

$$z/r_0 = \sqrt{1 - l_x^2} \sin \theta, \quad y/r_0 = \sqrt{1 - l_x^2} \cos \theta.$$

С учетом этих выражений формулы (24), (25) для амплитудных функций  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  при  $r_0 \gg \lambda$  можно представить в виде

(31)

$$\Phi_1(x, y, z) = \frac{e^{-ikr_0}}{4\pi r_0} \sum_{m=0}^n \left( -ik \sqrt{1 - l_x^2} \cos \theta \right)^m \int_{-\lambda}^{+\lambda} Q_{1m}(\xi) e^{ikl_x \xi} d\xi + O(r_0^{-2});$$

$$(32) \quad \Phi_2(x, y, z) = \frac{e^{-ikr_0}}{4\pi r_0} \sin \theta \sum_{m=1}^n \left( -ik \sqrt{1 - l_x^2} \right)^m \cos^{m-1} \theta \times \\ \times \int_{-\lambda}^{+\lambda} Q_{2m}(\xi) e^{ikl_x \xi} d\xi + O(r_0^{-2}).$$

Из формул (31), (32) следует, что в случае низкочастотных колебаний тела, когда параметр  $k = \omega R_0/a \ll 1$ , основной вклад в звуковое поле вдали от осциллирующего тела вносят осесимметричные его колебания.

Поступила 7 V 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Морз Ф. Колебания и звук. М., Гостехиздат, 1949.
2. Франкль Ф. И., Карпович Е. А. Газодинамика тонких тел. М., ОГИЗ, 1948.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.

УДК 532.5 : 539.37

### УДАРНОЕ НАГРУЖЕНИЕ БЕЗГРАНИЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, СОПРИКАСАЮЩЕЙСЯ С ЖИДКОСТЬЮ

В. П. Ястребов

(Ленинград)

Вопросы воздействия ударных нагрузок на безграничные пластины, контактирующие с жидкостью, рассматривались в ряде работ [1—9]. В работах [1—6] изучалась осесимметричная деформация пластин, работы [1, 7—9] посвящены плоской задаче. Исследования выполнялись в разных постановках. Рассматривались различные виды нагружения пластин (воздействие акустических волн давлений, сосредоточенных сил или распределенных нагрузок; задание скорости движения). Деформация пластин описывалась разными уравнениями (уравнением прогиба мембраны, уравнением изгиба Бернулли — Эйлера или уравнением типа Тимошенко). Основным методом решения этих задач является метод интегральных преобразований. В процессе решения определенные затруднения возникают при переходе от изображений к оригиналам. С еще большими трудностями приходится сталкиваться при анализе решения и получении конкретных числовых результатов по оригиналам, записанным в виде сложных однократных или двойных интегралов. Поэтому в ряде работ [3, 5, 8] решение ограничивается записью формул в квадратурах, в других исследованиях [1, 2, 4, 6, 9] задача решена асимптотическими методами, справедливыми в определенном диапазоне

изменения времени. В работе [6], посвященной воздействию сферической волны давления, имеются также отдельные результаты, полученные с помощью численного обращения преобразования Лапласа.

В данной работе решение плоской задачи об изгибе безграничной пластины, находящейся в контакте со сжимаемой жидкостью, занимающей полупространство по одной из сторон пластины, ищется с помощью интегральных преобразований.

1. Координатная плоскость  $X, Z$  располагается в плоскости пластины, а ось  $Y$  направляется в глубь жидкости. По всей оси  $Z$  к пластине мгновенно прикладывается равномерно распределенная вдоль этой оси поперечная нагрузка. Достаточно рассмотреть движение в одной плоскости переменных  $X, Y$ . Состояние жидкости описывается в этой плоскости двумерным волновым уравнением, а деформация пластины — уравнением Бернулли — Эйлера изгиба балки-полоски, к которой в сечении  $X = 0$  приложена сосредоточенная сила. В дальнейшем приводится также решение, учитывающее наряду с изгибом деформацию сдвига пластины.

Используются безразмерные величины и вводятся следующие обозначения:

$$t = Tc\delta^{-1}, \quad x = X\delta^{-1}, \quad y = Y\delta^{-1}, \quad \varphi = \Phi c^{-1}\delta^{-1}, \quad u = U\delta^{-1}, \quad v = Vc^{-1},$$

где  $\delta$  — толщина пластины;  $T$  — время;  $c$  — скорость звука в жидкости;  $c_1$  — скорость звука в материале пластины;  $\rho, \rho_1$  — плотности жидкости и материала пластины;  $Q$  — постоянная, имеющая размерность погонной нагрузки;  $\Phi$  — потенциал скорости жидкости;  $U, V$  — поперечное перемещение и скорость пластины;  $h$  — единичная функция Хевисайда;  $p, q$  — переменные преобразования Лапласа и Фурье.

Уравнения состояния жидкости и изгиба балки-полоски в безразмерных переменных имеют вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad a \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\rho_1 \partial^2 u}{\rho \partial t^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (y = 0),$$

где

$$a = \frac{1}{12} \frac{\rho_1 c_1^2}{\rho c^2}.$$

Задаются нулевые начальные и следующие граничные условия:

$$(1.2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (y = 0), \quad \varphi \neq \infty \quad (y \rightarrow \infty), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (x = 0);$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{6Q}{\rho_1 c_1^2 \delta} h(t) \quad (x = 0), \quad u \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty).$$

К уравнениям (1.1) применяется преобразование Лапласа по переменной  $t$  и косинус-преобразование Фурье по переменной  $x$ . С учетом нулевых начальных и соответствующих граничных условий для изображений получаются уравнения

$$(1.4) \quad \frac{\partial^2 \varphi^{FL}}{\partial y^2} - (p^2 + q^2) \varphi^{FL} = 0;$$

$$(1.5) \quad a \left( \frac{6Q}{\rho c_1^2 \delta} p^{-1} + q^4 u^{FL} \right) + \frac{\rho_1}{\rho} p^2 u^{FL} = p \varphi^{FL} \quad (y = 0).$$

Буквенные индексы  $F$  и  $L$  означают соответственно изображения преобразований Фурье и Лапласа. Таким образом,

$$u^{FL} = \int_0^\infty \cos(qx) \int_0^\infty \exp(-pt) u(t, x) dt dq.$$

Решение дифференциального уравнения (1.4) относительно переменной  $y$ , удовлетворяющее первым двум условиям (1.2) (записанным в соответствующих изображениях), имеет вид

$$\varphi^{FL} = -\frac{\rho u^{FL}}{\sqrt{p^2 + q^2}} \exp(-y \sqrt{p^2 + q^2}).$$

Подставляя это значение в (1.5), можно найти изображение  $u^{FL}$ . В дальнейшем будет рассматриваться скорость пластины. Соответствующая скорости безразмерная величина  $v$  имеет изображение

$$v^{FL} = \rho u^{FL} = \frac{Q}{2\delta\rho c^2} \left( aq^3 + \frac{\rho_1}{\rho} p^2 + \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right)^{-1}.$$

С помощью тождественных преобразований это выражение приводится к виду

$$(1.6) \quad v^{FL} = \frac{Q}{2\delta\rho c^2} \frac{\rho}{\rho_1} \frac{1}{q \sqrt{p^2 + q^2}} f^L(s),$$

$$f^L(s) = \frac{s^2}{s^3 + Bs^2 + Cs - B}, \quad s = \sqrt{p^2 q^{-2} + 1},$$

$$B = \frac{\rho}{q\rho_1}, \quad c = \frac{1}{12} \frac{c_1^2}{c^2} q^2 - 1.$$

Применяется следующая формула преобразования Лапласа, получаемая из [10]: если  $f^L(s) = L[f(t)]$ , то имеет место

$$(1.7) \quad \frac{1}{q \sqrt{p^2 + q^2}} f^L(\sqrt{p^2 q^{-2} + 1}) = L \left[ \int_0^t J_0(q \sqrt{t^2 - \xi^2}) f(q\xi) d\xi \right],$$

где  $L$  — символ преобразования Лапласа [11];  $s$  — новое обозначение переменной преобразования Лапласа;  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка. Запись изображения в виде (1.6) соответствует левой части (1.7).

Функцию  $f^L(s)$  в (1.6) можно рассматривать как рациональную дробь относительно новой переменной  $s$  преобразования Лапласа. Оригинал от такой функции находится просто [11]. Используя этот оригинал и применяя формулу (1.7), совершим переход к оригиналу (по Лапласу) от изображения (1.6). Применив к получаемому результату формулу обращения преобразования Фурье, запишем окончательное выражение для скорости пластины в виде

$$(1.8) \quad V = cv = \frac{1}{\pi} \frac{Q}{\rho c \delta} \frac{\rho}{\rho_1} \int_0^\infty \cos(qx) \int_0^t J_0(q \sqrt{t^2 - \xi^2}) \times$$

$$\times \left[ \sum_{k=1}^3 \frac{s_k^2 \exp(s_k q \xi)}{R'(s_k)} \right] d\xi dq,$$

где  $R'(s_k) = 3s_k^2 + 2Bs_k + C$ ,  $s_k (k = 1, 2, 3)$  — корни кубического уравнения  $R(s) = s^3 + Bs^2 + Cs - B = 0$ .

Формула (1.8) остается справедливой при учете деформации сдвига, если входящий в нее коэффициент  $C$  взять в виде

$$C = qc_1^2 c^{-2} (q^2 c_1^2 c_2^{-2} + 12)^{-1} - 1, \quad c_2 = \sqrt{0,833G\rho_1^{-1}},$$

где  $G$  — модуль сдвига материала пластины.

2. Корни  $s_k (k = 1, 2, 3)$  кубического уравнения являются функцией переменной  $q$ . Среди них один корень при любых значениях  $q$  вещественный и положительный, два других — либо вещественные отрицательные,

либо комплексные сопряженные с отрицательной вещественной частью. Положительному корню соответствует под знаком интеграла (1.8) экспоненциальный член, быстро возрастающий с ростом  $\xi$ . Произведение этого члена на функцию Бесселя дает осциллирующую относительно нуля с большой частотой функцию с резко растущими амплитудами. Расчет интеграла (1.8) численными методами от этой функции затруднителен.

Подынтегральное выражение преобразуется по формуле

$$\exp(s_1 q \xi) = 2 \operatorname{ch}(s_1 q \xi) - \exp(-s_1 q \xi),$$

где  $s_1$  — положительный корень кубического уравнения. Это значение подставляется в (1.8). На основании выражения

$$\int_0^t J_0(q \sqrt{t^2 - \xi^2}) \operatorname{ch}(s_1 q \xi) d\xi = \frac{\sin(qt \sqrt{1 - s_1^2})}{q \sqrt{1 - s_1^2}},$$

вытекающего из формулы (6.677) работы [12] при мнимом значении аргумента при косинусе, можно получить

$$(2.1) \quad V = \frac{1}{\pi} \frac{Q}{\rho c \delta} \frac{\rho}{\rho_1} \int_0^\infty \cos(qx) \left( \frac{2s_1^2}{R'(s_1)} \frac{\sin(qt \sqrt{1 - s_1^2})}{s_1 \sqrt{1 - s_1^2}} + F \right) dq,$$

где  $F$  — интеграл, подынтегральная функция которого содержит экспоненциальные члены, имеющие аргументы с отрицательными вещественными частями. Как показали численные расчеты, вклад члена  $F$  в (2.1) в широком диапазоне  $t$  невелик и уменьшается с ростом  $t$ . Для стальной пластины и воды при  $t > 10$  этим членом можно пренебрегать. В случае несжимаемой жидкости ( $c \rightarrow \infty$ ) формула (2.1) принимает вид

$$V = \frac{1}{\pi} \frac{Q}{\rho_1 c_1 \delta} \int_0^\infty q^{-2} \sqrt{12q(q + \rho \rho_1^{-1})}^{-1} \sin(t_1 q^2 \sqrt{bq}) \cos(qx) dq,$$

$$t_1 = T c_1 \delta^{-1}, \quad b = [12(q + \rho \rho_1^{-1})]^{-1}.$$

Согласно [1], для больших значений времени может быть получена асимптотическая формула

$$(2.2) \quad V = \frac{2}{5\pi} \frac{Q}{\rho c \delta} t^{1/5} a^{-2/5} \int_0^\infty \sin y \cos(a^{-1/5} y^{2/5} \kappa) y^{-6/5} dy, \quad \kappa = xt^{-2/5}.$$

При  $x = 0$  интеграл в (2.2) выражается через  $\Gamma$ -функцию [12]

$$\int_0^\infty y^{-6/5} \sin y dy = \Gamma(-1/5) \sin(-\pi/10) \approx 1,8.$$

Поэтому асимптотическая формула для  $x = 0$  принимает вид

$$(2.3) \quad V = 0,229 \frac{Q}{\rho c \delta} t^{1/5} a^{-2/5}.$$

При выполнении приближенных расчетов иногда предполагается, что давление, действующее со стороны жидкости на внедряющееся в нее тело, равно произведению акустического сопротивления  $\rho c$  на нормальную составляющую скорости рассматриваемой точки тела (гипотеза плоского отражения). Для получения решения по этой гипотезе в правую часть второго уравнения (1.1) подставляется значение соответствующего давления. Затем к уравнению применяется преобразование Лапласа. При

этом получается обыкновенное дифференциальное уравнение относительно переменной  $x$ . Это уравнение решается при соответствующих граничных условиях, и находится изображение по Лапласу величины  $v$  в сечении  $X = 0$

$$v^L = 0,66 \frac{Q}{\rho_1 c \sqrt{cc_1 \delta}} (p^2 + \rho \rho_1^{-1} p)^{-3/4}.$$

После перехода к оригиналу можно получить формулу для скорости пластины

$$(2.4) \quad V = cv = 1,13 \frac{Q}{\rho c \delta} \sqrt{\frac{\rho c}{\rho_1 c_1}} \tau^{1/4} \exp(-\tau) I_{1/4}(\tau),$$

где  $I_{1/4}$  — функция Бесселя мнимого аргумента порядка  $1/4$ ;  $\tau = 0,5 \rho \rho_1^{-1} t$ .

3. Расчеты по полученным формулам выполнялись на ЭЦВМ «Проминь» и «Мир». В программе счета вместо корня  $s_1$  определялась величина  $r = 1 - s_1$ , для которой было составлено соответствующее кубическое уравнение. Это позволило избежать вычисления малых разностей при расчете величин, входящих в (2.1).

При  $q \rightarrow 0$  корень  $s_1$  стремится к единице и подынтегральная функция имеет неопределенность. Поэтому использовалось разложение подынтегральной функции в ряд в окрестности точки  $q = 0$ , что позволило раскрыть неопределенность и произвести интегрирование при малых значениях переменной  $q$ .

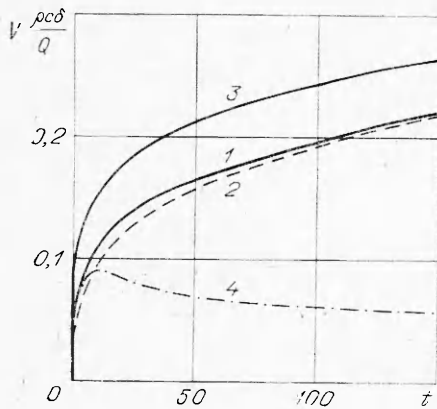
Ниже приводятся результаты расчетов для стальной пластины, соприкасающейся с водой ( $\rho_1/\rho = 7,85$ ).

На фиг. 1 представлен график скорости пластины в сечении  $X = 0$  (кривая 1), кривая 2 получена в предположении, что жидкость несжимаема. Результаты обоих расчетов оказываются близкими во всем диапазоне значений  $t$ , кроме начала ( $t < 5$ ). Пренебрежение сжимаемостью жидкости приводит к погрешности в определении скорости соответственно при  $t = 10 - 16\%$ ,  $t = 50 - 4\%$ ,  $t = 250 - 2\%$ , что является вполне приемлемым при выполнении расчетов.

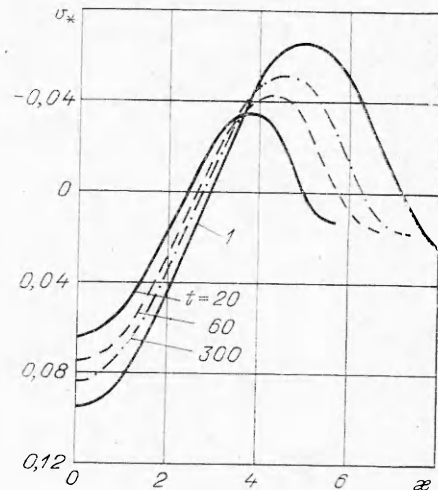
Деформация сдвига проявляется лишь в начальный момент движения пластины, а затем ее влияние быстро падает. Расчеты, выполненные для стальной пластины при  $t = 20$  с учетом сдвига и без него, практически совпадали. Этот результат согласуется с выводом работы [1] о том, что учет сдвига может потребоваться лишь в моменты времени с начала воздействия нагрузки, соизмеримые с несколькими периодами пробегания продольной волны по толщине пластины (до 4-х периодов).

Асимптотические формулы (2.2), (2.3) для больших значений времени соответствуют решению, в котором пренебрегается сжимаемостью жидкости и инерцией пластины [1]. Это означает, что влияние указанных факторов асимптотически незначительно. График асимптотического значения скорости нанесен на фиг. 1 (кривая 3), откуда следует, что при  $t > 100$  асимптотическое решение дает относительную погрешность менее 25%, уменьшающуюся с ростом  $t$ .

На фиг. 2 показаны распределения скорости по длине пластины, рассчитанные с помощью асимптотического и точного методов. Графики построены в координатных осях  $v_* = VQ^{-1} \rho c \delta t^{-1/3}$ ,  $\kappa$ . В координатной плоскости переменных  $v_*$  и кривая 1, соответствующая асимптотическому решению, занимает фиксированное положение. Остальные кривые соответствуют значениям скорости, полученным точным методом при различных значениях  $t$ , и по мере возрастания  $t$  приближаются к кривой 1. Лучшее совпадение асимптотического и точного решений наблюдается при ограниченных значениях  $\kappa$ . Первые пересечения кривых с осью  $v_* = 0$



Ф и г. 1



Ф и г. 2

(первые узловые точки) близки друг другу в широком диапазоне изменения переменной  $t$ . Для вторых точек пересечения сближение наблюдается при  $t > 300$ .

На фиг. 1 график скорости (кривая 4), рассчитанный по формуле (2.4) в соответствии с гипотезой плоского отражения, совпадает с точным решением при ограниченных  $t$  и дает удовлетворительный результат до  $t < 12$  (с погрешностью менее 25%).

Оценивая возможность применения гипотезы плоского отражения при решении различных задач, следует иметь в виду, что эта гипотеза соответствует стесненным условиям движения жидкости, в которых влияние сжимаемости жидкости оказывается существенным.

В рассматриваемой конкретной задаче размеры пластины и объем жидкости не ограничены, а нагрузка приложена в одном сечении пластины. В таких условиях жидкость имеет большую свободу перемещения вдоль поверхности пластины. Жидкость выдавливает участки пластины, удаленные от места приложения нагрузки, в сторону, противоположную направлению действия силы. Сама жидкость обжимается при этом незначительно.

Если же действующие нагрузки представляются в виде некоторой совокупности сил, распределенной по поверхности пластины, или пластина и жидкость ограничены по размерам, то могут создаваться условия, стесняющие перетекание жидкости вдоль поверхности пластины. В этих условиях учет сжимаемости жидкости может потребоваться в более широком диапазоне времени, а для некоторых видов движения осуществить перемещение без учета сжимаемости жидкости вообще оказывается невозможным.

Подобные условия создаются, например, при воздействии равномерно распределенной поперечной нагрузки, приложенной по всей поверхности безграничной пластины. В этом случае гипотеза плоского отражения дает точный результат.

Высказанные соображения свидетельствуют о том, что выбор приемлемой расчетной гипотезы для учета влияния жидкости в каждой конкретной задаче требует внимательного рассмотрения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Слепьян Л. И. Нестационарные упругие волны. Л., «Судостроение», 1972.
2. Press F., Ewing M. Theory of air-coupled flexural waves.— «J. Appl. Phys.», 1951, vol. 22, N 7, p. 892—899.
3. Гусейн-Заде М. И. Удар по бесконечной пластинке, лежащей на упругом жидком полупространстве.— «Докл. АН СССР», 1957, т. 113, № 3, с. 523—526.
4. Корчагин В. С. Осесимметричный удар по пластине, лежащей на поверхности сжимаемой жидкости.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1967, № 5, с. 168—174.
5. Кубенко В. Д. Пружне деформування пластинки під дією слабкої ударної сферичної хвилі у стаєливій ріднині.— «Доповіді АН УРСР», 1972, А, № 3, с. 237—240.
6. Huang H. Transient bending of a large elastic plate by an incident spherical pressure wave.— «Trans. ASME», 1974, vol. E41, N 3, p. 772—776.
7. Афанасьев Е. Ф. Удар тела о тонкую пластину, лежащую на поверхности сжимаемой жидкости.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 5, с. 868—879.
8. Solecki R. Vibrations of floating plate.— «Bulletin de l'academie polonaise des sciences. Serie des sciences techniques», 1966, vol. XIV, N 11—12, p. 647—650.
9. Norwood F. R., Warren W. E. Transient response of a plate-fluid system to stationary and moving pressure loads.— «Rozprawy inzynierskie», 1975, t. 23, N 2, p. 359—372.
10. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., «Выш. школа», 1965.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1968.
12. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1962.

УДК 532.526

## АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ВЕЕРНЫХ СТРУЙ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ ЗАКРУТКИ

Е. М. Смирнов  
(Ленинград)

Известны решения [1—4] задачи о распространении закрученных веерных (радиальных) струй в затопленном пространстве. В работах [1, 2] получены зависимости, справедливые на расстоянии, значительно превосходящем радиус круговой щели, где струя всегда слабозакрученная. При разыскании решения для струи, истекающей из бесконечно узкой щели конечного радиуса, предположение о слабозакрученности струи в [3] введено как дополнительное. В работе [4], где для ламинарной струи со значительной закруткой найдено несколько членов асимптотического разложения по обратным степеням расстояния от сопла, остается открытым вопрос об определении постоянных интегрирования.

В данной работе показано, что задача о распространении веерной струи, истекающей из бесконечно узкой щели конечного радиуса, имеет автомодельное решение при любой степени закрутки струи.

1. В приближении теории пограничного слоя уравнения, описывающие течение в закрученных веерных ламинарных или турбулентных струях несжимаемой жидкости, в цилиндрической системе координат  $x, y, \varphi$  (ось  $x$  направлена перпендикулярно оси симметрии,  $\varphi$  — полярный угол) имеют вид

$$(1.1) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{w^2}{x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial y};$$

$$(1.2) \quad u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{uw}{x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_\varphi}{\partial y};$$