

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ПОТОКА В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ТОРМОЖЕНИЯ

И. А. Белов

(Ленинград)

Рассмотрен класс решений для идеального потока в окрестности точки торможения плоской преграды, когда поток вдали от преграды предполагается вихревым. Показано, что потенциальный поток в окрестности точки торможения является частным случаем данного класса решений. Для течения в слое смешения потока с преградой получены решения с учетом завихренности внешнего потока, которые существенно отличаются от аналогичного решения Хименца для потенциального потока в окрестности точки торможения плоской преграды.

Рассматривается плоское течение несжимаемой жидкости, натекающей по нормали на плоскую преграду бесконечной протяженности, в прямоугольной системе координат  $xOy$ , где  $x$  направлена вдоль преграды, а  $y$  — по нормали к ней. Область течения ограничена поверхностью  $y=0$  преграды с точкой торможения  $x=y=0$  и сечением  $y=y_\infty$ , где влияние преграды пренебрежимо мало или где предполагается известным закон деформации преградой профиля скорости внешнего потока. Известно решение Хименца, описывающее вязкое течение в окрестности точки торможения для внешнего потенциального потока [1]. Покажем, что решение поставленной задачи может быть получено также для более сложных течений, когда внешний поток идеальной жидкости является вихревым. Наличие вихря на внешней границе слоя вязкого смешения преграды в этом случае приводит к существенным отличиям от решения Хименца.

1. Пусть натекающий на преграду поток идеальной жидкости является равномерным и равным  $V_\infty$  при  $y=y_\infty$ . Полагая  $v/V_\infty = -F(y/y_\infty)$ , из уравнений неразрывности и переноса вихря получим

$$(1.1) \quad u/V_\infty = F' x/y_\infty; \quad FF'''' - F'F'' = 0,$$

где  $v$  и  $u$  — соответственно нормальная и касательная к преграде составляющие скорости.

Решение уравнения (1.1) при граничных условиях  $y/y_\infty = 0, F=0$ ;  $y/y_\infty = 1, F=1, F'=0$  имеет вид

$$(1.2) \quad F = \sin \frac{\pi}{2} \frac{y}{y_\infty}.$$

Из (1.2) следует, что

$$(1.3) \quad v = -V_\infty \sin \frac{\pi}{2} \frac{y}{y_\infty}; \quad u = \frac{\pi}{2} \frac{V_\infty}{y_\infty} x \cos \frac{\pi}{2} \frac{y}{y_\infty}.$$

Можно убедиться, что данное решение соответствует потоку вдали от преграды с вихрем, линейно-зависящим от координаты  $x$ :

$$\Omega(1) = \frac{\pi^2}{4} \frac{V_\infty}{y_\infty^2} x.$$

2. В ряде случаев интерес представляет анализ течения в окрестности точки торможения, когда внешний поток, натекающий на преграду, не является равномерным, а изменяется с координатой  $x$  по некоторому закону, отличному от линейного. Покажем, что и тогда существует решение типа (1.3) для определенного класса функций, описывающих изменение скорости внешнего потока с координатой  $x$ . Решение для нормальной составляющей скорости ищем в виде

$$(2.1) \quad v/V_0 = -F(y/y_\infty) \Phi'(x/y_\infty),$$

где  $V_0$  — характерная скорость в сечении  $y=y_\infty$ . Тогда для касательной к преграде составляющей скорости имеем

$$(2.2) \quad u/V_0 = F'(y/y_\infty) \Phi(x/y_\infty).$$

Из уравнения переноса вихря с учетом (2.1), (2.2) следует, что

$$(2.3) \quad \frac{\Phi\Phi''' - \Phi'\Phi''}{\Phi\Phi'} = \frac{FF''' - F'F''}{FF'} = \text{const.}$$

Принимая значение постоянной в (2.3) равной нулю, получим два уравнения типа (1.1) относительно  $\Phi$  и  $F$ . Решение их при граничных условиях

$$(2.4) \quad \begin{aligned} y/y_\infty=0, F=0; \quad y/y_\infty=1, F=1, F'=0; \\ x/y_\infty=0, \Phi=0; \quad x/y_\infty=x_\infty/y_\infty, \Phi=1. \\ \Phi'=0 \end{aligned}$$

имеет вид

$$(2.5) \quad F = \sin \frac{\pi}{2} \frac{y}{y_\infty}; \quad \Phi = \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{x_\infty}.$$

Из (2.5) следует, что

$$(2.6) \quad \begin{aligned} v &= -\frac{\pi}{2} \frac{y_\infty}{x_\infty} V_0 \sin \frac{\pi}{2} \frac{y}{y_\infty} \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{x_\infty}; \\ u &= \frac{\pi}{2} V_0 \cos \frac{\pi}{2} \frac{y}{y_\infty} \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{x_\infty}. \end{aligned}$$

Если принять на оси симметрии при  $y=y_\infty$  то же значение скорости  $V_\infty$ , что и в ранее рассмотренном случае, из (2.6) следует, что  $V_0 = V_\infty / \Phi'(0)$ . Полученное решение представляет поток с вихрем, равным

$$\Omega(1) = \left[ 1 + \left( \frac{x_\infty}{y_\infty} \right)^2 \right] \frac{y_\infty}{x_\infty} \frac{\pi}{2} \frac{V_\infty}{y_\infty} \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{y_\infty}, \quad 0 \leq x \leq x_\infty.$$

3. Приняв значение постоянной в (2.3), отличное от нуля, получим следующие два уравнения, определяющие идеальное течение в окрестности точки торможения:

$$(3.1) \quad FF''' - F'F'' - AFF' = 0; \quad \Phi\Phi''' - \Phi'\Phi'' - A\Phi\Phi' = 0.$$

Решение последних при граничных условиях (2.4) для ряда значений  $A$  получено численно на БЭСМ-4 методом Рунге—Кутты с точностью  $10^{-5}$ . Поиск дополнительно граничного условия осуществлялся по методу Ньютона так, чтобы  $f[F''(1)] = |F(0)| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon = 10^{-4}$  — допустимая погрешность выполнения граничного условия.

Результаты решения представлены для функций  $F$  и  $F'$  (штриховые линии) на фиг. 1 (кривые 1—5 при  $A=20; 5; 0,1; -5; -14$  соответственно). Аналогичный вид имеют функции  $\Phi, \Phi'$ .

Выясним диапазон изменения параметра  $A$ , в котором существует решение уравнений (3.1). Рассмотрим уравнение относительно  $F(y/y_\infty)$ . Используя условие  $F'(1)=0$ , его можно записать в виде

$$(3.2) \quad F'^2 = \left(C - \frac{A}{2}\right)(F^2 - 1) + AF^2 \ln F.$$

Из последнего уравнения видно, что необходимым условием получения действительных корней функции  $F'$  является условие  $(C - A/2) \leq 0$  для отрицательных  $A$ , т. е.  $C \leq A/2, A < 0$ . Так как при  $A=0, C = -\pi^2/4$ , то решение (3.2) существует для всех отрицательных  $A$ . При  $A > 0$  область положительных корней  $F'$  определяется из условия

$$(3.3) \quad |AF_m^2 \ln F_m| \leq |(C - A/2)(F_m^2 - 1)|,$$

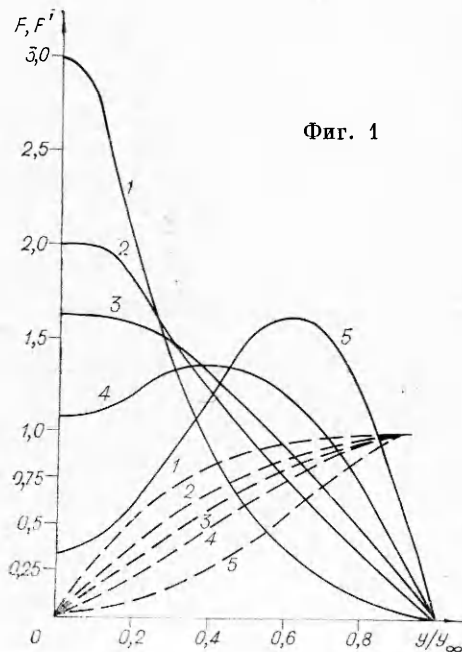
где  $F_m$  соответствует  $F$  при  $\max(F^2 \ln F)$ . С учетом (3.3) получим, что  $-\infty < C < |A|/5$ .

Найдем решение (3.2) при  $C=A/2, A < 0$ . В этом случае

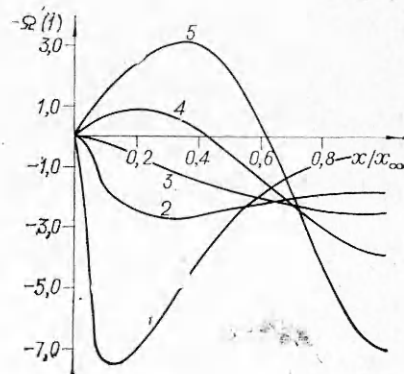
$$F = \exp \left[ \frac{A}{4} (1 - y/y_\infty)^2 \right],$$

т. е. данное решение при граничных условиях (2.4) справедливо лишь при  $A \rightarrow -\infty$ , следовательно, условие  $C=A/2$  приближенно соблюдается только в случае  $A \ll 0$ .

Решение уравнений (3.1) соответствует завихренности внешнего потока  $\Omega$  (1) (фиг. 2, кривые 1—5 при  $A=20; 5; 0,1; -5; -14$  соответственно):



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\Omega(1) = -\frac{V_0}{y_\infty} F''(1) \left[ \Phi\left(\frac{x}{y_\infty}\right) + \frac{\Phi'(x/y_\infty)}{F''(1)} \right], \quad -\infty < F''(1) < |A|/5,$$

где  $x_\infty = y_\infty$ ;  $V_0$  — характерная скорость на верхней границе  $y = y_\infty$ . Обозначив  $V_\infty$  за максимальную скорость при  $y = y_\infty$ , получим, что  $V_0 = V_\infty / \max |\Phi'(x/y_\infty)|$ .

При  $A \ll 0$  выражение для вихря во внешнем потоке (при  $x_\infty = y_\infty$ ) может быть приближенно записано в виде

$$\Omega(1) \approx \frac{V_\infty}{y_\infty} \sqrt{2e|A|} \left[ 1 + \frac{A}{4} \left( 1 - \frac{x}{y_\infty} \right)^2 \right] \exp \left[ \frac{A}{4} \left( 1 - \frac{x}{y_\infty} \right)^2 \right].$$

Классифицируя полученные решения, можно отметить, что параметр  $A$  является коэффициентом формы профиля скорости натекающего на преграду потока. При  $A \geq 0$  максимум скорости в натекающем на преграду потоке совпадает с осью симметрии, при  $A < 0$  максимум скорости смещен относительно оси симметрии к периферии.

4. Исследуем влияние поперечной составляющей скорости  $U_\infty$  на внешней границе  $y = y_\infty$  области взаимодействия идеального потока с преградой. Пусть  $A = 0$  и  $F(1) = 1$ ;  $F'(1) = B$ , где  $U_\infty = BV_\infty \Phi(x)$ . Тогда при  $F(0) = 0$  получим следующее уравнение для  $F(y/y_\infty)$ :

$$(4.1) \quad F' = \pm \sqrt{B^2 - C} \sqrt{1 - \frac{C}{C - B^2} F^2}, \quad C = F''(1).$$

Если  $C/(C - B^2) > 0$ , тогда для  $C \leq 0$   $F'$  имеет действительные корни при любом  $B$ . Так как  $\sqrt{-C} = \pi/2$  при  $B = 0$ , в интервале  $[-\pi/2, 0]$  решение (4.1) имеет вид

$$F \sin \sqrt{-C} = \sin \sqrt{-C} y / y_\infty,$$

причем, как следует из условия  $F(1) = 1$ , величина  $\sqrt{-C}$  зависит от  $B$  следующим образом:

$$(4.2) \quad B = \pm \sqrt{-C} \operatorname{ctg} \sqrt{-C}.$$

Из (4.2) видно, что  $\sqrt{-C} \rightarrow 0$  при  $B \rightarrow \pm 1$ . Последнее значение при  $B = 1$  соответствует течению потенциального потока вблизи точки торможения преграды:  $F = y/y_\infty$ ;  $v = -V_\infty y/y_\infty$ ;  $u = V_\infty x/y_\infty$ , а при  $B = -1$  — потенциальному течению от преграды.

Приняв  $C/(C - B^2) < 0$ , получим для  $C > 0$ ,  $B^2 \geq C$ :

$$F \operatorname{sh} \sqrt{C} = \operatorname{sh} \sqrt{C} y / y_\infty,$$

где  $\sqrt{C}$  связан с  $B$  зависимостью

$$B = \pm \sqrt{C} \operatorname{cth} \sqrt{C}.$$

Полученные при  $A = 0$  решения соответствуют потоку на верхней границе  $y = y_\infty$  с вихрем, равным

$$\Omega(1) = -V_\infty C x / y_\infty^2; \quad v(y = y_\infty) = -V_\infty = \text{const};$$

$$\Omega(1) = \left[ 1 - C \left( \frac{2}{\pi} \frac{x_\infty}{y_\infty} \right)^2 \right] \frac{y_\infty}{x_\infty} \frac{\pi}{2} \frac{V_\infty}{y_\infty} \sin \frac{\pi}{2} \frac{x}{x_\infty};$$

$$v(y = y_\infty) = -V_\infty \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{x_\infty},$$

где  $C = F''(1)$ , причем при  $C < 0$   $\Omega > 0$ , а при  $C > 0$   $\Omega < 0$ .

Аналогичные соотношения могут быть также получены и для потока с коэффициентом формы  $A \neq 0$ .

5. Рассмотренные случаи течения потока идеальной жидкости вблизи точки торможения требуют для их практической реализации выполнения определенных условий по завихренности потока на заданном расстоянии от преграды. Очевидно, что завихренность в потоке, обусловленная действием сил вязкости, может быть получена за счет выбора формы канала, в котором поток формируется, а также за счет организованного смещения потока в канале или окружающей среде. Примером таких течений могут служить течения в суживающемся и расширяющемся каналах, спутные течения, в том числе спутное течение позади тела, обтекаемого в продольном направлении [1, 2], течения в струях с равномерным и неравномерным профилем скорости на срезе сопла [3]. В последнем случае можно указать на ряд физических аналогов полученных решений, известных из практики использования эффекта взаимодействия струй с преградами. Так, решение для коэффициента формы профиля натекающего на преграду потока  $A > 0$  соответствует случаю взаимодействия дозвуковой струи с преградой в пределах основного участка струи, а для  $A < 0$  — в пределах начального участка, когда преграда деформирует профиль скорости струи на срезе сопла, т. е. на близких расстояниях от среза сопла до преграды [4, 5].

Выясним влияние формы профиля скорости натекающего на преграду потока на характер течения вблизи преграды. Для этого рассмотрим вязкое течение в слое вблизи преграды, когда внешний поток характеризуется различными по величине и знаку коэффициентами формы профиля скорости. В качестве исходной системы уравнений, определяющей вязкое течение, используем уравнения Навье — Стокса. Сформулируем граничные условия. Из решения для идеального потока следует, что градиент скорости в точке торможения при  $x_\infty = y_\infty$  равен

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{V_\infty}{y_\infty} F'(0) \frac{\Phi'(x/y_\infty)}{\max[\Phi'(x/y_\infty)]},$$

где  $V_\infty$  — максимальная скорость в сечении  $y = y_\infty$  (при  $A \geq 0$  максимум скорости находится на оси симметрии  $x = 0$ , при  $A < 0$  — смещен от оси симметрии к периферии).

Обозначив  $\beta = V_\infty F'(0)/y_\infty$  и учитывая, что на близких расстояниях от преграды ( $y \rightarrow 0$ ) характер изменения нормальной к преграде скорости близок к линейному, можем принять в качестве внешнего условия для вязкого течения вблизи преграды

$$\bar{v}(\infty) = -\Phi'(\bar{x}/\bar{y}_\infty)\bar{y}/\Phi'_m; \quad \bar{u}(\infty) = \Phi(\bar{x}/\bar{y}_\infty)\bar{y}_\infty/\Phi'_m,$$

где  $\bar{v}$ ,  $\bar{u} = v$ ,  $u/V\sqrt{\beta v}$ ;  $\bar{x}$ ,  $\bar{y} = (x, y)V\sqrt{\beta v}$  ( $v$  — коэффициент кинематической вязкости);

$$\Phi'_m = \max[\Phi'(\bar{x}/\bar{y}_\infty)].$$

В качестве граничного условия на стенке используем условие прилипания жидкости к стенке:  $\bar{u}(0) = \bar{v}(0) = 0$ .

Представим функцию  $\Phi'(\bar{x}/\bar{y}_\infty)/\Phi'_m$  в виде степенного ряда, содержащего только четные степени  $\bar{x}$  (ряд Блазиуса [1]):

$$\frac{\Phi'(\bar{x}/\bar{y}_\infty)}{\Phi'_m} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n} \bar{x}^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n} \left(\frac{\beta}{v} \bar{y}_\infty^2\right)^n \left(\frac{\bar{x}}{\bar{y}_\infty}\right)^{2n}$$

и будем искать решение для  $\bar{v}$ ,  $\bar{u}$  в слое вязкого смещения вблизи преграды ( $0 \leq \bar{y} \leq \infty$ ) в виде соответствующих рядов:

$$\bar{v} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n} \bar{x}^{2n} f_{2n}(\bar{y});$$

$$\bar{u} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a_{2n} \bar{x}^{2n+1}}{(2n+1)} f'_{2n}(\bar{y}),$$

где  $a_{2n}$  — известные коэффициенты разложения  $\Phi'(\bar{x}/\bar{y}_\infty)/\Phi'_m$  в ряд;  $f_{2n}(\bar{y})$  — функции  $\bar{y}$ , подлежащие определению.

Уравнения Навье — Стокса в форме уравнения переноса вихря дают следующее уравнение для  $f_{2n}(\bar{y})$ :

$$(5.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n} \bar{x}^{2n-3} \left[ \frac{\bar{x}^4}{2n+1} f_{2n}^{IV} + 4n \bar{x}^2 f'_{2n} + 4n(2n-1) \times \right. \\ \left. \times (n-1) f_{2n} \right] + \sum_{n,k=0}^{\infty} (-1)^{n+k} a_{2n} a_{2k} \bar{x}^{2(n+k)-1} \left\{ \bar{x}^2 \left[ \frac{f_{2n} f'_{2k}}{2k+1} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{f'_{2n} f_{2k}}{(2n+1)k} \right] + 2k \left( f_{2n} f'_{2k} - \frac{2k}{2n+1} f'_{2n} f_{2k} \right) \right\} = 0.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\bar{x}$ , получим для определения функций  $f_0, f_2, f_4, \dots$  систему обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Граничные условия для функций  $f_{2n}$  получаются из условий  $\bar{y}=0$  и  $\bar{y} \rightarrow \infty$ :

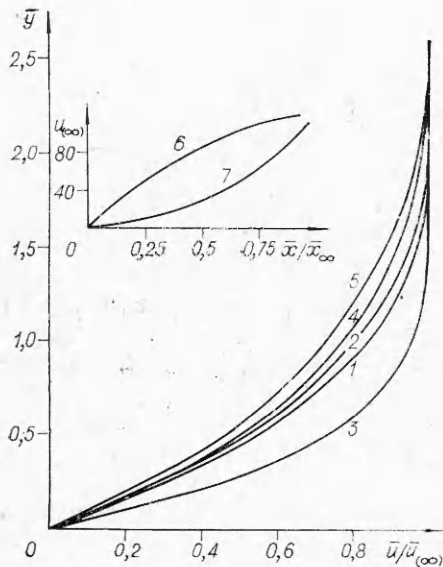
$$(5.2) \quad \bar{y} = 0, f_{2n} = f'_{2n} = 0; \quad \bar{y} \rightarrow \infty, f'_{2n} = 1, f_{2n} = 0.$$

Система уравнений (5.1) при граничных условиях (5.2) решалась численно путем последовательных приближений методом Рунге — Кутты на БЭСМ-4 с точностью  $10^{-5}$ . Так как в каждое из  $n$  уравнений входят неизвестные  $n$  функций и их производные, в первом приближении полагаем все функции и их производные, кроме  $f_0$ , равными нулю. Таким образом, для  $n=0$  получаем уравнение Хименца, решение которого известно [1].\* При решении второго уравнения ( $n=1$ ) используем результаты расчета функции  $f_0$  и ее производных на каждом шаге интегрирования, полагая все  $f_{2n}$  ( $n=2, 3, \dots$ ) и их производные равными нулю. Задание  $f_0, f'_0, f''_0$  и т. д. в виде ступенчатых функций на каждом шаге интегрирования не приводит к существенным погрешностям и не влияет на процесс сходимости к условиям при  $\bar{y} \rightarrow \infty$ , что было проверено путем изменения шага интегрирования. Оптимальный шаг  $\Delta \bar{y} = 0,05$  был выбран из условия  $|f_{2n}(\infty, \Delta \bar{y}) - f_{2n}(\infty, 2\Delta \bar{y})| < 10^{-5}$ . Решение всех последующих уравнений при  $n=2, 3, \dots$  проводится аналогично. Используя результаты первого приближения, приступаем к следующему приближению, пользуясь вышеприведенной схемой. Количество приближений определяется из условия  $|f_{2n}(\infty, t+1) - f_{2n}(\infty, t)| < 10^{-4}$ , где  $t, t+1$  — номера приближений. Поиск дополнительных граничных условий, необходимых для начала счета, произво-

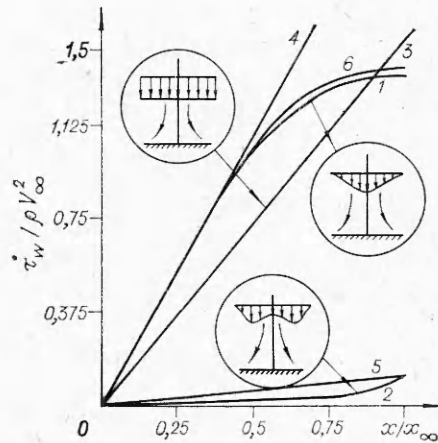
\* При  $a_0 \neq 1$  делается поправка на величину  $\beta$ :  $\beta(a_0 \neq 1) = V_\infty F'(0) a_0 / y_\infty$ .

дился, как и в случае решения идеальной задачи, методом Ньютона так, чтобы  $F_1 [f'_{2n}(\infty)] = |f'_{2n}(\infty) - 1| < \varepsilon$ ;  $F_2 [f'_{2n}(\infty)] = |f'_{2n}(\infty)| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon = 10^{-4}$  — допустимая погрешность выполнения граничных условий.

В качестве исходных данных для расчета были приняты:  $V_\infty = 8$  м/с;  $x_\infty = y_\infty = 0,05$  м;  $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с. Практическая сходимость рядов в (5.1), как показали дальнейшие расчеты, достаточно высока, поэтому при приближенном решении задачи о вязком течении в окрестности точки торможения ограничимся конечным числом членов ( $n, k \leq 4$ ) указанных рядов. На фиг. 3 построены профили  $\bar{u}$  — составляющей скорости в пограничном слое преграды для  $A = 5,0$  при  $\bar{x}/\bar{x}_\infty = 0,125$  (кривая 1);  $A = 5,0$  при  $\bar{x}/\bar{x}_\infty = 0,75$  (кривая 2),  $A = -14$  при  $\bar{x}/\bar{x}_\infty = 0,75$  (кривая 3). Здесь же приведены результаты, соответствующие решению Хименца [1] для течения в окрестности точки торможения плоской пластины при натекании



Фиг. 3



Фиг. 4

на нее внешнего равномерного потока (кривая 4). Кривая 4 соответствует также решению Хименца для цилиндра радиуса  $R = 2y_\infty / F'(0)$ ,  $F'(0) = 2$  и  $R = 2y_\infty / (F'(0)a_0)$ ,  $F'(0) = 0,35$ ,  $a_0 = 0,218$  при  $\bar{x}/\bar{x}_\infty = 0,125$ . Кривая 5 соответствует решению Хименца для цилиндра радиуса  $R = 2y_\infty / F'(0)$ ,  $F'(0) = 2$  при  $\bar{x}/\bar{x}_\infty = 0,75$ . Различие в профилях скорости для рассмотренных типов течения вблизи точки торможения преграды и цилиндра для равномерного внешнего потока является следствием различного характера распределения скорости вдоль преграды во внешнем потоке (кривые 6, 7 для коэффициента формы профиля скорости внешнего потока  $A = 5,0$  и  $-14,0$  соответственно). Вблизи точки торможения ( $\bar{x}/\bar{x}_\infty = 0,125$ ) профили скорости в обоих рассмотренных случаях практически совпадают с профилем Хименца (участок движения внешнего потока с постоянным ускорением). С удалением от точки торможения происходит увеличение градиента скорости  $\bar{u}$  в направлении нормали к преграде для внешнего потока с периферийным максимумом скорости  $A < 0$  (участок ускорен-



ного движения внешнего потока вдоль преграды) и уменьшение градиента скорости  $\bar{u}$  в направлении нормали к стенке для потока с центральным максимумом скорости  $A \geq 0$  (участок замедленного движения внешнего потока вдоль преграды). На фиг. 4 изображено распределение трения на стенке преграды при натекании на нее потока с центральным максимумом скорости (кривая 1) и периферийным максимумом скорости (кривая 2):

$$\frac{\tau_w}{\rho V_\infty^2} = a_0 F'(0) \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \Big|_{y=0}; \quad \text{Re} = \frac{V_\infty y_{c0}}{\nu}.$$

Кривые 3—5 соответствуют решению Хименца для внешнего равномерного потока, натекающего на плоскую преграду:

$$\frac{\tau_w}{\rho V_\infty^2} = 1,23259 \frac{1}{\text{Re}} y_\infty^2 \frac{\beta}{V_\infty} \left(\frac{\beta}{\nu}\right)^{1/2} \frac{x}{x_{c0}}.$$

Значение  $\beta = \frac{\pi}{2} V_\infty / y_\infty$  (кривая 3) соответствует равномерному потоку, расположенному над преградой на заданном расстоянии  $y_\infty$ . Значение  $\beta = V_\infty F'(0) / y_\infty = \beta_1$  (кривая 4) соответствует натеканию на преграду равномерного потока с градиентом скорости в точке торможения, равным градиенту скорости в точке торможения при натекании на плоскую преграду внешнего потока с центральным максимумом. Значение  $\beta = V_\infty a_0 F'(0) / y_\infty = \beta_{2*}$  (кривая 5) соответствует натеканию на преграду равномерного потока с градиентом скорости в точке торможения, равным градиенту скорости в точке торможения при натекании на преграду внешнего потока с периферийным максимумом скорости. В последних двух случаях, как следует из приведенных выражений для  $\beta$ , преграда должна быть приближена к потоку до расстояния  $0,785 y_\infty$  (при условии, что поток на этом расстоянии останется невозмущенным) и, наоборот, отведена от потока до расстояния  $20,6 y_\infty$ , где  $y_\infty$  соответствует расстоянию от преграды, на котором выдерживается заданная неравномерность внешнего потока. Наконец, кривая 6 соответствует решению Хименца для цилиндра радиуса  $R = 2y_\infty F'(0)$  ( $A = 5,0$ ). В случае  $A = -14,0$  решение Хименца для цилиндра радиуса  $R = 2y_\infty / (F'(0)a_0)$  практически совпадает с решением Хименца для плоской преграды (кривая 5).

Приведенные на фиг. 4 результаты позволяют установить некоторые особенности в характере распределения трения в окрестности точки торможения плоской преграды, расположенной по нормали к внешнему неравномерному потоку:

1. Существует сильная зависимость трения от градиента скорости в точке торможения для всех рассмотренных типов внешнего потока. Градиент скорости в точке торможения определяется условиями торможения потока вблизи преграды и, как следует из настоящего анализа, условиями формирования потока на заданном расстоянии от преграды.

2. Для потока с центральным максимумом скорости ( $A \geq 0$ ) величина градиента скорости в точке торможения  $\beta = V_\infty F'(0) / y_\infty$  дает трение на стенке в окрестности точки торможения, совпадающее с трением, подсчитанным для равномерного потока, натекающего на плоскую преграду и круговой цилиндр радиуса  $R = 2y_\infty / F'(0)$ . В последнем случае величины трения на плоской преграде, обтекаемой неравномерным потоком, и на поверхности цилиндра, обтекаемого равномерным потоком, практически совпадают для всего рассмотренного диапазона изменения  $x$ . Этот



факт является следствием подобия в законе распределения скорости внешнего потока вдоль поверхности обтекаемых тел. Аналогия между обтеканием цилиндра и нормальной к потоку преграды, основанная на подобии профилей скорости внешнего потока вдоль поверхности обтекаемых тел и на равенстве соответствующих градиентов скорости в точке торможения, предполагает, как уже указывалось, необходимость уменьшения (для  $A=5,0$ ) исходного расстояния  $y_\infty$  между преградой и невозмущенным внешним потоком до величины  $(\pi/4)y_\infty$ . Если потребовать неизменность величины  $y_\infty$ , тогда, как следует из сравнения выражений для градиента скорости в точке торможения преграды от равномерного и неравномерного внешних потоков, получим, что данное условие удовлетворяется лишь при одном значении  $F'(0)=\pi/2$ , т. е. в случае синусоидального характера изменения скорости внешнего потока вдоль преграды, когда коэффициент формы профиля скорости внешнего потока  $A=0$ . Для значений  $A$ , отличных от нуля, при условии постоянства заданного расстояния  $y_\infty$  можно использовать аналогию между обтеканием неравномерным потоком плоской преграды и тела, форма которого отличается от кругового цилиндра. Действительно, как следует из фиг. 1, увеличение коэффициента  $A$  приводит к возрастанию градиента скорости в точке торможения и более быстрому «наполнению» профиля скорости внешнего потока вдоль преграды. Этот же эффект наблюдается в случае обтекания равномерным потоком эллиптического цилиндра в продольном (параллельно большой оси) направлении.

Для потока с периферийным максимумом скорости ( $A < 0$ ) наблюдается резкое снижение величины трения на стенке (на порядок) по сравнению с потоком с центральным максимумом скорости. Распределение трения в данном случае, впрочем, как и для внешнего потока с центральным максимумом скорости, следует закону распределения скорости внешнего потока вдоль преграды, поэтому естественно наличие большого расхождения между полученными результатами и данными Хименца для равномерного потока, обтекающего круговой цилиндр или преграду, расположенную по нормали к потоку.

Поступила 31 VII 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
2. Госмен А. Д., Пан В. М., Ранчел А. К., Сполдинг Д. Б., Вольфштейн М. Численные методы исследования течений вязкой жидкости. М., «Мир», 1972.
3. Арбекова В. М., Войтович Л. Н., Гиневский А. С., Колесников А. В., Подольный И. Н. Расчет турбулентных спутных струй с учетом начальной неравномерности профиля скорости.— В кн.: Аэродинамика каналов и струйных течений. Вып. 30. М., «Машиностроение», 1973.
4. Cartwright W. G., Russel P. T. Characteristics of a turbulent slot jet impinging on a plate surface.— Thermodynamics and Fluid Mechanics Convention. Inst. of Mechan Engrs Proc. London, 1967—1968, vol. 182, pt. 34.
5. Strand T. Inviscid-incompressible-flow theory of static two-dimensional solid jets in proximity to the ground.— «J. Aerospace Sci.», 1962, N 2, p. 170.