

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ КЛИНА ИЗ НЕОДНОРОДНОГО УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

М. А. Забян, Н. Б. Сафарян

(Ереван)

Рассматриваются сжатие и изгиб плоского бесконечного клина, к вершине которого приложена сосредоточенная сила $P(t)$, меняющаяся во времени по специальному закону. Материал принимается несжимаемым, пластически неоднородным и подчиняется степенному закону упрочнения. К этим материалам, по существу, могут относиться также и нелинейно-упругие, нелинейно-вязкие тела, сжимаемостью которых можно пренебречь. Исследуются такие воздействия внешних сил, при которых точки тела совершают колебательные или монотонные во времени движения. Определены сосредоточенные силы, соответствующие рассмотренному деформированному состоянию клина. Вопросы разгрузки не обсуждаются, поэтому для случая пластических тел здесь изучаются такие этапы движений, которые приводят к нагружению.

Напряженное состояние в пластически неоднородных телах при динамических воздействиях исследовано в [1—3] и др. Подробный анализ динамических задач пластически неоднородных тел дан в [4, 5].

Изучение вопросов динамического деформирования пластически неоднородного несжимаемого тела представляет интерес, особенно с точки зрения изучения влияния инерционных сил на напряженно-деформированное состояние тела.

Динамические задачи для несжимаемых пластических сред при осесимметричной и плоской деформации рассмотрены в [6, 7].

1. Уравнения деформационной теории пластичности для несжимаемого неоднородного материала со степенным законом упрочнения в случае плоской деформации в обычных обозначениях имеют следующий вид: дифференциальные уравнения движения

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \end{aligned}$$

зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon_0 &= \left(\frac{\sigma_0}{K} \right)^3, \quad K = K(r, \theta), \\ \sigma_0 &= \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2}, \quad \varepsilon_0 = \sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + 4\gamma_{r\theta}^2} \end{aligned}$$

($K(r, \theta)$ — известная функция, характеризующая пластическую неоднородность материала);

соотношения между компонентами деформаций, перемещений и напряжений

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2} k(r, \theta) \sigma_0^2 (\sigma_r - \sigma), \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{2} k(r, \theta) \sigma_0^2 (\sigma_\theta - \sigma), \\ 2\gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = k(r, \theta) \sigma_0^2 \tau_{r\theta} \end{aligned}$$

($k(r, \theta) = K^{-3}(r, \theta)$, $\sigma = (1/2)(\sigma_r + \sigma_\theta)$ — среднее напряжение). В дальнейшем принимаем, что неоднородность определяется по закону

$$(1.4) \quad K(r, \theta) = k\omega(\theta),$$

где k — постоянная величина; $\omega(\theta)$ — известная функция, определяемая из эксперимента.

Компоненты перемещения, удовлетворяющие условию несжимаемости, представим как

$$(1.5) \quad u = r^{-\lambda-1} \psi'(\theta) f(t), \quad v = \lambda r^{-\lambda-1} \psi(\theta) f(t)$$

($\psi(\theta)$ и $f(\theta)$) — произвольные функции своих аргументов; λ — постоянный параметр). Исходя из соотношений (1.3), для компонент напряжений имеем

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_\theta - 4k(\lambda + 1)r^{-\frac{\lambda+2}{3}} \psi'(\theta) \omega(\theta) \chi(\theta) f^{1/3}(t), \\ \tau_{r\theta} &= kr^{-\frac{\lambda+2}{3}} [\psi''(\theta) - \lambda(\lambda + 2)\psi(\theta)] \omega(\theta) \chi(\theta) f^{1/3}(t), \\ \chi(\theta) &= \{4(\lambda + 1)^2 \psi'^2(\theta) + [\psi''(\theta) - \lambda(\lambda + 2)\psi(\theta)]^2\}^{-\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Подставляя выражения перемещений (1.5) и напряжений (1.6) в первое уравнение (1.1), получим

$$(1.7) \quad \sigma_\theta = H(t) + \frac{3kr^{-\frac{\lambda+2}{3}}}{\lambda + 2} f^{1/3}(t) \left\{ [\psi''(\theta) - \lambda(\lambda + 2)\psi(\theta)] \omega(\theta) \chi(\theta) \right\}' + \\ + \frac{4}{3} (\lambda^2 - 1) \psi'(\theta) \omega(\theta) \chi(\theta) \left\} - \frac{\rho}{\lambda} r^{-\lambda} \psi'(\theta) f''(t)$$

($H(t)$ — произвольная функция аргумента). Выражения (1.5)–(1.7) будут решением системы уравнений (1.1), если $\lambda = 1$, а функция $\psi(\theta)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$(1.8) \quad \frac{\omega(\psi'' - 3\psi)}{\sqrt[3]{(\psi'' - 3\psi)^2 - 16\psi'^2}} - \nu\psi = A \sin(\theta + \delta).$$

Здесь $\nu = \pm \mu^2 \rho / k$; μ — постоянная величина; A , δ — произвольные постоянные. Функция $f(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$(1.9) \quad \ddot{f} \pm \mu f^{1/3} = 0,$$

решение которого при $\mu \neq 0$ представляется в квадратурах:

$$(1.10) \quad \sqrt{\frac{3}{2}} \mu t = \pm \int_{f_0}^f dx / \sqrt{c^{4/3} + x^{4/3}},$$

где f_0 , c — параметры, характеризующие динамическое деформирование. Минус в подкоренном выражении соответствует нелинейному колебанию тела, а плюс — монотонному во времени деформированию. График зависимости (1.10) при $f_0 = 0$ приведен на рис. 1.

Формулы напряжений и перемещений примут вид

$$(1.11) \quad \sigma_r = \frac{kf^{1/3}(t)}{r} \left[A \cos(\theta + \delta) - \frac{8\psi'\omega}{\sqrt[3]{(\psi'' - 3\psi)^2 + 16\psi'^2}} \right] + H(t), \\ \sigma_\theta = \frac{kf^{1/3}(t)}{r} A \cos(\theta + \delta) + H(t), \quad \tau_{r\theta} = \frac{kf^{1/3}(t)}{r} [A \sin(\theta + \delta) + \nu\psi], \\ u = \frac{f(t)}{r^2} \psi'(\theta), \quad v = \frac{f(t)}{r^2} \psi(\theta).$$

Исходя из условия $\sigma_\theta = 0$ при $\theta = \pm\alpha$, в соотношениях (1.11) получим $A = 0$, $H(t) = 0$. Уравнение (1.8) запишем как

$$(1.12) \quad \frac{\omega(\psi'' - 3\psi)}{\sqrt[3]{(\psi'' - 3\psi)^2 + 16\psi'^2}} - \nu\psi = 0.$$

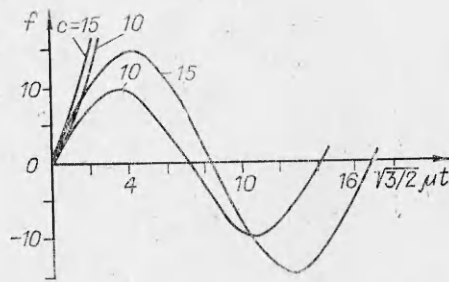


Рис. 1

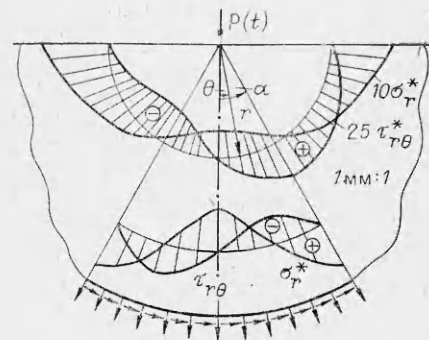


Рис. 2

Дифференциальное уравнение (1.12) приводится к кубическому относительно $(\psi'' - 3\psi)^{-1}$. Определяя действительный корень его, приходим к дифференциальному уравнению

$$(1.13) \quad \psi'' - 3\psi = \frac{4\sqrt{3} \nu \psi \psi'}{\sqrt[3]{6\sqrt{3} \psi' \omega^3 + \sqrt{\nu^6 \psi^6 + 108\omega^6 \psi'^2} + \sqrt[3]{6\sqrt{3} \psi' \omega^3 - \sqrt{\nu^6 \psi^6 + 108\omega^6 \psi'^2}}}$$

2. В случае сжатия клина сосредоточенной силой, приложенной к вершине, следует интегрировать дифференциальное уравнение (1.13) с крайними условиями

$$(2.1) \quad \psi = 0 \text{ при } \theta = 0, \quad \psi = 0 \text{ при } \theta = \alpha.$$

Для численного решения удобнее свести (1.13) к системе двух уравнений первого порядка

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \psi' &= s/6 \sqrt{3}, \quad s' = 18 \sqrt{3} \psi + \\ &+ \frac{4\sqrt{3} \nu \psi s}{\sqrt[3]{s\omega^3 + \sqrt{s^2\omega^6 + \nu^6\psi^6} + \sqrt[3]{s\omega^3 - \sqrt{s^2\omega^6 + \nu^6\psi^6}}} \end{aligned}$$

с крайними условиями (2.1).

Для установления зависимости между $P(t)$ и $f(t)$ рассмотрим равновесие мысленно выделенного из клина сектора с произвольным радиусом r

$$(2.3) \quad P(t) + 2 \int_0^\alpha (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) r d\theta = 0.$$

Подставляя (2.3) в выражения компонент напряжений, после некоторых упрощений получим

$$P(t) = kJf^{1/3}(t),$$

где

$$J = 2\nu \int_0^\alpha \psi \sin \theta d\theta + \frac{4}{\sqrt[3]{3}} \int_0^\alpha \left[\sqrt[3]{s\omega^3 + \sqrt{s^2\omega^6 + \nu^6\psi^6}} + \sqrt[3]{s\omega^3 - \sqrt{s^2\omega^6 + \nu^6\psi^6}} \right] \cos \theta d\theta.$$

Окончательно формулы напряжений и перемещений представляются как

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2}{\sqrt[3]{3}} \frac{P(t)}{Jr} \left[\sqrt[3]{\omega^3 s + \sqrt{s^2\omega^6 + \nu^6\psi^6}} + \sqrt[3]{\omega^3 s - \sqrt{s^2\omega^6 + \nu^6\psi^6}} \right], \\ \tau_{r\theta} &= \frac{\nu P(t)}{Jr} \psi, \quad \sigma_\theta = 0, \\ u &= \frac{P^3(t)}{6\sqrt[3]{3} k^3 J^3} \frac{s}{r^2}, \quad v = \frac{P^3(t)}{k^3 J^3} \frac{\psi}{r^2}. \end{aligned}$$

При $P(t) = \text{const}$ происходит статическое деформирование. Тогда произвольный параметр $\nu = 0$. Решением уравнения (1.13) будет

$$\psi(\theta) = c_1 \operatorname{sh} \sqrt{3}\theta + c_2 \operatorname{ch} \sqrt{3}\theta$$

(c_1, c_2 — произвольные постоянные). Из условия $\psi(0) = 0$ следует $c_2 = 0$. Формулы компонент напряжений и перемещений имеют вид

$$(2.5) \quad \sigma_r = -\frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} \frac{c_1^{1/3}}{r} k\omega(\theta) \operatorname{ch}^{1/3} \sqrt{3}\theta, \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0,$$

$$u = \frac{\sqrt{3} c_1 \operatorname{ch} \sqrt{3}\theta}{r^2}, \quad v = \frac{c_1 \operatorname{sh} \sqrt{3}\theta}{r^2}.$$

Для определения неизвестной постоянной c_1 рассмотрим статическое равновесие мысленно выделенного из клина сектора с произвольным радиусом r

$$P + 2 \int_0^\alpha \sigma_r \cos \theta \cdot r d\theta = 0.$$

Подставляя сюда выражение для σ_r из (2.5), имеем

$$c_1 = \frac{2r^3}{\sqrt{3} J_1^{3/2}}, \quad J_1 = 8 \int_0^\alpha \omega(\theta) \operatorname{ch}^{1/3} \sqrt{3}\theta \cos \theta d\theta.$$

Статическое сжатие однородного клина сосредоточенной силой, приложенной в вершине, для общего случая степенного упрочнения исследовано в [8, 9].

На основании численного решения краевой задачи (2.1), (2.2) на ЭВМ-1022 методом пристрелки [10] построены графики относительных напряжений $\sigma_{ij}^* = \frac{Jr}{P(t)} \sigma_{ij}$ по формулам (2.4) (при $\alpha = \pi/6, \pi/2, \nu = 60$) для случая неоднородности $\omega(\theta) = \exp(\theta^2/2)$ (рис. 2).

Задача сводится к задаче Коши, если удастся получить достаточное количество краевых условий на одном из концов отрезка интегрирования. Предположим, что удалось оценить те значения искомых функций, которые не заданы на данном конце отрезка интегрирования, тогда имеющаяся информация достаточна для интегрирования системы дифференциальных уравнений как в сторону возрастания аргумента, так и в обратном направлении. Если использованные оценки правильны, то два найденных таким образом решения будут совпадать во внутренних точках отрезка интегрирования. Поэтому задача состоит в поэтапном улучшении первоначальных оценок для неизвестных граничных условий до тех пор, пока решения не совпадут.

Сравнение полученных результатов с результатами для однородного материала показывает, что неоднородность существенно влияет на напряженно-деформированное состояние. Действительно, при угле раствора $\alpha = \pi/6$ учет неоднородности приводит к возрастанию относительных нормальных и касательных напряжений на 20 и 10%, а при $\alpha = \pi/2$ соответственно в 3 раза и на 50%.

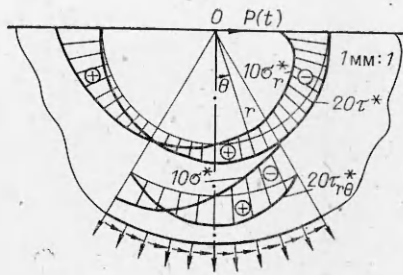
3. Рассмотрим случай, когда бесконечный клин изгибается сосредоточенной силой $P(t)$, приложенной к вершине перпендикулярно оси.

Компоненты напряжений и перемещений в этом антисимметричном случае

$$\sigma_r = -\frac{8kf^{1/3}(t)}{r} \frac{\psi'(\theta) \omega(\theta)}{\sqrt{[\psi''(\theta) - 3\psi(\theta)]^2 + 16\psi'^2(\theta)}},$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{4kf^{1/3}(t)}{r} \psi(\theta), \quad \sigma_\theta = 0,$$

$$u = \frac{f(t)}{r^2} \psi'(\theta), \quad v = \frac{f(t)}{r^2} \psi(\theta), \quad \nu = \pm \mu^2 \rho / k,$$



Р и с . 3

на сектора с произвольным радиусом r с центром в вершине

$$P(t) + 2 \int_0^{\alpha} (\sigma_r \sin \theta + \tau_{r\theta} \cos \theta) r d\theta = 0.$$

Подставляя сюда компоненты напряжения, используя представление (2.2), находим

$$P(t) = kJf^{1/3}(t), J = -2v \int_0^{\alpha} \psi \sin \theta d\theta + \\ + \frac{i4}{\sqrt{3}} \int_0^{\alpha} \left[\sqrt[3]{\omega^3 s + \sqrt{s^2 \omega^6 + v^6 \psi^6}} + \sqrt[3]{\omega^3 s - \sqrt{s^2 \omega^6 + v^6 \psi^6}} \right] \sin \theta d\theta.$$

Окончательные формулы напряжений и перемещений представляются в форме (2.4). При $P(t) = \text{const}$ происходит статическое деформирование. Тогда для неизвестной функции $\psi(\theta)$ получим $\psi(\theta) = c_2 \text{ch} \sqrt{3}\theta$.

Формулы компонент напряжений и перемещений примут вид

$$\sigma_r = -\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{6}r} c_2^{1/3} k \omega(\theta) \text{sh}^{1/3} \sqrt{3}\theta, \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0, \\ u = \frac{\sqrt{3} c_2 \text{sh} \sqrt{3}\theta}{r^2}, v = \frac{c_2 \text{ch} \sqrt{3}\theta}{r^2}.$$

Для определения неизвестной постоянной c_2 рассмотрим статическое равновесие мысленно выделенного из клина сектора с произвольным радиусом r

$$P + 2 \int_0^{\alpha} \sigma_r \sin \theta \cdot r d\theta = 0.$$

Отсюда

$$c_2 = \frac{2r^3}{\sqrt{3} J_2}, J_2 = 8 \int_0^{\alpha} \omega(\theta) \text{sh}^{1/3} \sqrt{3}\theta \sin \theta d\theta.$$

На основании численного решения краевой задачи (2.2), (3.1) на ЭВМ ЕС-1022 методом пристрелки [10] построены графики относительных напряжений $\sigma_{ij}^* = \frac{Jr}{P(t)} \sigma_{ij}$ по формулам (2.4) (при $\alpha = \pi/6, \pi/2, \nu = = 60$) для случая неоднородности $\omega(\theta) = \exp(\theta^2/2)$ (рис. 3).

Сравнение полученных результатов с результатами для однородного материала показывает, что неоднородность приводит к увеличению относительных напряжений. При $\alpha = \pi/6$ относительные нормальные напряжения возрастают на 15%, а при $\alpha = \pi/2$ — в 3 раза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. Исследование законов распространения плоских упругопластических волн в среде с переменным пределом упругости // ПММ.— 1950.— Т. 14, № 1.
2. Кукуджанов В. Н., Никитин Л. В. Распространение волн в стержнях из неоднородного упруго-вязко-пластического материала // Изв. АН СССР. ОТН.— 1960.— № 4.
3. Новацкий В. К. Волновые задачи теории пластичности.— М.: Мир, 1978.
4. Рахматулин Х. А., Шапиро Г. С. Распространение возмущений в нелинейно упругой и неупругой среде // Изв. АН СССР. ОТН.— 1955.— № 2.
5. Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел.— М.: Мир, 1964.
6. Задоян М. А. Распространение пластической зоны в неоднородной трубе при динамическом воздействии давления // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук.— 1960.— Т. 13, № 3.
7. Задоян М. А. Об одном классе решений плоской динамической задачи теории пластичности // ДАН СССР.— 1981.— Т. 260, № 1.
8. Соколовский В. В. Теория пластичности.— М.: Высш. шк., 1969.
9. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук.— 1959.— Т. 12, № 2.
10. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений /Под ред. Дж. Холла и Дж. Уатга.— М.: Мир, 1979.

Поступила 3/III 1986 г.

УДК 539.376 + 539.019

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

В. А. Заев, А. Ф. Никитенко
(Новосибирск)

Практически все исследования, посвященные оптимальному проектированию элементов конструкций, выполнены в предположении установившейся ползучести и не учитывают того обстоятельства, что разрушению материала предшествует процесс накопления повреждений в нем, сопровождающийся непрерывным перераспределением напряжений. Решение оптимизационных задач с традиционным критерием оптимальности типа равнопрочности в большинстве случаев приводит к неосуществимым проектам.

В связи с этим ниже сформулирована вариационная постановка задачи расчета и проектирования оптимальных по долговечности элементов конструкций. При этом в качестве функционала цели предлагается использовать критерий оптимальности, учитывающий суммарную по объему повреждаемость материала в процессе ползучести. Разработана методика решения этой задачи на основе методов нелинейного программирования.

Пусть тело объемом V , ограниченное поверхностью S , нагружено постоянными во времени поверхностными нагрузками. Система уравнений, описывающая ползучесть материала с одновременным учетом накопления в нем повреждений, имеет вид [1]

$$(1) \quad \dot{p}_{ij} = \frac{\Phi_1}{(1-\omega)^m} \frac{s_{ij}}{2S_2}, \quad i, j = 1, 2, 3;$$

$$(2) \quad \dot{\omega} = \Phi_2 / (1-\omega)^m,$$

где Φ_1, Φ_2 — однородные относительно напряжений функции степени $(n+1)$ и $(g+1)$; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij}/3$; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; $S_2 = s_{ij}s_{ij}/2$; p_{ij} — компоненты тензора деформации ползучести; ω — параметр повреждаемости; m, n, g — характеристики материала; точка означает дифференцирование по времени.

В начальный момент времени во всех точках тела $\omega(x_k, 0) = 0$, в момент времени t_* в некоторой точке тела с координатами x_k^* ($k = 1, 2, 3$) параметр повреждаемости достигает своего критического значения $\omega(x_k^*, t_*) = 1$ и происходит разрушение материала (t_* — время начала разрушения тела).