

УДК 532.62

## ТРЕХМЕРНОЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ КЭССОНА НА НЕСТАЦИОНАРНОЙ РАСТЯГИВАЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЕ, ПОГРУЖЕННОЙ В ПОРИСТУЮ СРЕДУ

А. С. Бат\*, М. Н. Туфайл\*\*, А. Али\*\*,\*\*

\* Университет Куэд-и-Азам, 44000 Исламабад, Пакистан

\*\* Университет принца Мухаммада Бин Фахда, 31952 Эль Хобар, Саудовская Аравия  
E-mails: adnansaeedbutt85@gmail.com, nazimtufail@gmail.com, dr\_asif\_ali@hotmail.com

Исследуется трехмерное магнитогидродинамическое течение жидкости Кэссона на нестационарно растягивающейся поверхности, помещенной в пористую среду. С использованием преобразований подобия нестационарные дифференциальные уравнения в частных производных сводятся к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые решаются аналитически методом гомотопического анализа и численно методом стрельбы в сочетании с методом Рунге — Кутты — Фелберга. Проведено сравнение результатов, полученных в предельных случаях обоими методами, с известными данными. Исследовано влияние параметров жидкости Кэссона, магнитного поля и нестационарности на скорость и локальный коэффициент поверхностного трения.

**Ключевые слова:** растягивающаяся пластина, жидкость Кэссона, метод гомотопического анализа.

DOI: 10.15372/PMTF20160211

**Введение.** Интерес к исследованию течений в пограничном слое на растягивающейся поверхности обусловлен тем, что такие течения встречаются в различных технологических процессах (экструзия металлических и пластмассовых пластин, производство стекла, бумаги, очистка сырой нефти и т. д.). Задача о течении в пограничном слое вязкой жидкости, вызванном растяжением пластины по линейному закону, изучалась в работе [1]. В [2] исследованы характеристики теплообмена на изотермической растягивающейся пластине при наличии вдува и отсоса. В [3] рассмотрено течение на растягивающейся поверхности, скорость которого изменяется по степенному закону. В работе [4] изучено распределение температуры в потоке вязкой жидкости на растягивающейся пластине при воздействии однородного теплового потока. В [5] с использованием функции Куммера исследован процесс теплообмена на линейной неизотермической растягивающейся поверхности, температура которой изменяется в зависимости от координаты  $x$  по степенному закону. В [6] изучены характеристики течения и теплообмена на растягивающейся поверхности, где скорость и температура распределены по степенному закону. Влияние температуры и теплового потока на теплообмен на поверхности пластины, растягивающейся по линейному закону, при наличии вдува и отсоса исследовано в работе [7]. В [8] изучены стационарное течение и теплообмен вязкой жидкости на растягивающейся в пористой среде пластине.

В [9] проведен анализ магнитогидродинамического (МГД) течения и массообмена с учетом химических реакций на пластине, растягивающейся по линейному закону. В работе [10] исследован теплообмен при движении пористой среды на растягивающейся проницаемой пластине при наличии тепловыделения. В [11] изучены течение и теплообмен вязкой жидкости, насыщающей пористую среду, на проницаемой неизотермической растягивающейся пластине, в предположении наличия тепловыделения и поглощения и воздействия теплового излучения получено решение задачи в замкнутом виде. В [12] исследован процесс тепломассообмена в двумерных течениях в точке торможения потока вязкой жидкости на растягивающейся пластине при наличии сил плавучести и теплового излучения.

В указанных выше работах исследовались характеристики течения и теплообмена на равномерно растягивающейся поверхности. Однако для точного описания течения в управляющих уравнениях задачи необходимо учитывать нестационарность. В работе [13] изучено нестационарное течение в пограничном слое пленки жидкости на нестационарно растягивающейся пластине, с использованием преобразования подобия дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие течение, сведены к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. В [14] исследовано нестационарное течение растягивающейся по степенному закону пленки жидкости. Авторы работы [15] расширили постановку задачи, рассмотрев более общий закон изменения температуры. В [16] проведено исследование теплообмена в пленке жидкости с реологическим степенным законом на нестационарно растягивающейся поверхности. Процесс теплообмена в пограничном слое на нестационарно растягивающейся пластине изучен в работе [17]. Показано, что с увеличением параметра нестационарности толщина как теплового пограничного слоя, так и слоя вытеснения импульса уменьшается. В работе [18] проведен анализ течения и теплообмена в пограничном слое на вертикальной нестационарно растягивающейся поверхности. В [19] изучено воздействие теплового излучения на течение и теплообмен на нестационарно растягивающейся поверхности и получены автомодельные решения. В [20] исследовано влияние переменной вязкости на течение на нестационарно растягивающейся поверхности. В работе [21] рассмотрен процесс теплообмена на нестационарно растягивающейся поверхности, погруженной в пористую среду, при наличии выделения (поглощения) тепла и вязкой диссипации. Влияние тока Холла и магнитного поля на течение и теплообмен на проницаемой нестационарно растягивающейся пластине исследовано в [22]. Авторы работы [23] определили характеристики тепломассообмена в течении вязкой жидкости через пористую среду на нестационарно растягивающейся поверхности с учетом изменения вязкости и температуропроводности.

Неньютоновские жидкости имеют широкое применение, однако классические уравнения Навье — Стокса не описывают поведение таких жидкостей. Не существует единственного уравнения, определяющего все реологические свойства неньютоновских жидкостей. Имеется большое количество моделей неньютоновских жидкостей. Одна из этих моделей описывает жидкость, известную как жидкость Кэссона. Такая жидкость имеет предел текучести, т. е. напряжение сдвига, при котором материал приобретает свойства вязкой среды. Жидкость Кэссона (кровь, желе, томатный соус, мед, суп и т. д.) имеет бесконечную вязкость при нулевой скорости сдвига и нулевую вязкость при бесконечной скорости сдвига. В работе [24] изучено течение жидкости Кэссона между двумя вращающимися цилиндрами, в [25] — стационарный и колебательный режимы кровотока в рамках модели жидкости Кэссона. В [26] с использованием метода конечных элементов проведен анализ пульсирующего течения жидкости Кэссона в пористой среде, не удовлетворяющей закону Дарси. В [27] исследованы гидродинамическое нестационарное течение Куэтта и теплообмен в жидкости Кэссона между двумя параллельными пористыми пластинами, а также изучен эффект Холла и получено численное решение задачи. В работе [28] исследованы те-

чение и теплообмен жидкости Кэссона на нелинейно растягивающейся поверхности. В [29] с использованием метода гомотопического анализа получено аналитическое решение задачи об МГД-течении и теплообмене жидкости Кэссона вблизи точки торможения потока на растягивающейся поверхности с учетом условия частичного скольжения. В работе [30] исследовано влияние источника (стока) тепла на МГД-течение и теплообмен на проницаемой растягивающейся поверхности. В [31] изучены течение и теплообмен жидкости Кэссона на проницаемой пластине, растягивающейся по экспоненциальному закону.

Насколько известно авторам данной работы, трехмерное течение жидкости Кэссона на нестационарно растягивающейся поверхности ранее не исследовалось. Целью работы является изучение трехмерного МГД-течения жидкости Кэссона с учетом теплообмена на растягивающейся пластине, погруженной в пористую среду. Проводится сравнение результатов, полученных в предельных случаях, с результатами работ [21, 32].

**1. Математическая формулировка задачи.** Рассмотрим трехмерное ламинарное течение в пограничном слое электрически проводящей несжимаемой жидкости Кэссона, вызванное нестационарным растяжением погруженной в пористую среду пластины в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Предполагается, что пластина растягивается в направлениях  $x, y$  со скоростями  $u = u_w$  и  $v = v_w$  ( $u_w = ax/(1 - \gamma t)$ ;  $v_w = by/(1 - \gamma t)$ ;  $a, b, \gamma$  — константы, причем  $\gamma t < 1$ ). Растягивающаяся поверхность расположена в плоскости  $z = 0$ , жидкость ограничена областью  $z \geq 0$ . Зависящее от времени магнитное поле  $B(t)$  ориентировано перпендикулярно растягивающейся поверхности, электрическое поле отсутствует, а индуцированное магнитное поле предполагается настолько малым, что магнитным числом Рейнольдса можно пренебречь. В работе [33] предложена реологическая модель жидкости Кэссона

$$\tau_{ij} = \begin{cases} 2(\mu_0 + p_y/\sqrt{2\pi})e_{ij}, & \pi > \pi_c, \\ 2(\mu_0 + p_y/\sqrt{2\pi_c})e_{ij}, & \pi < \pi_c, \end{cases}$$

где  $\tau_{ij}$  — тензор напряжений Коши;  $\pi = e_{ij}e_{ij}$  — произведение компонент скорости деформации;  $e_{ij}$  —  $(i, j)$ -компонента скорости деформации;  $\pi_c$  — критическое значение величины  $\pi$ ;  $\mu_0$  — пластическая динамическая вязкость, используемая в модели неньютоновской жидкости;  $p_y$  — предел текучести жидкости. В этом случае нестационарные уравнения пограничного слоя, управляющие течением и процессом теплообмена, записываются следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\sigma B^2(t)}{\rho} u - \frac{\mu_e}{\rho K} u, \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\sigma B^2(t)}{\rho} v - \frac{\mu_e}{\rho K} v.$$

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} z = 0: & \quad u = u_w, \quad v = v_w, \quad w = 0, \\ z \rightarrow \infty: & \quad u \rightarrow 0, \quad v \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{3}$$

В (1)–(3)  $u, v, w$  — компоненты скорости в направлениях  $x, y, z$  соответственно;  $t$  — время;  $\beta = \mu_0\sqrt{2\pi_c}/p_y$  — параметр жидкости Кэссона;  $\sigma$  — электропроводность;  $\rho$  — плотность жидкости;  $\nu = \mu/\rho$  — кинематическая вязкость;  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости;  $\mu_e$  — эффективная вязкость жидкости;  $K$  — проницаемость пористой среды. Напряженность магнитного поля меняется по закону  $B(t) = B_0(1 - \gamma t)^{-1/2}$ .

Чтобы записать уравнения (1)–(3) в безразмерном виде, выполняются следующие преобразования:

$$u = \frac{ax}{1-\gamma t} f'(\eta), \quad v = \frac{ay}{1-\gamma t} g'(\eta), \quad w = -\sqrt{\frac{a\nu}{1-\gamma t}} (f(\eta) + g(\eta)), \quad \eta = \sqrt{\frac{a}{\nu(1-\gamma t)}} z. \quad (4)$$

С учетом (4) уравнение неразрывности (1) удовлетворяется тождественно, а уравнения (2) принимают вид

$$\begin{aligned} (1 + 1/\beta)f''' + (f + g)f'' - f'^2 - A(f' + \eta f''/2) - (M + \lambda)f' &= 0, \\ (1 + 1/\beta)g''' + (f + g)g'' - g'^2 - A(g' + \eta g''/2) - (M + \lambda)g' &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Граничные условия записываются в виде

$$\begin{aligned} f'(0) = 1, \quad g'(0) = b/a = \alpha, \quad f(0) + g(0) = 0, \quad f'(\infty) = g'(\infty) = 0, \\ \theta(0) = 1, \quad \theta(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Без потери общности можно положить [34]

$$f(0) = g(0) = 0. \quad (7)$$

В (5)–(7)  $A = c/a$  — параметр нестационарности (при  $A = 0$  задача является стационарной);  $M = \sigma B_0^2/(\rho a)$  — параметр магнитного поля;  $\lambda = (\mu_e/(\rho\nu)) \text{Re}_x / \text{Re}_k^2$  — параметр локальной пористости;  $\text{Re}_x = u_w x/\nu$  — локальное число Рейнольдса;  $\text{Re}_k = u_w \sqrt{K}/\nu$ ;  $\alpha = b/a$  — отношение скоростей растяжения.

Следует отметить, что при  $\alpha = 0$ ,  $M = 0$ ,  $\beta \rightarrow \infty$  рассматриваемая задача сводится к двумерной задаче, исследованной в работе [21]:

$$f''' + f f'' - f'^2 - A(f' + \eta f''/2) - \lambda f' = 0.$$

Безразмерные коэффициенты поверхностного трения вдоль направлений  $x$ ,  $y$  определяются по формулам

$$C_{fx} = \tau_{wx}/(\rho u_w^2), \quad C_{fy} = \tau_{wy}/(\rho v_w^2),$$

где  $\tau_{wx}$ ,  $\tau_{wy}$  — напряжения сдвига вдоль направлений  $x$  и  $y$ . Используя (4), получаем

$$\text{Re}_x^{1/2} C_{fx} = (1 + 1/\beta)f''(0), \quad \alpha \text{Re}_y^{1/2} C_{fy} = (1 + 1/\beta)g''(0),$$

где  $\text{Re}_y = v_w y/\nu$  — локальное число Рейнольдса.

**2. Решение задачи.** Для получения аналитических решений безразмерных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (5) с граничными условиями (6), (7) используется метод гомотопического анализа (МГА) [23, 29, 35, 36]. Выбраны следующие базовые функции:

$$f_0(\eta) = 1 - e^{-\eta}, \quad g_0(\eta) = \alpha(1 - e^{-\eta}).$$

Вспомогательные линейные операторы задаются формулами

$$L_f = \frac{d^3 f}{d\eta^3} - \frac{df}{d\eta}, \quad L_g = \frac{d^3 g}{d\eta^3} - \frac{dg}{d\eta}.$$

С использованием уравнений (5) нелинейные операторы определяются следующим образом:

$$N_f[\hat{f}(\eta; p), \hat{g}(\eta; p)] = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^3 \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta^3} + (\hat{f}(\eta; p) + \hat{g}(\eta; p)) \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta}\right)^2 -$$

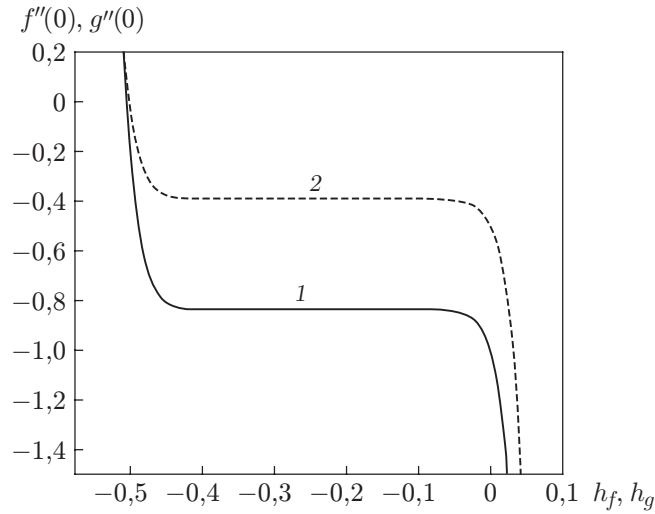


Рис. 1.  $h$ -кривые для функций  $f''(0)$  (1) и  $g''(0)$  (2) в приближении 20-го порядка при  $M = 1,0$ ,  $\beta = 0,3$ ,  $\lambda = 0,5$ ,  $A = 0,5$ ,  $\alpha = 0,5$

$$\begin{aligned}
 & - A \left( \frac{\partial \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \eta \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta^2} \right) - (M + \lambda) \frac{\partial \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta}, \\
 N_g[\hat{f}(\eta; p), \hat{g}(\eta; p)] = & \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^3 \hat{g}(\eta; p)}{\partial \eta^3} + (\hat{f}(\eta; p) + \hat{g}(\eta; p)) \frac{\partial^2 \hat{g}(\eta; p)}{\partial \eta^2} - \left( \frac{\partial \hat{g}(\eta; p)}{\partial \eta} \right)^2 - \\
 & - A \left( \frac{\partial \hat{g}(\eta; p)}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \eta \frac{\partial^2 \hat{g}(\eta; p)}{\partial \eta^2} \right) - (M + \lambda) \frac{\partial \hat{g}(\eta; p)}{\partial \eta}.
 \end{aligned}$$

Уравнения деформации нулевого порядка и граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned}
 (1 - p)L_f[\hat{f}(\eta; p) - f_0(\eta)] &= h_f p N_f[\hat{f}(\eta; p), \hat{g}(\eta; p)], \\
 (1 - p)L_g[\hat{g}(\eta; p) - g_0(\eta)] &= h_g p N_g[\hat{f}(\eta; p), \hat{g}(\eta; p)],
 \end{aligned}$$

где  $h_f, h_g$  — управляющие параметры сходимости;  $p \in [0, 1]$  — параметр вложения, связанный с деформацией отображений  $\hat{f}(\eta; p), \hat{g}(\eta; p)$ , которые непрерывно меняются от значений  $f_0(\eta), g_0(\eta)$  к значениям  $f(\eta), g(\eta)$  при изменении  $p$  от 0 до 1. Решения, полученные с помощью МГА, записываются в виде рядов

$$f(\eta) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta), \quad g(\eta) = g_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\eta), \quad \theta(\eta) = \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(\eta).$$

Сходимость рядов решений для  $f(\eta)$  и  $g(\eta)$  существенно зависит от неизвестных параметров  $h_f$  и  $h_g$ . На рис. 1 представлены  $h$ -кривые, полученные в приближении 20-го порядка. Видно, что диапазонами сходимости для  $h_f$  и  $h_g$  являются  $-0,08 \leq h_f \leq -0,40$  и  $-0,05 \leq h_g \leq -0,42$ . Значения функций  $f''(0)$  и  $g''(0)$  вычислены при  $h_f = h_g = -0,3$ . В табл. 1 приведены зависимости функций  $-f''(0), -g''(0)$  от порядка приближения метода. Из табл. 1 следует, что ряды решения сходятся при 20-м порядке аппроксимации с точностью до шести десятичных разрядов.

Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения (5) с граничными условиями (6), (7) можно решить численно с использованием метода стрельбы в сочетании с методом Рунге — Кутты — Фелберга четвертого порядка. Размер шага выбран равным

Таблица 1

Сходимость решений, полученных с помощью МГА  
для приближений различного порядка,  
при  $M = 1,0$ ,  $\beta = 0,3$ ,  $\lambda = 0,5$ ,  $A = 0,5$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $h_f = h_g = -0,3$

Порядок приближения	$-f''(0)$	$-g''(0)$
10	0,837 745	0,395 118
15	0,837 745	0,395 117
20	0,837 745	0,395 117
25	0,837 745	0,395 117
30	0,837 745	0,395 117
35	0,837 745	0,395 117
40	0,837 745	0,395 117
45	0,837 745	0,395 117
50	0,837 745	0,395 117

Таблица 2

Значения  $-f''(0)$  и  $-g''(0)$ , полученные в данной работе и работе [32],  
при  $M = 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\beta \rightarrow \infty$

$\alpha$	$-f''(0)$				$-g''(0)$			
	МГА [32]	Точное решение [32]	МГА (данная работа)	Метод стрельбы (данная работа)	МГА [32]	Точное решение [32]	МГА (данная работа)	Метод стрельбы (данная работа)
0	-1	-1	-1	-1	—	—	—	—
0,1	1,017 027	1,020 260	1,020 260	1,020 260	0,073 099	0,066 847	0,066847	0,066 847
0,2	1,034 587	1,039 495	1,039 495	1,039 495	0,158 231	0,148 737	0,148737	0,148 737
0,3	1,052 470	1,057 955	1,057 955	1,057 955	0,254 347	0,243 360	0,243360	0,243 360
0,4	1,070 529	1,075 788	1,075 788	1,075 788	0,254 347	0,243 360	0,243360	0,243 360
0,5	1,088 662	1,093 095	1,093 095	1,093 095	0,476 290	0,465 205	0,465205	0,465 205
0,6	1,106 797	1,109 947	1,109 947	1,109 947	0,600 833	0,590 529	0,590529	0,590 529
0,7	1,124 882	1,126 398	1,126 398	1,126 398	0,733 730	0,724 532	0,724532	0,724 532
0,8	1,142 879	1,142 489	1,142 489	1,142 489	0,874 551	0,866 683	0,866683	0,866 683
0,9	1,160 762	1,158 254	1,158 254	1,158 254	1,022 922	1,016 539	1,016539	1,016 539
1,0	1,178 511	1,173 721	1,173 721	1,173 721	1,178 511	1,173 721	1,173721	1,173 721

$\Delta\eta = 0,001$  на интервале  $0 \div \eta_{\max}$ , где  $\eta_{\max} = 15$ . Это обеспечивает сходимость численного решения. В качестве критерия сходимости выбрана точность до шести десятичных разрядов.

**3. Результаты исследования и их обсуждение.** Проведено сравнение результатов, полученных методом гомотопического анализа и методом стрельбы, со значениями  $-f''(0)$  и  $-g''(0)$ , вычисленными в работах [21, 32] для предельного случая (табл. 2, 3). Из табл. 2, 3 следует, что полученные решения хорошо согласуются. Это свидетельствует о высокой точности методов, используемых в данной работе. Выполнены численные расчеты при различных значениях параметров задачи (рис. 2–10). На рис. 2 показано влияние параметра жидкости Кэссона  $\beta$  на скорости  $f'(\eta)$  и  $g'(\eta)$ . С увеличением параметра жидкости Кэссона значения  $f'(\eta)$  и  $g'(\eta)$  уменьшаются, что обусловлено увеличением сопротивления с увеличением  $\beta$ . На рис. 3 показано влияние магнитного параметра  $M$  на значения  $f'(\eta)$  и  $g'(\eta)$ . С увеличением значения  $M$  скорость жидкости уменьшается, поскольку сила сопро-

Таблица 3

Значения  $f''(0)$ , полученные в данной работе и работе [21], при  $M = 0, \alpha = 0, \beta \rightarrow \infty, A = 0,5$

$\lambda$	$f''(0)$		
	Данные [21]	МГА (данная работа)	Метод стрельбы (данная работа)
0	-1,167 721	-1,167 212	-1,167 212
0,5	-1,366 245	-1,366 237	-1,366 237
1,0	-1,539 056	-1,539 051	-1,539 051
1,5	-1,694 089	-1,694 085	-1,694 085
2,0	-1,835 965	-1,835 962	-1,835 962

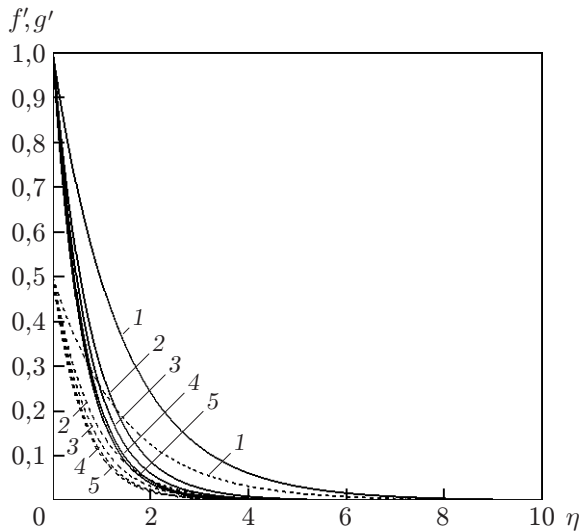


Рис. 2

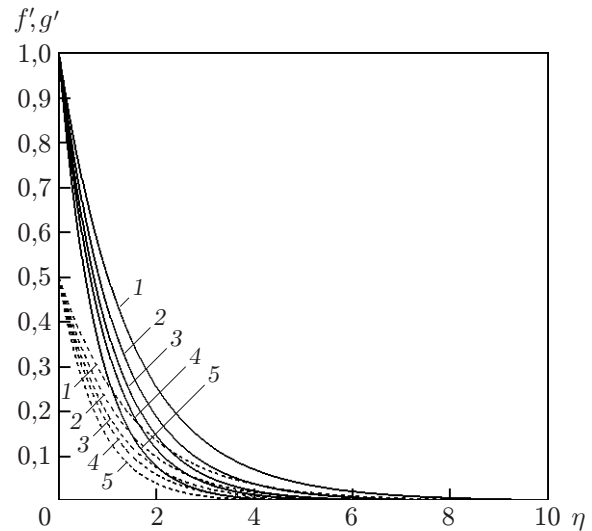


Рис. 3

Рис. 2. Зависимости  $f'(\eta)$  (сплошные линии) и  $g'(\eta)$  (штриховые линии) при  $M = 1,0, \lambda = 0,5, \alpha = 0,5, A = 0,5$  и различных значениях параметра жидкости Кэссона  $\beta$ :  
 1 —  $\beta = 0,2, 2 — \beta = 1,0, 3 — \beta = 2,0, 4 — \beta = 10,0, 5 — \beta = \infty$

Рис. 3. Зависимости  $f'(\eta)$  (сплошные линии) и  $g'(\eta)$  (штриховые линии) при  $\beta = 0,3, \lambda = 0,5, \alpha = 0,5, A = 0,5$  и различных значениях параметра магнитного поля  $M$ :  
 1 —  $M = 0, 2 — M = 1,0, 3 — M = 2,0, 4 — M = 3,0, 5 — M = 5,0$

тивления, известная как сила Лоренца, с увеличением  $M$  увеличивается, что в конечном счете замедляет течение жидкости. Влияние параметра пористости  $\lambda$  на скорости  $f'(\eta)$  и  $g'(\eta)$  показано на рис. 4. Видно, что скорости в обоих направлениях ( $x$  и  $y$ ) уменьшаются с увеличением  $\lambda$ . Из рис. 5 следует, что увеличение параметра нестационарности  $A$  приводит к уменьшению скоростей  $f'(\eta)$  и  $g'(\eta)$ . Таким образом, увеличение параметра нестационарности вызывает замедление движения жидкости. Влияние отношения скоростей растяжения  $\alpha$  на скорости  $f'(\eta)$  и  $g'(\eta)$  показано на рис. 6. Видно, что с увеличением  $\alpha$  скорость  $f'(\eta)$  уменьшается, а скорость  $g'(\eta)$  увеличивается.

На рис. 7–10 представлены зависимости коэффициентов поверхностного трения в направлениях  $x$  и  $y$  от параметра нестационарности  $A$  при различных значениях параметра жидкости Кэссона  $\beta$  и параметра магнитного поля  $M$ . На рис. 7 показано влияние параметра жидкости Кэссона  $\beta$  на коэффициент поверхностного трения  $C_{fx}$ . Видно, что с увеличе-

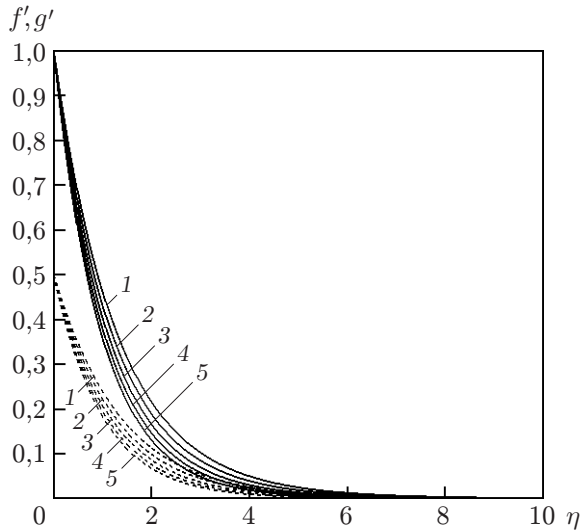


Рис. 4

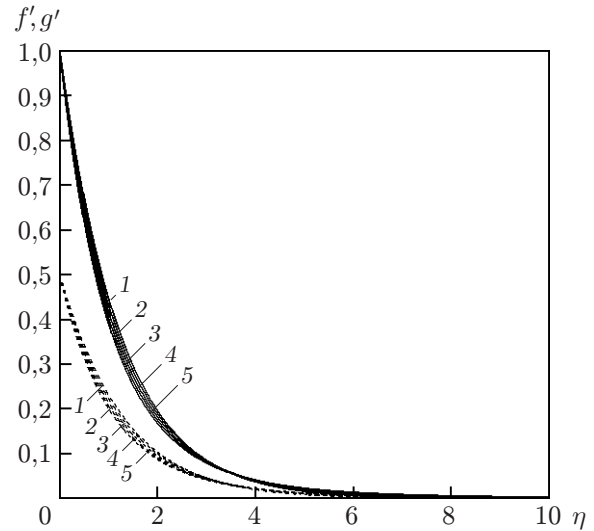


Рис. 5

Рис. 4. Зависимости  $f'(\eta)$  (сплошные линии) и  $g'(\eta)$  (штриховые линии) при  $M = 1,0$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $A = 0,5$ ,  $\beta = 0,3$  и различных значениях параметра пористости  $\lambda$ :

1 —  $\lambda = 0$ , 2 —  $\lambda = 0,5$ , 3 —  $\lambda = 1,0$ , 4 —  $\lambda = 1,5$ , 5 —  $\lambda = 2,0$

Рис. 5. Зависимости  $f'(\eta)$  (сплошные линии) и  $g'(\eta)$  (штриховые линии) при  $M = 1,0$ ,  $\lambda = 0,5$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 0,3$  и различных значениях параметра нестационарности  $A$ :

1 —  $A = 0$ , 2 —  $A = 0,5$ , 3 —  $A = 1,0$ , 4 —  $A = 1,5$ , 5 —  $A = 2,0$

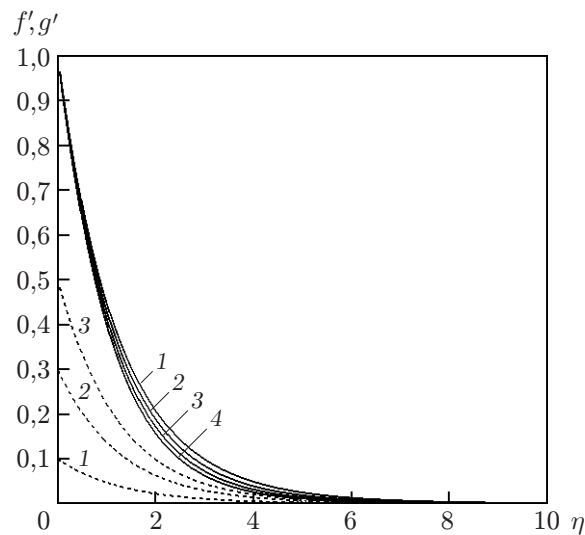


Рис. 6. Зависимости  $f'(\eta)$  (сплошные линии) и  $g'(\eta)$  (штриховые линии) при  $M = 1,0$ ,  $\lambda = 0,5$ ,  $A = 0,5$ ,  $\beta = 0,3$  и различных значениях отношения скоростей растяжения  $\alpha$ :

1 —  $\alpha = 0$ , 2 —  $\alpha = 0,1$ , 3 —  $\alpha = 0,3$ , 4 —  $\alpha = 0,5$



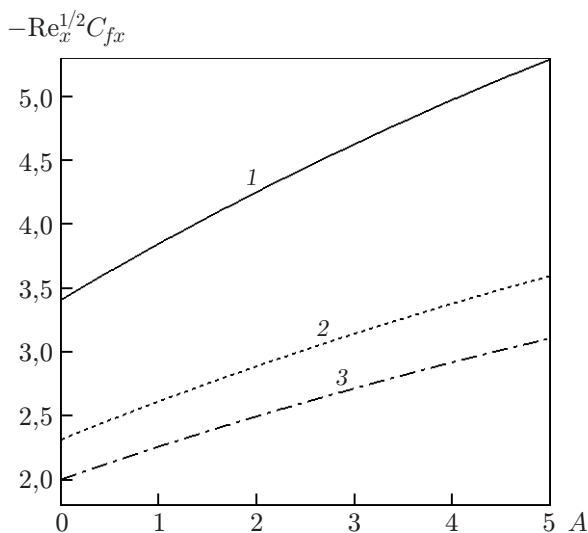


Рис. 7

Рис. 7. Зависимость коэффициента поверхностного трения  $-\text{Re}_x^{1/2} C_{fx}$  от параметра нестационарности  $A$  при различных значениях параметра жидкости Кэссона  $\beta$ :

1 —  $\beta = 0,3$ , 2 —  $\beta = 1,0$ , 3 —  $\beta = 2,0$

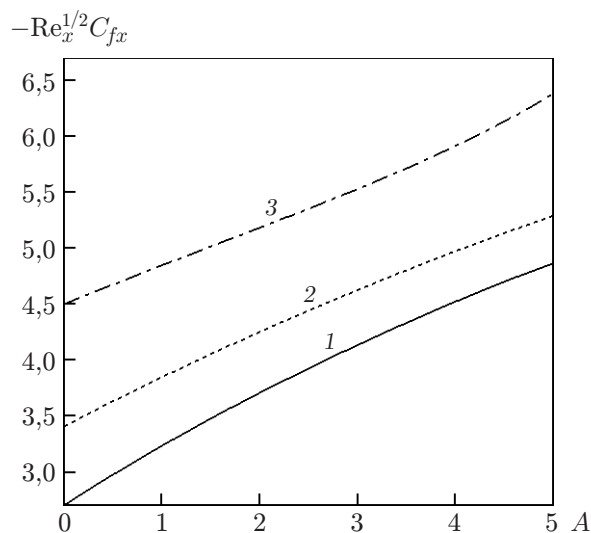


Рис. 8

Рис. 8. Зависимость коэффициента поверхностного трения  $-\text{Re}_x^{1/2} C_{fx}$  от параметра нестационарности  $A$  при  $\beta = 0,3$ ,  $\lambda = 0,5$ ,  $\alpha = 0,5$  и различных значениях параметра магнитного поля  $M$ :

1 —  $M = 0$ , 2 —  $M = 1,0$ , 3 —  $M = 3,0$

нием параметра нестационарности  $A$  коэффициент поверхностного трения увеличивается, а с увеличением параметра жидкости Кэссона — уменьшается. В то же время увеличение параметра магнитного поля  $M$  приводит к увеличению коэффициента поверхностного трения  $C_{fx}$  (рис. 8). При постоянном значении  $M$  коэффициент поверхностного трения увеличивается с увеличением  $A$ . Влияние параметра жидкости Кэссона  $\beta$  и параметра магнитного поля  $M$  на коэффициент поверхностного трения  $C_{fy}$  показано на рис. 9, 10. Видно, что с увеличением параметра жидкости Кэссона  $\beta$  коэффициент поверхностного трения  $C_{fy}$  уменьшается, а с увеличением параметра магнитного поля  $M$  — увеличивается.

**Заключение.** В работе исследовано трехмерное МГД-течение неньютоновской жидкости Кэссона на нестационарной растягивающейся поверхности, погруженной в пористую среду. При анализе задачи решались сильнонелинейные дифференциальные уравнения с использованием метода гомотопического анализа и метода стрельбы в сочетании с методом Рунге — Кутты — Фелберга. Вследствие линейного растяжения поверхности в двух направлениях в расчетах используется отношение скоростей растяжения  $\alpha$ , оказывающее влияние на характеристики течения. Увеличение  $\alpha$  приводит к уменьшению скорости  $f'(\eta)$  и увеличению скорости  $g'(\eta)$ . Наличие магнитного поля и пористой среды замедляет поток жидкости, что приводит к уменьшению скоростей  $f'(\eta)$  и  $g'(\eta)$ . Таким образом, коэффициенты поверхностного трения  $C_{fx}$  и  $C_{fy}$  увеличиваются с увеличением параметра магнитного поля  $M$  и параметра пористости  $\lambda$ . Увеличение параметра жидкости Кэссона  $\beta$  приводит к уменьшению скоростей в обоих направлениях и коэффициентов поверхностного трения. Существенное влияние на течение оказывает параметр нестационарности  $A$ .

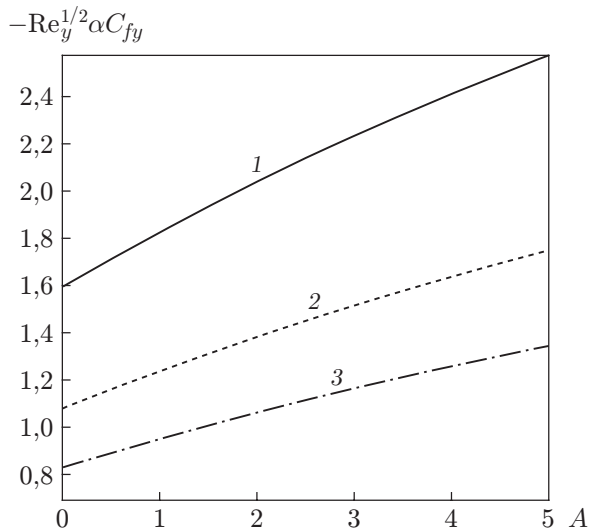


Рис. 9

Рис. 9. Зависимость коэффициента поверхностного трения  $-\text{Re}_y^{1/2} \alpha C_{fy}$  от параметра нестационарности  $A$  при  $M = 1,0$ ,  $\lambda = 0,5$ ,  $\alpha = 0,5$  и различных значениях параметра жидкости Кэссона  $\beta$ :

1 —  $\beta = 0,3$ , 2 —  $\beta = 1,0$ , 3 —  $\beta = 2,0$

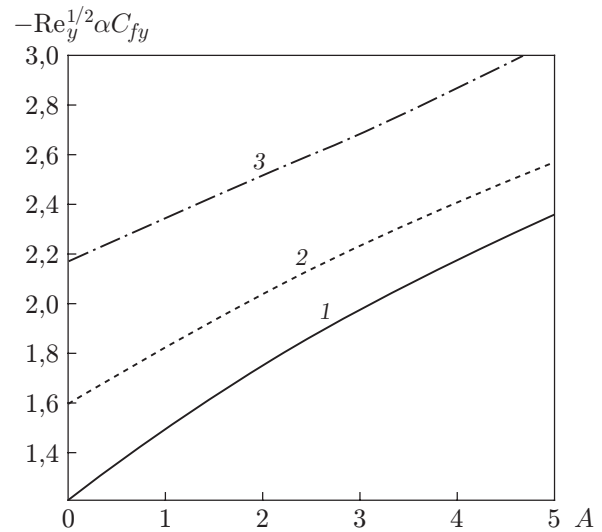


Рис. 10

Рис. 10. Зависимость коэффициента поверхностного трения  $-\text{Re}_y^{1/2} \alpha C_{fy}$  от параметра нестационарности  $A$  при  $\beta = 0,3$ ,  $\lambda = 0,5$ ,  $\alpha = 0,5$  и различных значениях параметра магнитного поля  $M$ :

1 —  $M = 0$ , 2 —  $M = 1,0$ , 3 —  $M = 3,0$

нрности  $A$ . С увеличением значения  $A$  скорости  $f'(\eta)$  и  $g'(\eta)$  уменьшаются, а коэффициенты поверхностного трения увеличиваются.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Crane L. J.** Flow past a stretching sheet // *Z. angew. Math. Phys.* 1970. Bd 21. S. 645–647.
2. **Gupta P. S., Gupta A. S.** Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing // *Canad. J. Chem. Engng.* 1977. V. 55. P. 744–746.
3. **Banks W. H. H.** Similarity solutions of the boundary layer equation for a stretching wall // *J. Mech. Theor. Appl.* 1983. V. 2. P. 375–392.
4. **Dutta B. K., Roy P., Gupta A. S.** Temperature field in flow over a stretching sheet with uniform heat flux // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer.* 1985. V. 28. P. 1234–1237.
5. **Grubka J., Bobba K. M.** Heat transfer characteristics of a continuous stretching surface with variable temperature // *Trans. ASME. J. Heat Transfer.* 1985. V. 107. P. 248–250.
6. **Ali M. E.** On thermal boundary layer on a power law stretched surface with suction or injection // *Intern. J. Heat Mass Flow.* 1995. V. 16. P. 280–290.
7. **Elbasheshy E. M. A.** Heat transfer over a stretching surface with variable heat flux // *J. Phys. D. Appl. Phys.* 1998. V. 31. P. 1951–1955.
8. **Sriramalu A., Kishan N., Anand R. J.** Steady flow and heat transfer of a viscous incompressible fluid flow through porous medium over a stretching sheet // *J. Energy Heat Mass Transfer.* 2001. V. 23. P. 483–495.

9. **Takhar H. S., Chamkha A. J., Nath G.** Flow and mass transfer on a stretching sheet with a magnetic field and chemically reactive species // *Intern. J. Engng Sci.* 2000. V. 38. P. 1303–1314.
10. **Elbashbeshy E. M. A., Bazid M. A. A.** Heat transfer in a porous medium over a stretching sheet with internal heat generation and suction or injection // *Appl. Math. Comput.* 2004. V. 158. P. 799–807.
11. **Liu I. C.** Flow and heat transfer of viscous fluid saturated in porous media over a permeable non-isothermal stretching sheet // *Trans. Porous Media.* 2006. V. 64. P. 375–392.
12. **Pal D.** Heat and mass transfer in stagnation-point flow towards a stretching surface in the presence of buoyancy force and thermal radiation // *Meccanica.* 2009. V. 44. P. 145–158.
13. **Wang C. Y.** Liquid film on an unsteady stretching surface // *Quart. Appl. Math.* 1990. V. 48. P. 1234–1237.
14. **Andersson H. I., Aarseth J. B., Braud N., Dandapat B. S.** Flow of a power-law fluid on an unsteady stretching surface // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 1996. V. 62. P. 1–8.
15. **Liu I. C., Andersson H. I.** Heat transfer in a liquid film on an unsteady stretching sheet // *Intern. J. Therm. Sci.* 2008. V. 47. P. 766–772.
16. **Chen C. H.** Heat transfer in a power-law fluid over an unsteady stretching sheet // *Heat Mass Transfer.* 2007. V. 39. P. 791–796.
17. **Elbashbeshy E. M. A., Bazid M. A. A.** Heat transfer over an unsteady stretching surface // *Heat Mass Transfer.* 2004. V. 41. P. 1–4.
18. **Ishak A., Nazar R., Pop I.** Boundary layer flow and heat transfer over an unsteady stretching vertical surface // *Meccanica.* 2009. V. 44. P. 369–375.
19. **Aziz M. A. E.** Radiation effect on the flow and heat transfer over an unsteady stretching sheet // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer.* 2009. V. 36. P. 521–524.
20. **Shateyi S., Motsa S. S.** Variable viscosity on magnetohydrodynamic fluid flow and heat transfer over an unsteady stretching surface with Hall effect // *Boundary Value Problems.* 2010. V. 2010. Article ID 257568. DOI: 10.1155/2010/257568.
21. **Pal D., Hiremath P. S.** Computational modelling of heat transfer over an unsteady stretching surface embedded in a porous medium // *Meccanica.* 2010. V. 45. P. 415–424.
22. **Pal D.** Hall current and MHD effects on heat transfer over an unsteady stretching permeable surface with thermal radiation // *Comput. Math. Appl.* 2013. V. 66. P. 1161–1180.
23. **Husnain S., Mehmood A., Ali A.** Heat and mass transfer analysis in unsteady boundary layer flow through porous media with variable viscosity and thermal diffusivity // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2012. V. 53, N 5. P. 722–732.
24. **Eldabe N. T. M., Salwa M. G. E.** Heat transfer of MHD non-Newtonian Casson fluid flow between two rotating cylinders // *J. Phys. Soc. Japan.* 1995. V. 64. P. 41–64.
25. **Boyd J., Buick J. M., Green S.** Analysis of the Casson and Carreau — Yasuda non-Newtonian blood models in steady and oscillatory flow using the lattice Boltzmann method // *Phys. Fluids.* 2007. V. 19. P. 93–103.
26. **Bhargava R., Takhar H. S., Rawat S., et al.** Finite element solutions for non-Newtonian pulsatile flow in a non-Darcian porous medium conduit // *Nonlinear Anal. Model. Control.* 2007. V. 12. P. 317–327.
27. **Attia H. A., Ahmed M. E. S.** Transient MHD Couette flow of a Casson fluid between parallel plates with heat transfer // *Italian J. Pure Appl. Math.* 2010. V. 27. P. 19–38.
28. **Mukhopadhyay S.** Casson fluid flow and heat transfer over a nonlinearly stretching surface // *Chinese Phys. B.* 2013. V. 27. P. 074701–074705.

29. **Nandy S. K.** Analytical solution of MHD stagnation-point flow and heat transfer of Casson fluid over a stretching sheet with partial slip // ISRN. Thermodynamics. 2013. V. 2013. Article ID 108264.
30. **Tufail M. N., Butt A. S., Ali A.** Heat source/sink effects on non-Newtonian MHD fluid flow and heat transfer over a permeable stretching surface: Lie group analysis // Indian J. Phys. 2013. V. 88. P. 75–82. DOI: 10.1007/s12648-013-0376-3.
31. **Vajravelu K., Mukhopadhyay S., Gorder R. A. V.** Casson fluid flow and heat transfer at an exponentially stretching permeable surface // J. Appl. Mech. 2013. V. 80. P. 054502–054509.
32. **Ariel P. D.** The three-dimensional flow past a stretching sheet and the homotopy perturbation method // Comput. Math. Appl. 2007. V. 54. P. 910–925.
33. **Nakamura M., Sawada T.** Numerical study on the flow of a non-Newtonian fluid through an axisymmetric stenosis // ASME. J. Biomech. Engng. 1988. V. 110. P. 137–143.
34. **Wang C. Y.** The three-dimensional flow due to stretching flat surface // Phys. Fluids. 1984. V. 27. P. 1915–1917.
35. **Kandasamy R., Muhaimin I.** Homotopy analysis method for thermophoretic particle deposition effect on magnetohydrodynamic mixed convective heat and mass transfer past a porous wedge in the presence of suction // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2010. V. 51, N 2. P. 249–260.
36. **Tabaei H., Moghimi M. A., Kimiaefar A., Moghimi M. A.** Homotopy analysis and differential quadrature solution of the problem of free-convective magnetohydrodynamic flow over a stretching sheet with the Hall effect and mass transfer taken into account // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2011. V. 52, N 4. P. 624–636.

*Поступила в редакцию 9/I 2013 г.,  
в окончательном варианте — 2/IV 2014 г.*

---