

## ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В СРЕДЕ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ТРЕЩИН

*С. К. Канаун*

(Новосибирск)

Решение задачи об электростатическом поле и поле постоянного электрического тока в среде, содержащей большое число случайно расположенных трещин, является теоретической основой важных методов неразрушающего контроля поврежденности материалов (металлов, горных пород) [1, 2].

В данной работе предлагается подход, позволяющий находить многоточечные моменты статистического решения этой задачи. Для случая постоянного электрического тока рассмотрен способ построения средних (математических ожиданий) и корреляционных функций полей векторов тока и напряженности электрического поля в среде с трещинами.

В последние годы появился целый ряд работ, посвященных описанию эффективных тепловых, электрических и магнитных свойств неоднородных материалов (см., например, [3]). Задача построения эффективных параметров неоднородной среды сводится к вычислению среднего значения случайного поля решения. Для некоторых стохастических структур эта задача допускает достаточно хорошие приближенные или даже точные решения (точное суммирование рядов теории возмущений). Однако при вычислении дисперсии решения, при построении корреляционных функций, через которые выражается, например, средняя плотность энергии поля, обозримые результаты удается получить лишь для случая слабой неоднородности, ограничиваясь первыми членами ряда теории возмущений [4].

В специфическом случае среды, содержащей поля изолированных неоднородностей, рядом авторов использовался известный в теории многих частиц метод эффективного (самосогласованного) поля.

Заметим, что идея самосогласования для описания эффективных свойств неоднородной среды может быть использована в различных формах. В работах [5, 6] самосогласованные решения задачи электропроводности строились из предположения, что каждая типичная неоднородность, например зерно поликристалла, ведет себя как изолированная в однородной среде, свойства которой совпадают с эффективными свойствами всей среды, а поле, в котором находилась такая неоднородность, принималось равным внешнему полю. Такую модификацию метода иногда называют методом эффективной среды [7].

В данной работе при построении самосогласованного решения для среды, содержащей плоские, эллиптические в плане трещины, предполагается, что каждая трещина ведет себя как изолированная в основной среде с известными свойствами, а наличие окружающих трещин учитывается эффективным полем, в котором она находится. В отличие от обычных формулировок метода, когда эффективное поле выбирается одинаковым для всех частиц [8], здесь предполагается, что это поле является случайным, изменяющимся от трещины к трещине. Для построения уравнений, которым удовлетворяют статистические моменты эффективного поля, используется процедура типа «сглаживания» [9], когда цепочка уравнений, связывающих все многоточечные моменты решения, размыкается путем замены среднего от произведения случайных функций произведением их средних.

Метод практически без изменения может быть использован для исследования электрического поля и решения аналогичных задач теории упругости для среды с большим числом трещин [10].

1. Рассмотрим проводящее тело, в котором содержится множество произвольно расположенных трещин. Под трещиной будем понимать бесконечно тонкий разрез по куску гладкой ориентированной поверхности с нормалью  $\mathbf{n}$ . Граничное условие на поверхности трещины есть обращение в нуль нормальной компоненты вектора электрического тока. Пусть размеры трещин и расстояния между ними значительно меньше, чем размеры тела и характерный масштаб изменения внешнего поля (поля в отсутствие трещин). Тогда, пренебрегая краевыми эффектами, можно

сразу рассматривать бесконечную среду с трещинами в постоянном внешнем поле. В дальнейшем для определенности будем считать, что фиксируется внешнее поле вектора тока  $\mathbf{j}_0$ .

Решение данной задачи удобно искать в виде потенциала двойного слоя, сосредоточенного на поверхностях трещин  $\Omega_i$ :

$$(1.1) \quad \varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0 + \sum_i \int \Phi(\mathbf{R}, \mathbf{n}_i) b_i(\mathbf{r}') \delta[\Omega_i] d\mathbf{r}',$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки среды;  $\mathbf{R} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ ;  $\mathbf{n}' = \mathbf{n}(\mathbf{r}')$ ;  $\delta[\Omega_i]$  — дельта-функция, сосредоточенная на поверхности  $\Omega_i$  [11];  $\varphi_0$  — потенциал внешнего поля;  $\Phi(\mathbf{R}, \mathbf{n})$  — ядро потенциала двойного слоя, являющееся решением уравнения

$$(1.2) \quad \operatorname{div} [\mu \nabla \Phi] = \mathbf{n} \mu \nabla \delta(\mathbf{R}),$$

где  $\mu$  — тензор электропроводности;  $\nabla$  — операция градиента;  $\delta(\mathbf{R})$  — дельта-функция Дирака; стоящие рядом тензорные величины сворачиваются по одному индексу.

Если плотности потенциалов  $b_i(\mathbf{r})$  в (1.1) известны, напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  и вектор тока  $\mathbf{j}$  в среде представляются в форме

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_0 + \sum_i \int \nabla \Phi(\mathbf{R}, \mathbf{n}_i) b_i(\mathbf{r}') \delta[\Omega_i] d\mathbf{r}', \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= \mathbf{j}_0 + \sum_i \int \mathbf{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}_i) b_i(\mathbf{r}') \delta[\Omega_i] d\mathbf{r}', \end{aligned}$$

где  $\mathbf{E}_0 = -\nabla \varphi_0$ ; ядро  $\mathbf{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n})$  имеет вид

$$(1.4) \quad \mathbf{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}) = \mu [\nabla \Phi - \mathbf{n} \delta(\mathbf{R})].$$

Как известно, потенциал двойного слоя (1.1) терпит разрывы при переходе через поверхности  $\Omega_i$ . Поэтому градиент поля  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$  содержит дельта-функции, сосредоточенные на этих поверхностях. Однако физическое поле вектора тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  должно быть ограничено всюду, за исключением, может быть, краев трещин. Входящая в правую часть соотношения (1.4) дельта-функция Дирака позволяет компенсировать указанные сингулярности на поверхностях трещин. При этом векторное поле  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  в смысле обобщенных функций удовлетворяет уравнению  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$  всюду в среде, как и должно быть, в силу отсутствия источников.

Уравнения для функции  $b_i(\mathbf{r})$  следуют из граничных условий на поверхности трещин

$$\mathbf{n}_i(\mathbf{r}) \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = 0 \text{ при } \mathbf{r} \in \Omega_i \ (i = 1, 2, \dots).$$

Интегральные операторы в правых частях соотношений (1.3) принадлежат к классу псевдодифференциальных операторов [12], символы которых (преобразование Фурье ядер  $\nabla \Phi$  и  $\mathbf{I}$  по переменной  $\mathbf{R}$ ) являются однородными функциями нулевой степени однородности

$$\nabla \tilde{\Phi}(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{n})/k^2, \quad \tilde{\mathbf{I}}(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = \mu [\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{n})/k^2 - \mathbf{n}].$$

Известно [12], что такие операторы на финитных функциях  $f(\mathbf{r})$  допускают представления

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \int \nabla \Phi(\mathbf{R}, \mathbf{n}) f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' &= \int \nabla \Phi(\mathbf{R}, \mathbf{n}) f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + A f(\mathbf{r}), \\ \int \mathbf{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}) f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' &= \int \mathbf{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}) f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + B f(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Здесь вектор  $\mathbf{n}$  фиксирован; интегралы справа понимаются в смысле главного значения по Коши; постоянные  $A$  и  $B$  имеют вид

$$A = \frac{1}{4\pi} \int_{(\Gamma_1)} \nabla \tilde{\Phi}(\mathbf{k}, \mathbf{n}) d\Gamma = \frac{1}{2} \mathbf{n}, \quad B = \frac{1}{4\pi} \int_{(\Gamma_1)} \tilde{\mathbf{I}}(\mathbf{k}, \mathbf{n}) d\Gamma = \frac{2}{3} \mu \mathbf{n},$$

где  $\Gamma_1$  — поверхность единичной сферы в  $\mathbf{k}$ -пространстве преобразований Фурье.

В дальнейшем возникнет необходимость определить действие операторов с ядрами  $\nabla \Phi$  и  $\mathbf{I}$  на константах. Для этой цели рассмотрим сначала конечную область  $V$ , а граничные условия выберем так, что внутри  $V$  вектор тока  $\mathbf{j}$  постоянный и равен  $\mathbf{j}_0$ . Не меняя нормальной компоненты вектора тока на границе, внесем внутрь  $V$  некоторое число трещин. Аналогично (1.3) поле вектора тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  в теле можно представить в виде потенциалов, плотность которых сосредоточена на поверхностях трещин  $\Omega_i$ .

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_0 + \sum_i \mathbf{I}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{n}_i) b_i(\mathbf{r}') \delta[\Omega_i] dr',$$

где ядро  $\mathbf{I}$  имеет вид (1.4), причем  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{n}')$  в данном случае удовлетворяет уравнению (1.2) и граничному условию  $\mathbf{m} \mu \nabla \Phi = 0$  ( $\mathbf{m}$  — нормаль к границе тела).

В силу закона сохранения среднее интегральное значение тока в области  $V$  остается равным  $\mathbf{j}_0$ . Поэтому

$$(1.6) \quad \left\langle \sum_i \int \mathbf{I}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{n}_i) b_i(\mathbf{r}') \delta[\Omega_i] dr' \right\rangle = 0.$$

Здесь угловые скобки означают осреднение по объему  $V$ . Увеличим размеры области  $V$  до бесконечности, и пусть поле трещин при этом становится реализацией некоторого однородного в пространстве случайного поля трещин одинаковой ориентации. При таком предельном переходе ядро  $\mathbf{I}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{n}')$  стремится к ядру  $\mathbf{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}')$  для бесконечной среды, а среднее интегральное для эргодического поля трещин можно заменять средним по ансамблю реализаций. Тогда соотношение (1.6) принимает вид

$$\int \mathbf{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}) \left\langle \sum_i b_i(\mathbf{r}') \delta[\Omega_i] \right\rangle dr' = 0.$$

Поскольку для однородного поля трещин среднее под знаком интеграла равно константе, справедливо равенство

$$(1.7) \quad \int \mathbf{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}) dr' = 0.$$

При этом из (1.6), (1.3) следует

$$(1.8) \quad \int \nabla \Phi(\mathbf{R}, \mathbf{n}) dr' = \mathbf{n}.$$

Существенно, что интегралы, фигурирующие в этих соотношениях, формально расходятся в нуле и на бесконечности. Поэтому формулы (1.7), (1.8) определяют некую регуляризацию расходящихся интегралов слева, вообще говоря, не единственную. Действительно, если зафиксировать не внешнее поле тока  $\mathbf{j}_0$ , а напряженность электрического поля  $\mathbf{E}_0$ , то придем к регуляризациям вида

$$\int \mathbf{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}) dr' = -\mu \mathbf{n}, \quad \int \nabla \Phi(\mathbf{R}, \mathbf{n}) dr' = 0.$$

Заметим, что однозначного определения действия операторов с ядрами  $\nabla\Phi$  и  $\mathbf{I}$  на константах не существует и значения соответствующих интегралов определяются тем смыслом, который они имеют в конкретной задаче.

2. Пусть теперь множество плоских, эллиптических в плане разрезов является реализацией некоторого однородного в пространстве случайного поля трещин. Выделим из этого множества произвольную трещину с поверхностью  $\Omega_i$ . Если плотности потенциалов  $b_k(\mathbf{r})$ , сосредоточенные на поверхностях всех трещин, известны, то поле вектора тока  $\bar{\mathbf{j}}_i(\mathbf{r})$ , в котором находится выделенная трещина, имеет вид

$$(2.1) \quad \bar{\mathbf{j}}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_0 + \sum_{k \neq i} \int \mathbf{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}'_k) b_k(\mathbf{r}') \delta[\Omega_k] d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \in \Omega_i.$$

Поле  $\bar{\mathbf{j}}_i(\mathbf{r})$  по смыслу является внешним полем для трещины  $\Omega_i$ , в котором она ведет себя как изолированная. В дальнейшем  $\bar{\mathbf{j}}_i(\mathbf{r})$  будем называть эффективным внешним полем трещины  $\Omega_i$ .

Если решение задачи для изолированной трещины в произвольном внешнем поле известно, т. е. известен явный вид функции  $b_k(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{j}}_k)$ , то из (2.1) следует система уравнений, которым удовлетворяют эффективные поля  $\bar{\mathbf{j}}_i(\mathbf{r})$  для каждой из взаимодействующих трещин

$$(2.2) \quad \bar{\mathbf{j}}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_0 + \sum_{k \neq i} \int \mathbf{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}'_k) b_k(\mathbf{r}', \bar{\mathbf{j}}_k) \delta[\Omega_k] d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \in \Omega_i \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Для построения статистических характеристик эффективного поля введем следующие упрощающие предположения о его структуре: а) поля  $\bar{\mathbf{j}}_k(\mathbf{r})$  практически постоянны для каждой из трещин  $\Omega_k$ , но, вообще говоря, меняются от трещины к трещине; б) случайное поле  $\bar{\mathbf{j}}_k$  статистически не зависит от размеров и ориентации трещины  $\Omega_k$ , к которой оно относится.

Картину взаимодействия между трещинами, при которой реализуются данные гипотезы, качественно можно охарактеризовать следующим образом. Для типичной трещины эффективное поле (сумма внешнего поля и поля от всех окружающих трещин) примерно постоянно, причем вклад в него от каждой отдельной трещины является незначительным.

Не останавливаясь пока на обсуждении области применимости данных гипотез, перейдем к анализу формальных следствий. Из решения задачи для изолированной эллиптической трещины в однородном внешнем поле  $\bar{\mathbf{j}}_k$  получим, что функция  $b_k(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{j}}_k)$  имеет вид

$$(2.3) \quad b_k = h_k(\mathbf{r})(\mathbf{n}\bar{\mathbf{j}}_k),$$

где  $h_k(\mathbf{r})$  в декартовой системе координат, связанной с главными осями трещины, представляется в форме

$$(2.4) \quad h_k(x, y) = \frac{2c}{\mu E(\omega)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2}}.$$

Здесь  $a, c$  — полуоси эллипса;  $E(\omega)$  — полный эллиптический интеграл второго рода;  $\omega = 1 - a^2/c^2$  ( $c \geq a$ ); среда изотропная.

Введем обобщенную функцию  $\delta[p(\mathbf{r})]$ , сосредоточенную на всех поверхностях  $\Omega_i$ :

$$\delta[p(\mathbf{r})] = \sum_i \delta[\Omega_i],$$

и функцию  $\delta_r[p(\mathbf{r}')]$ , сосредоточенную на поверхностях всех трещин, за исключением той, которая проходит через точку  $\mathbf{r}$ ,

$$\delta_r[p(\mathbf{r}')] = \sum_{k \neq i} \delta[\Omega_k] \text{ при } \mathbf{r} \in \Omega_i.$$

(Уравнением  $p(\mathbf{r}) = 0$  задается все множество поверхностей  $\Omega_i$ .) Пусть  $H(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  — произвольные непрерывные скалярное и векторное поля, совпадающие соответственно с  $h_k(\mathbf{r})$  (2.4) и  $\mathbf{n}_k$  на поверхностях  $\Omega_k$ . Рассмотрим поле  $\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r})$ , определенное в точках  $\mathbf{r} \in \{p(\mathbf{r}) = 0\}$  (далее будем писать  $\mathbf{r} \in p$ ) уравнением

$$(2.5) \quad \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_0 + \int \mathbf{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}') H(\mathbf{r}') [\mathbf{n}' \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}')] \delta_r[p(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}' \quad (\mathbf{r} \in p).$$

При справедливости гипотезы «а» из (2.2), (2.3) следует, что поле  $\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r})$  совпадает с полями  $\bar{\mathbf{j}}_k$  на поверхностях трещин  $\Omega_k$ . Произвольным способом это поле можно продолжить на все пространство.

Исходя из уравнения (2.5), можно построить основные статистические характеристики эффективного поля. Обозначим через  $\bar{\mathbf{j}}^n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$   $n$ -точечный момент эффективного поля: среднее от тензорного произведения поля  $\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r})$  в точках  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$  при условии, что эти точки принадлежат поверхностям трещин. В частности, математическое ожидание и двухточечный момент эффективного поля имеют вид

$$\bar{\mathbf{j}}^1 = \langle \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) | \mathbf{r} \in p \rangle, \quad \bar{\mathbf{j}}^2 = \langle \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}_1) \otimes \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}_2) | \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in p \rangle.$$

Осредняя обе части уравнения (2.5) при условии  $\mathbf{r} \in p$  и используя гипотезу «б» о статистической независимости поля  $\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r})$  в точке  $\mathbf{r}$  от размеров и ориентации трещины в этой точке, для  $\bar{\mathbf{j}}^1$  получим выражение

$$(2.6) \quad \bar{\mathbf{j}}^1 = \mathbf{j}_0 + \int \langle \mathbf{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}') \otimes \mathbf{n}' H(\mathbf{r}') \delta_r[p(\mathbf{r}')] | \mathbf{r} \in p \rangle \times \\ \times \langle \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}') | \mathbf{r}', \mathbf{r} \in p \rangle d\mathbf{r}',$$

где среднее  $\langle \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}') | \mathbf{r}', \mathbf{r} \in p \rangle$  вычисляется при условии, что точки  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}$  одновременно расположены на трещинах. При определении среднего  $\langle \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}') | \mathbf{r}', \mathbf{r} \in p \rangle$  можно опять исходить из уравнения (2.5). Выполнив соответствующее осреднение и вновь используя гипотезу «б», будем иметь

$$(2.7) \quad \langle \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) | \mathbf{r}, \mathbf{r}_1 \in p \rangle = \mathbf{j}_0 + \int \langle \mathbf{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}') \otimes \mathbf{n}' H(\mathbf{r}') \times \\ \times \delta_r[p(\mathbf{r}')] | \mathbf{r}, \mathbf{r}_1 \in p \rangle \langle \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}') | \mathbf{r}', \mathbf{r}, \mathbf{r}_1 \in p \rangle d\mathbf{r}'.$$

Уравнения (2.6), (2.7) являются незамкнутыми, поскольку в их правые части входят средние значения эффективного поля, вычисленные при иных условиях, чем средние в правых частях.

Возникающую таким образом цепочку уравнений можно оборвать, вводя дополнительные предположения о структуре условных средних. Простейший способ получить уравнение для  $\bar{\mathbf{j}}^1$  состоит в том, чтобы принять

$$(2.8) \quad \langle \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}') | \mathbf{r}', \mathbf{r} \in p \rangle = \langle \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}') | \mathbf{r}' \in p \rangle = \bar{\mathbf{j}}^1.$$

Это эквивалентно обычному предположению метода самосогласованного поля, что все частицы (трещины) находятся в одинаковом постоянном эффективном поле [8].

Из (2.6), (2.8) будем иметь

$$(2.9) \quad \bar{\mathbf{j}}^1 = \mathbf{j}_0 + \int \langle \mathbf{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}') \otimes \mathbf{n}' H(\mathbf{r}') \delta_r [p(\mathbf{r}')] | \mathbf{r} \in p \rangle dr' \bar{\mathbf{j}}^1.$$

Задача, таким образом, свелась к вычислению интеграла в правой части этого уравнения.

Следующее приближение для  $\bar{\mathbf{j}}^1$  можно получить, если в уравнение (2.7) положим

$$\langle \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}') | \mathbf{r}', \mathbf{r}, \mathbf{r}_1 \in p \rangle = \langle \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}') | \mathbf{r}', \mathbf{r} \in p \rangle.$$

В случае однородного поля трещин среднее справа зависит только от разности  $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ :

$$\langle \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}') | \mathbf{r}', \mathbf{r} \in p \rangle = \theta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}).$$

Функция  $\theta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$  (среднее значение эффективного поля в точке  $\mathbf{r}'$  при условии, что в точке  $\mathbf{r}$  имеется трещина) характеризует парное взаимодействие в системе взаимодействующих трещин. Очевидно, что при  $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \rightarrow \infty$  эта функция стремится к среднему значению эффективного поля  $\bar{\mathbf{j}}^1$ . Уравнение для  $\theta(\mathbf{r})$  следует из (2.7) и имеет вид

$$(2.10) \quad \theta(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_0 + \int \langle \mathbf{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}') \otimes \mathbf{n}' H(\mathbf{r}') \delta_r [p(\mathbf{r}')] | \mathbf{r}, \mathbf{r}_1 \in p \rangle \theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dr'.$$

Заметим, что в рамках данной схемы следующие приближения не дадут новых уточнений для  $\bar{\mathbf{j}}^1$ . Можно показать, что уравнение для  $\langle \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) | \mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in p \rangle$  при  $|\mathbf{r}_2| \rightarrow \infty$  переходит в (2.10). Аналогично все уравнения для более сложных условных средних, полученные с помощью предположений типа (2.8), сведутся к (2.10) при соответствующем предельном переходе. Для построения второго момента эффективного поля  $\bar{\mathbf{j}}^2$  перемножим значения поля  $\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r})$  (соотношение (2.5)) в различных точках  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  и осредним результат при условии  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in p$

$$(2.11) \quad \bar{\mathbf{j}}^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \mathbf{j}_0 \otimes \langle \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}_2) | \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in p \rangle + \int \langle \mathbf{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}') [\mathbf{n}' \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}')] \times \\ \times H(\mathbf{r}') \delta_r [p(\mathbf{r}')] \otimes \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}_2) | \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in p \rangle dr'.$$

Уравнение для функции  $\bar{\mathbf{j}}^2(\mathbf{R})$  можно получить, «расцепляя» средние (2.11) с помощью гипотезы «б» и предположений типа (2.8):

$$\langle \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}_2) | \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in p \rangle = \bar{\mathbf{j}}^1; \langle \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}') \otimes \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}_2) | \mathbf{r}', \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in p \rangle = \langle \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}') \otimes \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}_2) | \mathbf{r}', \mathbf{r}_2 \in p \rangle = \\ = \bar{\mathbf{j}}^2(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_2).$$

Отсюда и из (2.11) получим

$$(2.12) \quad \bar{\mathbf{j}}^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \mathbf{j}_0 \otimes \bar{\mathbf{j}}^1 + \int \langle \mathbf{I}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') \otimes \mathbf{n}' H(\mathbf{r}') \times \\ \times \delta_r [p(\mathbf{r}')] | \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in p \rangle \bar{\mathbf{j}}^2(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_2) dr'.$$

3. Перейдем теперь к анализу конкретной стохастической модели поля трещин в пространстве — модели Пуассона.

Пусть в ограниченном объеме  $V$  имеется  $N$  точек, положение каждой из которых равномерно распределено в  $V$  и не зависит от положения остальных. Точки являются центрами эллиптических трещин случайных размеров и ориентации, причем соответствующие совместные функции распределения считаются заданными. К пуассоновскому полю трещин придем, устремив  $V$  и  $N$  к бесконечности, так что  $\lim (V/N) = V_0 < \infty$ . Очевидно, что при этом какая-либо корреляция в положениях трещин отсутствует.

Для определения среднего значения эффективного поля  $\bar{j}^1$  обратимся к уравнению (2.9). При вычислении среднего под знаком интеграла в (2.9) сперва выполним осреднение по всем трещинам, имеющим фиксированную ориентацию  $n'$  в точке  $r'$ , а затем по всем возможным ориентациям

$$(3.1) \quad \langle \mathbf{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}') \otimes \mathbf{n}' H(r') \delta_r [p(r')] | \mathbf{r} \in p \rangle = \langle \mathbf{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}') \otimes \mathbf{n}' \times \\ \times \langle H(r') \delta_r [p(r')] | \mathbf{r} \in p \rangle \rangle_{n'}.$$

Условное среднее справа представляется в виде

$$(3.2) \quad \langle H(r') \delta_r [p(r')] | \mathbf{r} \in p \rangle = \frac{\langle \delta [p(r)] \delta_r [p(r')] H(r') \rangle}{\langle \delta [p(r)] \rangle},$$

где среднее вычисляется по всем трещинам, имеющим ориентацию  $n'$  в точке  $r'$ . Для однородных полей трещин среднее (3.2) есть функция разности  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Если точки  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  не лежат в одной плоскости, нормаль к которой есть  $n'$ , то в силу некоррелированности положений трещин

$$\langle \delta [p(r)] \delta_r [p(r')] H(r') \rangle = \langle \delta [p(r)] \rangle \langle \delta_r [p(r')] H(r') \rangle.$$

Заменяя среднее по ансамблю средним по объему для типичной реализации, получим

$$\langle \delta_r [p(r')] H(r') \rangle = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_{(V)} \delta_r [p(r')] H(r') dr' = \\ = \lim_{V, N \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \int h_i(r') \delta [\Omega_i] dr'.$$

Учитывая выражение для функции  $h_i(\mathbf{r})$  (2.4), будем иметь

$$(3.3) \quad \langle \delta_r [p(r')] H(r') \rangle = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \lambda = \frac{4}{3} \frac{\pi}{V_0} \left\langle \frac{a^2 c}{E(\omega)} \right\rangle,$$

где среднее в правой части выражения для  $\lambda$  вычисляется по всем трещинам с фиксированной нормалью  $n'$ .

Если точки  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  лежат в одной плоскости, нормаль к которой есть  $n'$ , то результат осреднения будет иным, так как  $\delta_r [p(r')] = 0$ , когда  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  оказываются на одной трещине.

Поэтому среднее (3.2) отличается от константы лишь в точках плоскости  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')n' = 0$ . Можно показать, что значение интеграла в (2.9) не изменится, если среднее (3.2) считать константой всюду.

Меняя порядок осреднения по ориентациям и интегрирования в (2.9), придем к равенству

$$\bar{j}^1 = j_0 + \left\langle \int \mathbf{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}') \otimes \mathbf{n}' \frac{\lambda}{\mu} dr' \right\rangle \bar{j}^1.$$

В силу регуляризации (1.7) интеграл справа обращается в нуль, и, следовательно, в данном случае

$$(3.4) \quad \bar{j}^1 = j_0.$$

Рассмотрим теперь уравнение (2.10). Как и в (3.1), осредним подынтегральное выражение вначале по всем реализациям с фиксированной ориентацией трещин в точке  $\mathbf{r}'$ , а затем по всем ориентациям

$$\langle \mathbf{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}') \otimes \mathbf{n}' \langle H(\mathbf{r}') \delta_r [p(\mathbf{r}')] | \mathbf{r}, \mathbf{r}_1 \in p \rangle \rangle_{\mathbf{n}'}$$

Условное среднее в этом выражении представляется в виде

$$\langle H(\mathbf{r}') \delta_r [p(\mathbf{r}')] | \mathbf{r}, \mathbf{r}_1 \in p \rangle = \frac{\langle H(\mathbf{r}') \delta_r [p(\mathbf{r}')] \delta_r [p(\mathbf{r}_1)] \delta [p(\mathbf{r})] \rangle}{\langle \delta [p(\mathbf{r})] \delta_r [p(\mathbf{r}_1)] \rangle}$$

Можно показать, что для пуассоновского поля трещин искомое среднее с точностью до слагаемых, исчезающих при дальнейшем интегрировании, принимает вид

$$(3.5) \quad \mu \langle H(\mathbf{r}') \delta_r [p(\mathbf{r}')] | \mathbf{r}, \mathbf{r}_1 \in p \rangle = \frac{1}{\pi} \left\langle \frac{a}{E(\omega)} J(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1) \times \right. \\ \left. \times \delta[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') \mathbf{n}'] \right\rangle + \lambda,$$

где осреднение справа проводится по всем трещинам ориентации  $\mathbf{n}'$ ;  $\delta[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') \mathbf{n}']$  — дельта-функция, сосредоточенная на плоскости  $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') \mathbf{n}' = 0$ . Первое слагаемое в правой части (3.5) есть вклад в среднее от реализаций, для которых точки  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  расположены на одной трещине. Функция  $J(\mathbf{R})$  обладает симметрией эллипса с полуосями  $a$  и  $c$  и аффинным преобразованием  $\mathbf{C}$ , переводящим этот эллипс в круг единичного радиуса.  $J(\mathbf{R})$  переводится в сферически-симметричную функцию  $J'(\xi)$  ( $\xi = |\mathbf{C}\mathbf{R}|$ ):

$$(3.6) \quad J'(\xi) = \\ = \begin{cases} a^2 \int_0^1 \frac{(\zeta - \xi) \sqrt{\xi(2\zeta - \xi)} + \zeta^2 \left[ \arcsin \left( 1 - \frac{\xi}{\zeta} \right) + \frac{\pi}{2} \right]}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \zeta d\zeta & \text{при } \xi \leq 2, \\ \frac{1}{2} \xi & \\ 0 & \text{при } \xi > 2. \end{cases}$$

Второе слагаемое справа в (3.5) есть вклад в среднее от реализаций, для которых точки  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}_1$  оказываются на разных трещинах. Подставляя (3.5) в (2.10), для  $\theta(\mathbf{r})$  получим уравнение

$$(3.7) \quad \theta(\mathbf{r}) = j_0 + \mu^{-1} \int \langle \mathbf{I}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{n}') \otimes \mathbf{n}' \left\langle \frac{a}{\pi E(\omega)} J(\mathbf{r}') \right\rangle \delta(\mathbf{r}' \mathbf{n}') \rangle_{\mathbf{n}'} \times \\ \times \theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \mu^{-1} \int \langle \lambda \mathbf{I}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \otimes \mathbf{n}' \rangle \theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

Как отмечалось выше, математическое ожидание эффективного поля  $\bar{j}^1$  совпадает со значением функции  $\theta(\mathbf{r})$  на бесконечности. В частном случае равномерного распределения по ориентациям дискообразных трещин функция  $\theta(\mathbf{r})$  является сферически-симметричной, и ее значение на беско-



нечности можно вычислить, минуя построение точного решения уравнения (3.7). В этом случае, используя (1.5), получим

$$(3.8) \quad \bar{\mathbf{j}}^1 = \left[ \mathbf{1} - \frac{1}{3} \langle \lambda \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle \right]^{-1} \mathbf{j}_0,$$

где  $\mathbf{1}$  — единичный двухвалентный тензор.

Перейдем к построению корреляционной функции эффективного поля  $\bar{\mathbf{j}}^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ . Ограничимся для простоты полем трещин одинаковой ориентации. Тогда интерес представляет лишь проекция вектора  $\bar{\mathbf{j}}$  на общую нормаль ко всем трещинам  $\mathbf{n}$ . Обозначим

$$\langle \bar{\mathbf{n}}\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}_1)\bar{\mathbf{n}}\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}_2) | \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in p \rangle = \psi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Здесь предполагается, что точки  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  лежат на разных трещинах. Если точки  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  лежат всегда на одной трещине, то в силу гипотезы «а» о постоянстве эффективного поля в пределах каждой трещины и гипотезы «б» п. 2 будем иметь

$$\langle \bar{\mathbf{n}}\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}_1)\bar{\mathbf{n}}\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}_2) | \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in p \rangle = \langle [\bar{\mathbf{n}}\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r})]^2 | \mathbf{r} \in p \rangle.$$

Из (2.12) и соотношений (3.4), (3.5) следует уравнение для функции  $\psi(\mathbf{r})$

$$(3.9) \quad \psi(\mathbf{r}) = (\mathbf{n}\mathbf{j}_0)^2 + \mu^{-1} \int \mathbf{n}\mathbf{I}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{n}) \left\langle \frac{2\omega}{\pi E(\omega)} J(\mathbf{r}') \right\rangle \delta(\mathbf{r}'\mathbf{n}) d\mathbf{r}' \times \\ \times \langle [\bar{\mathbf{n}}\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r})]^2 | \mathbf{r} \in p \rangle + \mu^{-1}\lambda \int \mathbf{n}\mathbf{I}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{n}) \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

Осредняя выражение для  $[\bar{\mathbf{n}}\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r})]^2$  при условии, что точка  $\mathbf{r}$  на трещине, для пуассоновского поля трещин получим

$$(3.10) \quad \langle [\bar{\mathbf{n}}\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r})]^2 | \mathbf{r} \in p \rangle = (\mathbf{n}\mathbf{j}_0)^2 + \mu^{-1}\lambda \int \mathbf{n}\mathbf{I}(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

Решая уравнение (3.9) методом преобразований Фурье, будем иметь

$$(3.11) \quad \tilde{\psi}(\mathbf{k}) = (\mathbf{n}\mathbf{j}_0)^2 (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}) + [1 - \lambda \mu^{-1} \tilde{\mathbf{I}}(\mathbf{k})]^{-1} \mu^{-1} \mathbf{n}\mathbf{I}(\mathbf{k}) F(\mathbf{k}) \langle [\bar{\mathbf{n}}\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r})]^2 | \mathbf{r} \in p \rangle,$$

где  $F(\mathbf{k})$  есть преобразование Фурье функции  $\langle (2a/\pi E(\omega)) I(\mathbf{R}) \delta[\mathbf{R}\mathbf{n}] \rangle$ , определенной соотношениями (3.5), (3.6). Здесь учтено, что в силу регуляризации (1.7)  $\tilde{\mathbf{I}}(0) = 0$ .

Далее, используя формулу Парсеваля, из (3.10) получим

$$\langle [\bar{\mathbf{n}}\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r})]^2 | \mathbf{r} \in p \rangle = (\mathbf{n}\mathbf{j}_0)^2 + \frac{\lambda}{(2\pi)^3} \int \left\{ 1 - \lambda \left[ \frac{(\mathbf{k}\mathbf{n})^2}{k^2} - 1 \right] \right\}^{-1} \left[ \frac{(\mathbf{k}\mathbf{n})^2}{k^2} - 1 \right]^2 \times \\ \times F(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \langle [\bar{\mathbf{n}}\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r})]^2 | \mathbf{r} \in p \rangle.$$

Вычисляя интеграл в правой части этого соотношения, можно найти выражение для  $\langle [\bar{\mathbf{n}}\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r})]^2 | \mathbf{r} \in p \rangle$

$$(3.12) \quad \langle [\bar{\mathbf{n}}\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r})]^2 | \mathbf{r} \in p \rangle = \sqrt{1 + \lambda} (\mathbf{n}\mathbf{j}_0)^2.$$

Таким образом, правая часть соотношения (3.11) определена полностью.

4. Результаты, полученные в п. 3, позволяют перейти к определению математического ожидания и корреляционной функции случайных полей

векторов тока и напряженности электрического поля в среде с трещинами.

Осредним соотношения (1.3) для векторов  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$ , используя предположения эффективного поля:

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \mathbf{j}_0 + \left\langle \int \mathbf{I}(\mathbf{R}, \mathbf{n}') (\mathbf{n}' \bar{\mathbf{j}}^1) \langle H(\mathbf{r}') \delta[p(\mathbf{r}')] \rangle d\mathbf{r}' \right\rangle_{\mathbf{n}'},$$

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \mathbf{E}_0 + \left\langle \int \nabla \Phi(\mathbf{R}, \mathbf{n}') (\mathbf{n}' \bar{\mathbf{j}}^1) \langle H(\mathbf{r}') \delta[p(\mathbf{r}')] \rangle d\mathbf{r}' \right\rangle_{\mathbf{n}'}$$

Здесь внешнее осреднение проводится по всем ориентациям, а среднее под интегралом вычисляется при фиксированном значении нормали  $\mathbf{n}'$ .

Поскольку для пуассоновского поля трещин  $\langle H(\mathbf{r}') \delta[p(\mathbf{r}')] \rangle = \lambda/\mu$ , где  $\lambda$  имеет вид (3.3), используя регуляризацию (1.7), (1.8), будем иметь

$$(4.1) \quad \langle \mathbf{j} \rangle = \mathbf{j}_0, \quad \langle \mathbf{E} \rangle = \mu^{-1} [\mathbf{j}_0 + \langle \lambda \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle \bar{\mathbf{j}}^1],$$

где в первом приближении  $\bar{\mathbf{j}}^1 = \mathbf{j}_0$ ; второе приближение для  $\bar{\mathbf{j}}^1$  имеет вид (3.8).

Введем тензоры эффективного электрического сопротивления  $\sigma_a$  и эффективной электропроводности  $\mu_a$  естественными соотношениями

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \sigma_a \langle \mathbf{j} \rangle, \quad \mu_a = \sigma_a^{-1}.$$

Отсюда и из (4.1) следует, что в первом приближении

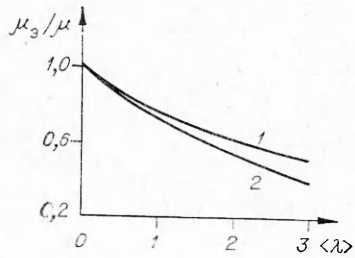
$$(4.2) \quad \mu_a = \mu [1 + \langle \lambda \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle]^{-1}.$$

Второе приближение метода дает

$$(4.3) \quad \mu_a = \mu \left[ 1 + \langle \lambda \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle \left( 1 - \frac{1}{3} \langle \lambda \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle \right)^{-1} \right]^{-1}.$$

Зависимости (4.2), (4.3) для случая равномерного распределения по ориентациям дискообразных трещин представлены на фигуре (кривая 1 соответствует (4.2), 2 — (4.3)).

Приведем выражение для корреляционной функции случайного поля вектора тока в среде с трещинами одной ориентации. Перемножим значение поля  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  (выражение (1.2)) в различных точках  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  и осредним результат по ансамблю реализаций. Используя предположения эффективного поля, для преобразования Фурье функции  $\mathbf{\Pi}(\mathbf{R}) = \langle \mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \otimes \mathbf{j}(\mathbf{r}_2) \rangle$  можно



получить выражение

$$\tilde{\mathbf{\Pi}}(\mathbf{k}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}) \mathbf{j}_0 \otimes \mathbf{j}_0 + \mu^2 \left[ \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{n})}{k^2} - \mathbf{n} \right] \otimes \left[ \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{n})}{k^2} - \mathbf{n} \right] \times$$

$$\times [\tilde{K}(\mathbf{k}) \langle |\mathbf{n}\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r})|^2 | \mathbf{r} \in p \rangle + \lambda^2 \mu^{-2} \tilde{\psi}(\mathbf{k})].$$

Здесь  $\tilde{\psi}(\mathbf{k})$  имеет вид (3.11);  $\langle |\mathbf{n}\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r})|^2 | \mathbf{r} \in p \rangle$  определяется соотношением (3.12). Функция  $\tilde{K}(\mathbf{R})$  есть среднее вида

$$K(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2) = \langle H(\mathbf{r}'_1) \delta_{r_1} [p(\mathbf{r}'_1)] H(\mathbf{r}'_2) \delta_{r_2} [p(\mathbf{r}'_2)] | \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in p \rangle,$$

где осреднение проводится при условии, что точки  $\mathbf{r}'_1$  и  $\mathbf{r}'_2$  лежат на одной трещине.

Средняя плотность энергии поля  $\langle W \rangle$  имеет вид

$$\langle W \rangle = \mu^{-1} \cdot \langle \mathbf{j}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{j}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mu^{-1} \cdot \tilde{\Pi}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$$

(точкой обозначено полное свертывание тензоров).

После вычисления интеграла в правой части этого соотношения получим

$$\langle W \rangle = \mu^{-1} [\mathbf{j}_0^2 + \lambda (\mathbf{n} \mathbf{j}_0)^2].$$

Аналогично может быть найдено выражение для корреляционной функции вектора напряженности электрического поля в среде с трещинами.

В заключение остановимся на вопросе об оценке точности приближения эффективного поля. Известно, что этот метод в задачах о взаимодействии точечных частиц дает тем лучшее приближение, чем медленнее затухает на бесконечности потенциал отдельной частицы и чем больше плотность частиц. Однако строгих аналитических оценок в случае сильного взаимодействия получить не удается из-за сложной структуры точного решения. Обычно такие оценки указываются на основании физических соображений.

Относительно полученных в работе выражений для первого и второго статистических моментов решения заметим, что при малой концентрации трещин, когда взаимодействие отсутствует ( $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_0$ ), гипотезы «а» и «б» метода (п. 2) выполняются точно. Следовательно, полученные выражения есть точные решения задачи. С увеличением концентрации справедливость гипотез «а» и «б», вообще говоря, нарушается. Причем гипотеза «а» нарушается, когда эффективное поле для типичной трещины сильно отличается от однородного, т. е. при большой концентрации трещин. Наоборот, гипотеза «б» более оправдана, когда типичная трещина находится в поле многих соседних трещин, т. е. при большой их концентрации. Последнее относится также к области применимости предположений типа (2.8).

Однако нарушение гипотез «а» и «б», которые относятся к поведению каждой отдельной трещины, может не сказываться на величине таких грубых статистических характеристик, как первый и второй моменты решения. По-видимому, метод эффективного поля в случае пуассоновского поля трещин дает хорошее приближение для первых моментов решения, когда среднее расстояние между центрами трещин не меньше их средних размеров, что соответствует  $\lambda \leq 1,5-2$ .

Поступила 5 V 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Горюнов И. И. Некоторые результаты методических исследований трещинных коллекторов по их электрическому сопротивлению. — «Труды ВНИГРИ», 1962, вып. 193.
2. Bunshan R. F. (Ed.) Techniques of metals research. Vol. V, pt 2. N. Y. — L., 1971.
3. Hori M. Statistical theory of effective electrical, thermal and magnetic properties of random heterogeneous material VII. — «J. Math. Phys.», 1977, vol. 18, N 3.
4. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М., «Наука», 1977.

---

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. This is essential for ensuring the integrity of the financial statements and for providing a clear audit trail. The records should be kept up-to-date and should be easily accessible to all relevant parties.

2. The second part of the document outlines the procedures for handling cash receipts and payments. It is important to ensure that all receipts are properly issued and that payments are made in a timely and accurate manner. This helps to prevent errors and ensures that the company's cash flow is properly managed.

3. The third part of the document describes the process of reconciling bank statements with the company's records. This is a critical step in the accounting cycle and helps to identify any discrepancies or errors. It is important to perform this reconciliation regularly and to investigate any differences immediately.

4. The fourth part of the document discusses the importance of maintaining proper documentation for all financial transactions. This includes keeping copies of all receipts, invoices, and bank statements. This documentation is essential for providing evidence in the event of an audit or legal dispute.

5. The fifth part of the document outlines the procedures for preparing the financial statements. This involves summarizing the company's financial performance over a specific period and presenting this information in a clear and concise manner. It is important to ensure that the financial statements are accurate and that they provide a true and fair view of the company's financial position.

---

6. The sixth part of the document discusses the importance of maintaining proper records of fixed assets. This includes keeping track of the acquisition, depreciation, and disposal of all tangible assets. It is important to ensure that the records are accurate and that the assets are properly valued and reported in the financial statements.

7. The seventh part of the document outlines the procedures for handling payroll and other employee-related transactions. This includes ensuring that all employees are properly compensated and that all taxes and social security contributions are correctly calculated and paid. It is important to maintain accurate records of all payroll transactions and to provide a clear audit trail.

8. The eighth part of the document discusses the importance of maintaining proper records of all financial transactions. This includes keeping track of all income, expenses, and transfers. It is important to ensure that the records are accurate and that they provide a clear audit trail.

9. The ninth part of the document outlines the procedures for preparing the financial statements. This involves summarizing the company's financial performance over a specific period and presenting this information in a clear and concise manner. It is important to ensure that the financial statements are accurate and that they provide a true and fair view of the company's financial position.

10. The tenth part of the document discusses the importance of maintaining proper records of all financial transactions. This includes keeping track of all income, expenses, and transfers. It is important to ensure that the records are accurate and that they provide a clear audit trail.