова: оболочки, деформация, гидростатическое давление, нелинейная теория упругости.

DOI: 10.15372/PMTF20170318

Введение. В работах [1, 2] экспериментально исследована возможность управления неустойчивостью металлических оболочек в условиях внешнего гидростатического сжатия. Найдены диапазоны давлений, материальных и геометрических параметров оболочек, при которых первоначально круговое поперечное сечение оболочки после потери устойчивости принимает заданную жесткими связями форму. Разработаны основы для создания новых высокопроизводительных материало- и энергосберегающих технологий получения из трубных заготовок полых изделий сложной формы (трубчатых с переменным сечением по длине, призматических с треугольным, квадратным или зубчатым сечением). На оболочке в конечном состоянии имеются протяженные участки вдоль образующей, на которых форма поперечного сечения неизменна. При деформировании оболочки распределение напряжений на достаточно большом расстоянии от ее концов незначительно меняется вдоль образующей, поэтому при использовании подхода [3–5] теоретическое описание гофрирования поперечного сечения оболочки сводится к решению задачи о деформировании гибкого кольца единичной высоты под действием внешнего давления. При больших давлениях изгибы оболочки становятся значительными, поэтому для их описания используются нелинейные уравнения. В работах [4, 5] при проведении расчетов использовано материальное соотношение Эйлера — Бернулли, согласно которому момент сил, появляющийся при изгибе оболочки, пропорционален изменению кривизны ее сечения. Это позволило сформулировать модель, допускающую детальный анализ начальной нелинейно-упругой стадии гофрирования сечения оболочки в условиях ее сжатия жидкостью при высоком давлении. С помощью этой модели можно получить зависимость кривизны средней линии сечения оболочки от внешнего давления. По известной кривизне методами дифференциальной геометрии восстанавливается форма сечения. С использованием такого подхода аналитически описаны выпуклости и впадины, чередующиеся в окружном направлении.

Работа выполнена в рамках государственного задания ФАНО РФ (№ г.р. 01201463332).

© Киселев В. В., Долгих Д. В., 2017

На начальной стадии изменения формы оболочки образование вмятин на ее поверхности начинается при давлении, превышающем критическое. Каждое равновесное состояние оболочки существует в определенном диапазоне давлений. Меньшие давления соответствуют меньшему числу выпуклостей в поперечном сечении оболочки. Диапазоны давлений, в которых возможно существование различных равновесных решений модели, могут перекрываться. При быстром сжатии круговой оболочки (время увеличения нагрузки меньше времени релаксации в системе) ее элементы не успевают переместиться в радиальном направлении. Прежде чем изгибы оболочки станут существенными, сжимающее давление может принять не только первое, но и бóльшие критические значения, характерные для различных стационарных состояний оболочки. В зависимости от соотношения скорости деформации, геометрических и материальных параметров оболочки на ее поверхности может образоваться различное число выпуклостей. Для стержней подобная возможность экспериментально и теоретически исследована в [6].

Методика управления неустойчивостью формы гидростатически сжатых оболочек с целью получения готовых изделий развивалась в экспериментальных работах [1, 2]. Основная идея заключалась в использовании подходящих внешних связей.

В данной работе нелинейные модели [4, 5] обобщаются и применяются для анализа процесса деформирования оболочки при наличии жестких связей, с помощью которых можно придать поперечному сечению желаемую форму.

1. Формулировка модели. Пусть длина круговой цилиндрической оболочки в несколько раз больше ее радиуса. Тогда можно считать, что в условиях внешнего гидростатического сжатия продольная деформация средней части оболочки одинакова на каждой стадии изменения ее поперечного сечения. Выделим в средней части оболочки круговое кольцо единичной высоты и будем изучать его плоские равновесные состояния в зависимости от величины внешнего давления P .

В недеформированном состоянии срединная линия поперечного сечения оболочки имеет радиус R , а при деформировании описывается уравнением кривой

$$\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), 0). \quad (1)$$

В качестве параметра s плоской кривой $\mathbf{r}(s)$ выберем ее длину. Тогда $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{r}/ds$ является единичным вектором касательной к кривой. При изгибах оболочки в главном приближении сохраняются расстояния между точками срединной линии, поэтому $0 \leq s \leq 2\pi R$. Пусть $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ — орт, направленный вдоль оси оболочки. Тогда вектор единичной внешней нормали к ее поверхности есть $\mathbf{n} = [\mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}]$.

Рассмотрим элемент кольца, заключенный между радиус-векторами $\mathbf{r}(s + ds)$ и $\mathbf{r}(s)$. Со стороны участка оболочки в области $\tilde{s} \geq s + ds$ на выделенный элемент действуют результирующая сила $\mathbf{q}(s + ds)$ и момент $\mathbf{m}(s + ds) = m(s + ds)\mathbf{k}$, а со стороны участка оболочки в области $\tilde{s} \leq s$ — сила $-\mathbf{q}(s)$ и момент $-\mathbf{m}(s) = -m(s)\mathbf{k}$. Внешнее давление направлено по нормали к поверхности оболочки, поэтому на рассматриваемый элемент действует сила $P\mathbf{n} ds$. В случае внешнего давления $P < 0$.

Условия равновесия элемента оболочки сводятся к уравнениям [3]

$$\frac{d\mathbf{q}}{ds} + P\mathbf{n} = 0, \quad \frac{d\mathbf{m}}{ds} + [\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{q}] = 0. \quad (2)$$

Примем материальное уравнение Эйлера — Бернулли — Клебша [4, 5], согласно которому момент сил, возникающий при изгибе кольца, пропорционален изменению его кривизны $\tilde{\chi}$:

$$m = -\gamma(\tilde{\chi} + 1/R) \quad (3)$$

(γ — коэффициент пропорциональности). В линейной теории оболочек

$$\gamma = \gamma_0 d^3, \quad \gamma_0 = E/[12(1 - \sigma^2)], \quad (4)$$

где d — толщина оболочки; E — модуль Юнга; σ — коэффициент Пуассона. Результаты, полученные с использованием теории упругости, часто обобщаются на задачу упругопластического деформирования путем формальной замены модуля Юнга на касательный модуль [7]. Далее будем рассматривать γ_0 как феноменологический параметр модели.

Вектор силы \mathbf{q} лежит в плоскости xOy и поэтому допускает представление

$$\mathbf{q} = q_n \mathbf{n} + q_\tau \boldsymbol{\tau}. \quad (5)$$

С учетом (5) и формул Френе

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \tilde{\varkappa} \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\tilde{\varkappa} \boldsymbol{\tau} \quad (6)$$

из (2), (3) получаем замкнутую систему дифференциальных уравнений для расчета q_n , q_τ , $\tilde{\varkappa}$:

$$\frac{dq_\tau}{ds} - q_n \tilde{\varkappa} = 0, \quad \frac{dq_n}{ds} + P + q_\tau \tilde{\varkappa} = 0, \quad \gamma \frac{d\tilde{\varkappa}}{ds} + q_n = 0. \quad (7)$$

Используя (7), можно выразить сдвиговую и тангенциальные силы через кривизну поперечного сечения оболочки:

$$q_n = -\gamma \frac{d\tilde{\varkappa}}{ds}, \quad q_\tau = \gamma \left(Q - \frac{\tilde{\varkappa}^2}{2} \right). \quad (8)$$

Постоянная интегрирования Q определяется ниже. Кривизна срединной линии сечения оболочки удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \tilde{\varkappa}}{ds^2} = Q \tilde{\varkappa} - \frac{|P|}{\gamma} - \frac{\tilde{\varkappa}^3}{2}. \quad (9)$$

Для проведения дальнейшего анализа целесообразно ввести безразмерные переменные

$$\theta = s/R, \quad \varkappa = R\tilde{\varkappa}, \quad q_0 = R^2 Q.$$

Тогда $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и первый интеграл уравнения (9) принимает вид

$$\left(\frac{d\varkappa}{d\theta} \right)^2 = q_0 \varkappa^2 - \frac{2|P|}{\gamma_0} \left(\frac{R}{d} \right)^3 \varkappa - \frac{\varkappa^4}{4} + \frac{l_0}{4}, \quad (10)$$

где l_0 — постоянная интегрирования.

Физически содержательные решения уравнения (10) (однозначные, без самопересечения срединной линии и замкнутых петель) получаются только в тех случаях, когда полином четвертой степени в правой части (10) имеет два вещественных корня a и b и два комплексно-сопряженных корня $c = b_1 + ia_1$ и c^* . Корни полинома выражаются через коэффициенты уравнения (10):

$$b_1 = -(a+b)/2, \quad l_0 = -ab|c|^2, \quad 4q_0 = 3(a+b)^2/4 - a_1^2 - ab; \quad (11)$$

$$\frac{8|P|}{\gamma_0} \left(\frac{R}{d} \right)^3 = -(a+b) \left(a_1^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2 \right) > 0, \quad (12)$$

где $b < a < -b$. Параметр b всегда отрицателен. Требуемое решение уравнения (10) имеет вид [4, 5]

$$\varkappa = \frac{aB(1 - \operatorname{cn} \chi) + bA(1 + \operatorname{cn} \chi)}{B(1 - \operatorname{cn} \chi) + A(1 + \operatorname{cn} \chi)}, \quad \chi = \frac{\theta}{2g}, \quad g = \frac{1}{\sqrt{AB}}, \quad (13)$$

$$A^2 = (a - b_1)^2 + a_1^2, \quad B^2 = (b - b_1)^2 + a_1^2.$$

Модуль эллиптических функций Якоби определяется выражением

$$k^2 = \frac{(a-b)^2 - (A-B)^2}{4AB}, \quad 0 \leq k^2 \leq 1.$$

Кривизна срединной линии (1) должна быть одной и той же при $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$. Из этого условия следует первое ограничение на параметры решения

$$\pi\sqrt{AB} = 4K(k)m, \quad (14)$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода; параметр m определяет число выпуклостей в сечении оболочки после потери устойчивости ее формы.

Согласно (13) кривизна $\varkappa(\theta) \in [b, a]$. Напомним, что параметр b всегда отрицателен. Значения θ , при которых $\varkappa(\theta) = b(P)$, соответствуют вершинам выпуклостей на поверхности оболочки, имеющих наибольшую амплитуду. В зависимости от давления параметр a может быть как отрицательным, так и положительным. Значения θ , при которых $\varkappa(\theta) = a(P) < 0$, соответствуют вершинам меньших по амплитуде выпуклостей на поверхности оболочки, значения θ , при которых $\varkappa(\theta) = a(P) > 0$, — дну впадин, которые при увеличении давления появляются на поверхности оболочки. Рассмотрим случай $a(P) = 0$. При давлениях, соответствующих этому случаю, на поверхности оболочки формируются плоские грани и ее сечение принимает форму правильного многоугольника со скругленными вершинами [4, 5]. Однако в отсутствие внешних связей из круговой оболочки сложно получить требуемый многогранник.

В плоскости xOy единичные векторы \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ допускают параметризацию

$$\mathbf{n} = (\cos \Phi(\theta), \sin \Phi(\theta)), \quad \boldsymbol{\tau} = (-\sin \Phi(\theta), \cos \Phi(\theta)). \quad (15)$$

Уравнения Френе (6) сводятся к уравнению для расчета фазы $\Phi(\theta)$

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = -\varkappa(\theta), \quad (16)$$

решение которого имеет вид [4, 5]

$$\begin{aligned} \Phi(\theta) = \left(\frac{AB}{a+b} - \frac{aB+bA}{A+B} \right) \theta - \frac{(A+B)^2}{2\sqrt{AB}(a+b)} \Pi\left(\frac{\sqrt{AB}}{2} \theta, \alpha^2, k \right) + \\ + 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{a-b}{2\sqrt{AB}} \operatorname{sd} \left(\frac{\sqrt{AB}}{2} \theta, k \right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

и обладает свойством $\Phi|_{\theta=0} < \Phi|_{\theta=2\pi}$. Здесь $\operatorname{sd}(x, k) = \operatorname{sn}(x, k)/\operatorname{dn}(x, k)$, $\Pi(x, \alpha^2, k)$ — эллиптический интеграл третьего рода [8]:

$$\Pi(x, \alpha^2, k) = \int_0^x \frac{1}{1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2(x', k)} dx'$$

с модулем k и параметром $\alpha^2 = -(A-B)^2/(4AB) < 0$. Постоянная, появляющаяся после интегрирования уравнения (16), определяет положение луча в плоскости xOy , от которого отсчитывается фаза $\Phi(\theta)$. В формуле (17) постоянная интегрирования выбрана таким образом, что $\Phi|_{\theta=0} = 0$, т. е. луч совпадает с осью Ox декартовой системы координат и проходит через вершину выпуклости сечения оболочки.

Чтобы кривая $\mathbf{r}(\theta)$ не имела петель, функция $\Phi(\theta)$ должна получать приращение 2π при изменении переменной θ в интервале от 0 до 2π . Из этого требования следует второе ограничение на параметры задачи

$$(Ab + Ba)/(A + B) + 1 + 2m(\Lambda(\beta, k) - 1) = 0, \quad (18)$$

где $\Lambda(\beta, k)$ — лямбда-функция Хеймана [8]:

$$\Lambda(\beta, k) = 2(E(k)F(\beta, k') + K(k)E(\beta, k') - K(k)F(\beta, k'))/\pi,$$

$$\beta = \arcsin(2\sqrt{AB}/(A+B)), \quad k' = \sqrt{1-k^2},$$

$F(\beta, k')$, $E(\beta, k')$ — неполные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем k' ; $K(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем k .

Интегрируя второе равенство (15), можно определить форму срединной линии сечения оболочки:

$$x(\theta) = x_0 - R \int_0^\theta \sin \Phi(\theta') d\theta', \quad y(\theta) = y_0 + R \int_0^\theta \cos \Phi(\theta') d\theta'.$$

Постоянные интегрирования

$$x_0 = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\theta \sin \Phi(\theta') d\theta d\theta', \quad y_0 = -\frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\theta \cos \Phi(\theta') d\theta d\theta'$$

выбраны с учетом условия прохождения оси оболочки через начало координат.

В общем случае условия (12), (14), (18) образуют замкнутую систему трансцендентных уравнений для вычисления зависимости параметров задачи a , b , a_1 от величины внешнего давления $|P|$ и числа выпуклостей m на поверхности оболочки. Эта система может быть решена численно с помощью метода Ньютона.

Предложенная модель описывает значительные нелинейно-упругие деформации оболочки. Приближение линейной теории соответствует малому изменению кривизны поперечного сечения, когда значения параметров a и b несущественно отличаются от значения кривизны недеформированного сечения. В [4, 5] показано, что гофрирование оболочки начинается в тот момент, когда внешнее давление превышает пороговое значение

$$|P|_\Lambda = \gamma_0(d/R)^3(m^2 - 1). \quad (19)$$

В тех случаях, когда для определения γ_0 используется выражение (4), давление (19) совпадает с критической нагрузкой, вычисленной с помощью линейной теории [7].

В [4, 5] аналитически описаны и проанализированы возможные равновесные формы сечения оболочки в зависимости от величины внешнего давления при отсутствии внешних связей.

2. Деформирование сечения оболочки на внутренней оправке. Для придания оболочке заданной формы необходимо ограничить ее перемещение за счет использования внутренней оправки. Пусть внутри оболочки помещен призматический стержень, сечение которого представляет собой выпуклую фигуру с порядком симметрии m . Граница фигуры описывается уравнением гладкой кривой $\mathbf{r}_p(l) = (x_p(l), y_p(l), 0)$, где l — натуральный параметр, который будем отсчитывать от точки M (рис. 1, *a*). Как и в случае свободной оболочки, натуральный параметр сечения оболочки s будем отсчитывать от точки B пересечения кривой $\mathbf{r}(s)$ с осью Ox ($s_B = 0$). Тогда точке, в которой оболочка впервые касается внутренней призмы при определенном давлении, соответствует параметр $s_{O'} = \pi R/m$. С увеличением давления оболочка прижимается к поверхности призмы (участок NN' на рис. 1, *б*). При этом точки касания оболочки и призмы N , N' смещаются вдоль поверхности призмы. В силу симметрии задачи достаточно описать равновесные состояния участка BN сечения оболочки. В точке касания N оболочки и призмы параметры l и s связаны через длину отрезка $O'N$: $\pi R/m - s_N = l_{O'} - l_N$, или

$$s_N = l_N + \pi R/m - l_{O'}. \quad (20)$$

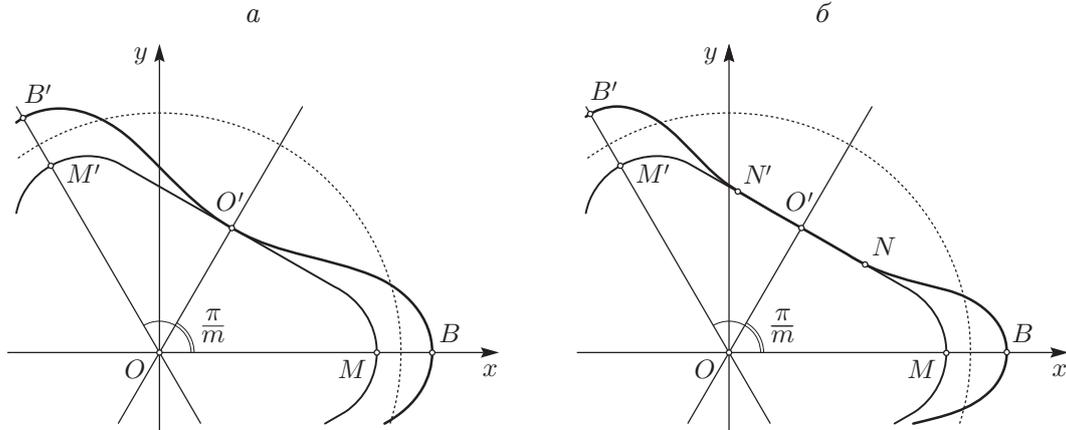


Рис. 1. Схема деформирования оболочки, внутри которой находится жесткая призма: *a* — форма оболочки в момент ее касания призмы; *б* — форма оболочки при огибании ею призмы

На участке оболочки с параметром $s \in [s_B, s_N]$ фаза, описывающая ее сечение, определяется формулой (17). Параметры a, b, a_1, l_N определяются из дополнительных уравнений. Из условия совпадения касательных к сечению оболочки и призмы в точке N следует первое из этих уравнений:

$$-\sin \Phi(s_N) = \left. \frac{dx_p}{dl} \right|_{l=l_N}. \quad (21)$$

Интегрируя второе равенство (15), получаем координаты сечения при $s \in [s_B, s_N]$:

$$x(s) = \int_s^{s_N} \sin \Phi(s') ds' + x_p(l_N), \quad y(s) = \int_0^s \cos \Phi(s') ds'.$$

Еще одно уравнение для параметров задачи следует из геометрической связи $y(s_N) = y_p(l_N)$, или

$$\int_0^{s_N} \cos \Phi(s') ds' = y_p(l_N). \quad (22)$$

В области, где оболочка огибает призму, вдоль направления нормали $\mathbf{n}(s_N)$ внешнее давление компенсируется реакцией связи, поэтому в точке N оболочки имеем

$$q_n = \gamma_0 \left(\frac{d}{R} \right)^2 \frac{d\chi}{ds} \Big|_{s=s_N} = 0.$$

Иными словами, точка N соответствует минимуму кривизны кривой $\mathbf{r}(s)$: $\chi(s_N) = a$. Из этого условия получаем третье уравнение для расчета параметров задачи

$$s_N/R = 4K(k)/\sqrt{AB}. \quad (23)$$

Как и в случае свободной оболочки, уравнение (12) связывает давление и неизвестные параметры a_1, a, b . Замкнутая система уравнений (21)–(23), (12) определяет величины a, b, a_1, l_N как функции давления $|P|$ и геометрических параметров связи $\mathbf{r}_p(l)$. В случае если в качестве внутренней призмы выбран стержень радиусом $r < R$ с параметризацией

$$x_p(l) = r \cos(l/r), \quad y_p(l) = r \sin(l/r),$$

получаем задачу о деформировании оболочки на круглом стержне [4, 5].

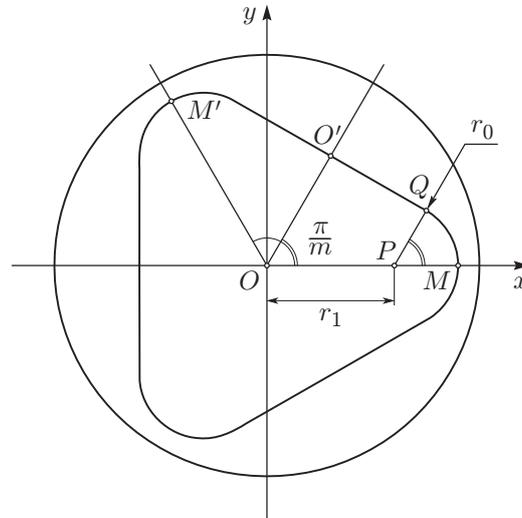


Рис. 2. Схема оболочки, внутри которой находится призма

Пусть внутрь оболочки помещен призматический стержень, сечение которого имеет форму правильного m -угольника со скругленными вершинами. Экспериментально установлено, что наличие скругленных вершин обеспечивает необходимое проскальзывание оболочки вдоль поверхности стержня [1, 2]. В результате стабилизируется равновесное состояние оболочки с m выпуклостями на поверхности. Кроме того, это позволяет избежать образования нерегулярных складок на поверхности оболочки вдоль плоских граней стержня. Форма сечения стержня определяется количеством сторон m криволинейного многоугольника, радиусом скругления r_0 и расстоянием от центра призмы до центра скругления r_1 (рис. 2). Тогда длина дуги MQ равна $\pi r_0/m$, длина прямолинейного участка призмы QO' — $r_1 \sin(\pi/m)$, значения натурального параметра l изменяются в диапазоне $[0, \pi r_0/m + r_1 \sin(\pi/m)]$. Параметрические уравнения кривой MQO' имеют вид

$$x_p(l) = \begin{cases} r_1 + r_0 \cos(l/r_0), & l \in [0, \pi r_0/m], \\ r_1 + r_0 \cos(\pi/m) - (l - \pi r_0/m) \sin(\pi/m), & l \in [\pi r_0/m, \pi r_0/m + r_1 \sin(\pi/m)], \end{cases}$$

$$y_p(l) = \begin{cases} r_0 \sin(l/r_0), & l \in [0, \pi r_0/m], \\ r_0 \sin(\pi/m) + (l - \pi r_0/m) \cos(\pi/m), & l \in [\pi r_0/m, \pi r_0/m + r_1 \sin(\pi/m)]. \end{cases}$$

Система уравнений (21)–(23), (12) разрешима начиная с некоторого значения давления $|P|_T$, соответствующего моменту касания свободной оболочки и внутренней призмы (рис. 3). Значение $|P|_*$, при котором происходит смыкание участков сечения оболочки в единственной точке (см. рис. 3, в, е), является предельным для этой задачи. Алгоритм поиска такого значения $|P|_*$ в рассматриваемом случае принципиально не отличается от задачи о предельной конфигурации свободного кольца [4, 5]. На рис. 3 приведены формы сечения оболочки, внутри которой находится жесткая призма, при различных значениях внешнего давления.

3. Деформирование оболочки в полости на призматическом стержне. Пусть внутрь оболочки помещен призматический стержень, граница которого в плоскости xOy представляет собой гладкую кривую $r_p(l)$. Кроме того, положим, что оболочка заключена в цилиндрическую полость радиусом $R^{(e)}$ ($R < R^{(e)}$).

При увеличении давления $|P|$ оболочка вступает в контакт с внутренней призмой в точке O' (рис. 4) и при дальнейшем увеличении давления часть оболочки облегает призму (участок NN'). В то же время существует давление $|P|_e$, при котором оболочка касается

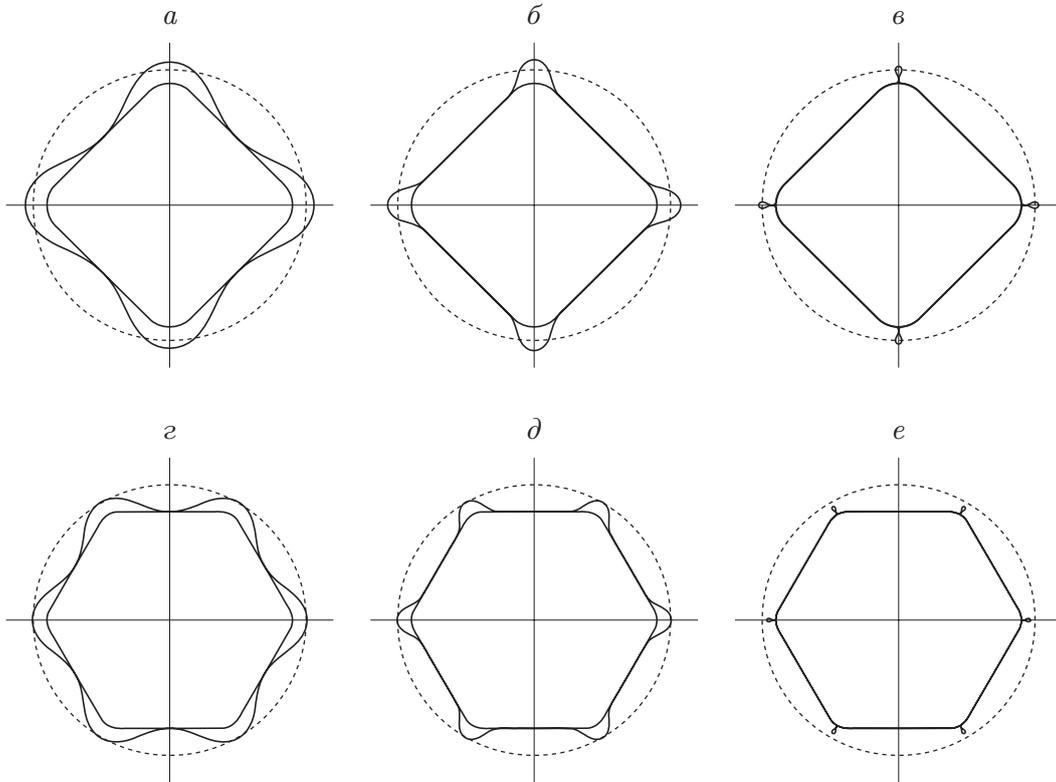


Рис. 3. Формы сечения оболочки, внутри которой находится призма, при различных значениях внешнего давления:

a-в — призма с параметрами $r_0 = 0,217R$, $r_1 = 0,682R$, $m = 4$ (a — $(R/d)^3|P|/\gamma_0 = 18,18$ (момент касания), $б$ — $(R/d)^3|P|/\gamma_0 = 208,18$, $в$ — $(R/d)^3|P|/\gamma_0 = 2546,64$ (предельное состояние)); *г-е* — призма с параметрами $r_0 = 0,153R$, $r_1 = 0,746R$, $m = 6$ ($г$ — $(R/d)^3|P|/\gamma_0 = 40,72$ (момент касания), $д$ — $(R/d)^3|P|/\gamma_0 = 330,72$, $е$ — $(R/d)^3|P|/\gamma_0 = 13\,700$ (предельное состояние))

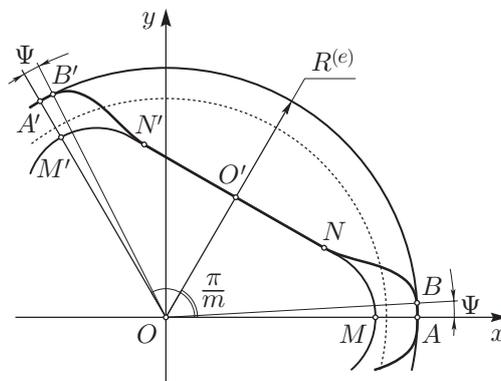


Рис. 4. Схема деформирования оболочки при наличии двух связей

границы полости в точках A, A' , при дальнейшем увеличении давления оболочка прилегает к полости (участки AB и $A'B'$). В силу симметрии задачи достаточно описать равновесное состояние участка BN оболочки.

Пусть натуральный параметр s кривой $ABNO'$ отсчитывается от точки A . Тогда в точке N параметры s_N и l_N связаны соотношением (20).

Решая уравнения для фазы (16), необходимо выбрать константу интегрирования таким образом, чтобы выполнялось равенство $\Phi_1(s_B) = \Psi$ ($s_B = R^{(e)}\Psi$). Выражая $\Phi_1(s)$ через функцию (17), получаем

$$\Phi_1(s) = \Phi(s) - \Phi(s_B) + \Psi,$$

где $s \in [s_B, s_N]$.

Параметры a, b, a_1, l_N, Ψ являются неизвестными. Для их определения необходимо вывести пять независимых уравнений.

Первое уравнение, как и (21), следует из условия совпадения касательных в точке N :

$$-\sin \Phi_1(s_N) = \left. \frac{dx_p}{dl} \right|_{l=l_N}. \quad (24)$$

Интегрируя второе соотношение (15), получаем координаты сечения оболочки на участке $s \in [s_B, s_N]$:

$$x(s) = \int_{s_B}^{s_N} \sin \Phi_1(s') ds' + x_p(l_N), \quad y(s) = \int_{s_B}^s \cos \Phi_1(s') ds' + R^{(e)} \sin \Psi.$$

Отсюда с учетом геометрических связей получаем еще два уравнения для параметров задачи:

$$x(s_B) = R^{(e)} \cos \Psi, \quad y(s_N) = y_p(l_N). \quad (25)$$

Четвертое уравнение (23) следует из условия равновесия оболочки вдоль нормали в точке s_N . Последнее уравнение (12) связывает неизвестные a, b, a_1 с величиной внешнего давления $|P|$.

Замкнутая система уравнений (23)–(25), (12) определяет величины a, b, a_1, l_N, Ψ в зависимости от давления $|P|$ и геометрических параметров $R, R^{(e)}, r_p(l), m$.

Возможны два случая, когда значение внешнего давления $|P|^{(e)}$, начиная с которого полученная система уравнений разрешима, определяется по-разному. Если геометрические свойства внутренней призмы и внешней полости таковы, что оболочка касается сначала призмы, значение $|P|^{(e)}$ находится в процессе численного решения задачи о деформировании оболочки на внутренней оправке с последующим касанием оболочки и внешней полости в точке A . Если в силу выбранных параметров кривой $r_p(l)$ и радиуса полости $R^{(e)}$ оболочка касается сначала внешней полости, то значение $|P|^{(e)}$ является решением задачи о касании оболочки и призмы в точке O' в случае примыкания участка AB к полости. Предельное значение $|P|_*^{(e)}$, при котором система уравнений (23)–(25), (12) разрешима, находится в результате численного эксперимента и существенно зависит от параметров связей.

Результаты численного моделирования показывают, что процессом деформирования гидростатически сжатой оболочки можно управлять за счет подходящего выбора жестких связей.

Наличие внутренней призмы при некотором давлении позволяет придать сечению оболочки форму многоугольника со скругленными вершинами. Однако при меньшем давлении

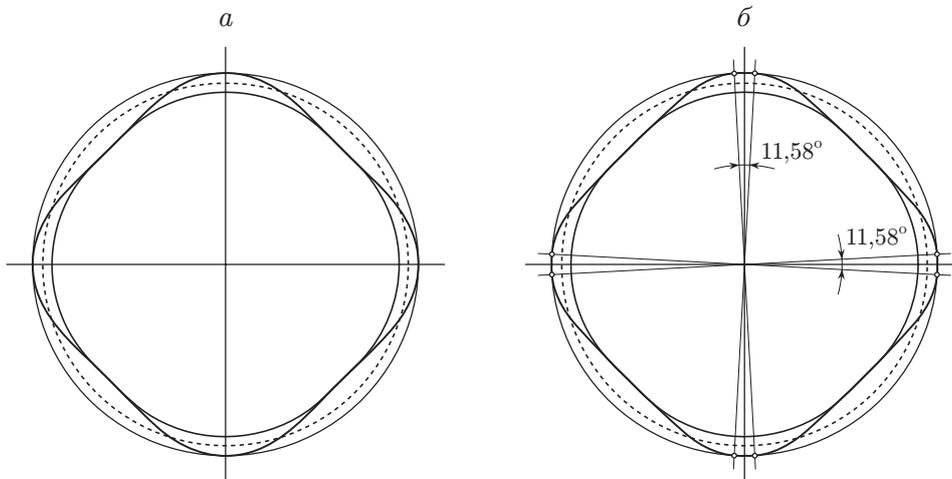


Рис. 5. Формы сечения оболочки, внутри которой находится призма, при наличии внешней связи и различных значениях внешнего давления ($r_0 = 0,779R$, $r_1 = 0,17R$, $m = 4$, $R^{(e)} = 1,055R$):

a — форма сечения оболочки в момент ее контакта с двумя оправками при $(R/d)^3|P|/\gamma_0 = 15,76$, $2\Psi \approx 1,1^\circ$, b — предельное состояние оболочки при $(R/d)^3|P|/\gamma_0 = 33,09$, $2\Psi \approx 11,58^\circ$

оболочка не имеет плоских граней, а при большем в вершинах выпуклостей на ее поверхности происходит смыкание стенок и образование жестких ребер, которые не устраняются при дальнейшем увеличении давления (см. рис. 3).

Использование в качестве связи внешнего цилиндра позволяет в некотором интервале давлений не только стабилизировать форму оболочки с плоскими гранями, но и контролировать ее деформацию вблизи скругленных вершин внутренней призмы. Это возможно только в том случае, если оболочка сначала касается внутренней оправки и только затем — внешней. При этом, подгоняя радиус внешней оправки, удается ограничить амплитуду выпуклостей оболочки и предотвратить образование жестких ребер на ее поверхности. Кроме того, наличие внешней связи позволяет в десятки раз уменьшить давления, при которых получаются образцы с сечением, имеющим форму правильного многоугольника (рис. 5).

Вблизи вершин выпуклостей на поверхности оболочки концентрируются нормальные и касательные внутренние напряжения (см. (8)):

$$N = \frac{q_n}{d} = \gamma_0 \left(\frac{d}{R} \right)^2 \left(q_0 - \frac{\varkappa^2}{2} \right), \quad T = \frac{q_\tau}{d} = -\gamma_0 \left(\frac{d}{R} \right)^2 \frac{d\varkappa}{d\theta}.$$

Наибольшими оказываются касательные напряжения (рис. 6). В тот момент, когда они превышают предел текучести материала, в вершинах выпуклостей начинается пластическое деформирование оболочки. Вследствие этого образец сохраняет форму многогранника даже после снятия давления. В конечном счете из круговой оболочки получается полое изделие с плоскими гранями и поперечным сечением в форме правильного многоугольника.

Для упрощения расчетов толщиной оболочки пренебрегалось. Между тем для технологических приложений важно правильно выбрать соотношение толщины оболочки и величины зазора Δ между связями.

Как отмечено выше, если периметр сечения оболочки существенно отличается от периметра сечения внутренней призмы, то на конечном этапе деформирования оболочки вблизи вершин призмы образуются складки из материала оболочки (см. рис. 3). Для ме-

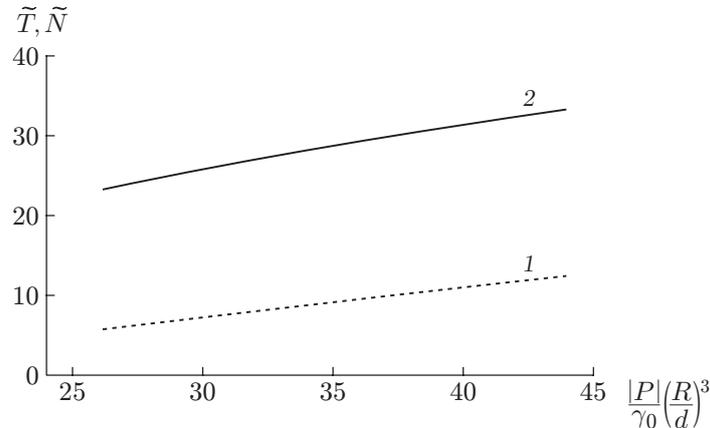


Рис. 6. Зависимости максимальных нормального $\tilde{N} = (R/d)^2 N / \gamma_0$ (1) и касательного $\tilde{T} = (R/d)^2 T / \gamma_0$ (2) напряжений от внешнего давления P при $r_0 = 0,779R$, $r_1 = 0,17R$, $m = 4$, $R^{(e)} = 1,06R$

таллических оболочек экспериментально установлено, что трудностей можно избежать, если высота складок вблизи вершин призмы не превышает величину порядка ζd (d — толщина оболочки; ζ — множитель порядка единицы ($\zeta \approx 1$)) [1, 2]. С увеличением давления высота складок на поверхности призмы уменьшается вследствие пластического течения материала оболочки.

Для предельных конфигураций оболочки длина дуги в вершинах внутренней жесткой призмы должна составлять величину, приближенно равную двум толщинам оболочки: $2d \simeq 2\pi r_0/m$. Отсюда получаем оценку радиуса скругленных вершин призмы $r_0 \simeq dm/\pi$. Периметр сечения оболочки вдоль срединной линии при наличии m выпуклостей с амплитудой ζd должен удовлетворять соотношению

$$2\pi R \simeq 2m \left(r_1 \sin \frac{\pi}{m} + \zeta d \right) = 2m \left[\sin \frac{\pi}{m} \left(R^{(e)} - \frac{md}{\pi} - \Delta \right) + \zeta d \right]. \quad (26)$$

Величина зазора между связями с учетом толщины оболочки равна $\Delta \simeq d(1 + \zeta)$. Из (26) получаем приближенное значение радиуса исходной оболочки

$$R \simeq \frac{m}{\pi} \sin \frac{\pi}{m} R^{(e)} - \frac{md}{\pi} \left[\sin \frac{\pi}{m} \left(1 + \zeta + \frac{m}{\pi} \right) - \zeta \right].$$

При $\zeta = 1$ для получения изделия с квадратным сечением (см. рис. 5) следует выбрать оболочку радиусом $R \simeq 0,9R^{(e)} - 1,7d$.

В работах [1, 2] описана конструкция установки для пластического деформирования цилиндрических оболочек жидкостью при высоком давлении (до 1500 МПа) в широком диапазоне значений степени деформации. На этой установке можно не только проводить различные исследования, но и получать конкретные изделия. Она может быть также использована при разработке опытно-промышленного оборудования для изготовления полых изделий сложной формы.

Заключение. В работе исследовано влияние жестких связей на изменение формы оболочки при ее гидростатическом сжатии. Показано, что наличие внутри оболочки призматического стержня со скругленными вершинами позволяет контролировать процесс получения из круговых оболочек полых изделий с поперечным сечением в форме правильного многоугольника. Принципиально важным оказывается использование дополнительного ограничивающего внешнего цилиндра. Установлено, что при определенных соотношениях

геометрических параметров оболочки, внутренней и внешней связей в некотором диапазоне давлений можно получить оболочки, имеющие плоские грани и поперечное сечение в форме многоугольника. Ограничение амплитуды выпуклостей оболочки позволяет избежать образования жестких складок на ее поверхности. Наличие внешней связи приводит к концентрации внутренних напряжений вблизи вершин выпуклостей, что позволяет в десятки раз уменьшить внешнее давление, при котором круговая оболочка принимает форму правильной призмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Каменецкий Б. И., Талуц Г. Г., Обухов В. А.** Исследование процесса пластической деформации цилиндрических оболочек из металлических материалов жидкостью высокого давления // Физика металлов и металловедение. 1996. Т. 81, № 3. С. 159–167.
2. **Каменецкий Б. И., Киселев В. В.** Исследование процессов пластической деформации цилиндрических оболочек жидкостью высокого давления // Кузнеч.-штамп. пр-во. 2007. № 7. С. 11–17.
3. **Antman S. S.** Nonlinear problems of elasticity. N. Y.: Springer-Verlag, 1995.
4. **Долгих Д. В., Киселев В. В.** Гофрирование гибкого кольца в условиях внешнего гидростатического сжатия // Прикл. математика и механика. 2010. Т. 74, № 2. С. 285–298.
5. **Киселев В. В.** Нелинейно-упругие узоры из вмятин на поверхностях нагруженных пластин и оболочек / В. В. Киселев, Д. В. Долгих. М.: Физматлит, 2012.
6. **Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю.** Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. 1949. Т. 64, № 6. С. 779–782.
7. **Вольмир А. С.** Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963.
8. **Byrd P. F.** Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists / P. F. Byrd, M. D. Friedman. Berlin etc.: Springer, 1971.

*Поступила в редакцию 24/XI 2015 г.,
в окончательном варианте — 31/V 2016 г.*
