

О ПАДЕНИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА КЛИНОВИДНУЮ ПЛОСКОСТЬ

С. К. Годунов, Я. М. Каждан, В. А. Симонов

(Москва)

Теоретически и экспериментально исследуется движение металла, возникшее в результате падения плоской ударной волны на клиновидную полость. Пользуясь функционально-инвариантными решениями С. Л. Соболева, выписываем звуковое приближение для этой задачи и определяем область его применимости. Показывается, что в области, где звуковое приближение не применимо, течение в главном члене описывается уравнениями несжимаемой жидкости, граничные условия для которых определяются акустической областью. Описывается методика эксперимента и приводится сравнение теоретических и экспериментальных данных.

Рассмотрим движение, возникшее в результате падения ударной волны, параллельной плоскости xz , на клиновидную полость, ребро которой совпадает с осью z . Уравнение состояния вещества

$$p = \frac{\rho_0 c_0^2}{\chi} (\delta^\chi \gamma - 1) \quad (1)$$

Перед волной скорость $u = 0$, давление $p = 0$, относительная плотность $\delta = 1$, энтропийная величина $\gamma = 1$, плотность ρ_0 и скорость звука c_0 . На фронте ударной волны задано постоянное давление p_1 . Исследование проводится в предположении малости отношения

$$\varepsilon = \frac{p_1}{\rho_0 c_0^2} \quad (2)$$

При этом оказывается, что рассматриваемое в главном члене течение в пространстве $xuzt$ разбивается на две области: в первой области, непосредственно примыкающей к фронту, главный член определяется линеаризованными уравнениями газовой динамики — звуковое приближение, во второй — уравнениями несжимаемой жидкости. Ниже приводится главный член в области, соответствующей звуковому приближению, и устанавливается область, где главный член течения определяется уравнениями несжимаемой жидкости.

Очевидно, течение не зависит от координаты z , поэтому будем рассматривать его в плоскости xu . Из условий на ударной волне следует, что на фронте

$$p_1 = \rho_0 c_0^2 \varepsilon, \quad \delta = 1 + \varepsilon, \quad u_x = 0, \quad u_y = \varepsilon c_0, \quad D = c_0 \quad (3)$$

где D — скорость волны.

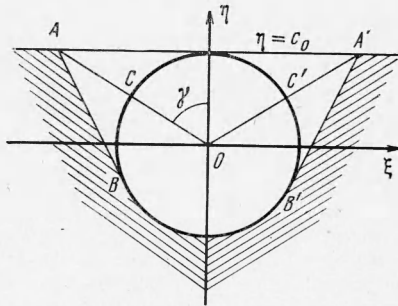
На фронте $u / c_0 \approx \varepsilon$. Пока это отношение остается малым можно ограничиться звуковым приближением; в этом же приближении можно считать, что

$$p = \rho_0 c_0^2 (\delta - 1) \quad (4)$$

Линеаризованные уравнения газовой динамики выглядят так:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

Движение за фронтом после его падения на полый клин автомодельно. Автомодельные переменные — $\xi = x/t$, $\eta = y/t$ (t — время, отсчитываемое от момента падения). Фронту ударной волны соответствует линия $\eta = c_0$. Уравнения движения в звуковом приближении совпадают с уравнениями, написанными в лагранжевых координатах. Поэтому в звуковом приближении свободная граница совпадает со сторонами клина, т. е.



Фиг. 1

$\xi = \pm \operatorname{tg} \gamma \eta$ (2γ — угол раствора клина)

$$\xi = \pm \operatorname{tg} \gamma \eta \quad (2\gamma \text{ — угол раствора клина}) \quad (6)$$

В плоскости $\xi\eta$, вне области вырезанной характеристиками, выходящими из точек пересечения фронта со свободной границей, значения газодинамических функций совпадают с соответствующими значениями на фронте. В переменных ξ , η акустические уравнения будут выглядеть так:

В переменных ξ , η акустические уравнения будут выглядеть так:

$$\frac{\partial \delta}{\partial \xi} \xi + \frac{\partial \delta}{\partial \eta} \eta - \left(\frac{\partial u_x}{\partial \xi} + \frac{\partial u_y}{\partial \eta} \right) = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial \xi} \xi + \frac{\partial u_x}{\partial \eta} \eta - c_0^2 \frac{\partial \delta}{\partial \xi} = 0$$

$$-\frac{\partial u_y}{\partial \xi} \xi + \frac{\partial u_y}{\partial \eta} \eta - c_0^2 \frac{\partial \delta}{\partial \eta} = 0 \quad (7)$$

Характеристиками течения будут прямые

$$\eta = C\xi \quad (8)$$

соответствующие линиям тока, прямые

$$\eta = p\xi \pm \sqrt{1 + p^2} c_0 \quad (9)$$

и огибающая их дуга окружности

$$\xi^2 + \eta^2 = c_0^2 \quad (10)$$

Область постоянства ограничена фронтом $\eta = c_0$, характеристиками AB , $A'B'$ и BB' . (Заштрихованная часть фиг. 1.)

Уравнение характеристики AB

$$\eta = \pm [\operatorname{tg} 2\gamma \xi - c_0 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\gamma}] \quad (+ \sim \gamma < 1/4\pi, - \sim \gamma > 1/4\pi) \quad (11)$$

Уравнение характеристики $A'B'$

$$\eta = \pm [\operatorname{tg} 2\gamma \xi + c_0 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\gamma}] \quad (- \sim \gamma < 1/4\pi, + \sim \gamma > 1/4\pi) \quad (12)$$

На фиг. 1 ломаная $BACOC'A'B'$ и дуга окружности BB' ограничивают на плоскости автомодельных переменных ξ , η зону, возмущенную волной, отразившейся от границы выреза. В этой области течение потенциально. Решение уравнений акустики в этой области было впервые вычислено С. Л. Соболевым [1] с помощью теории функционально-инвариантных решений.

После ввода потенциала φ в виде

$$\varphi(x, y, t) = t\Phi(\xi, \eta) \quad (13)$$

это решение может быть выписано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi &= 0 \text{ на свободной границе } OA \text{ и } OA' \\ \Phi &= -c_0^2 \varepsilon [\sin 2\gamma\xi - (1 - \cos 2\gamma)\eta] \text{ в области } C'A'B' \\ \Phi &= c_0^2 \varepsilon [\sin 2\gamma\xi - (1 - \cos 2\gamma)\eta] \text{ в области } CAB \\ \Phi &= \Phi_0(\xi, \eta) \text{ в области } COC'B'BC \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{r}{1 + \sqrt{1-r^2}} \right)^{2(n+1)\alpha} [1 + (2n+1)\alpha \sqrt{1-r^2}] \cos(2n+1)\alpha(\pi - \theta) \\ C_n &= (-1)^n \frac{16(\pi - \gamma)^2 c_0^2 \varepsilon \cos(2n+1)\alpha\gamma}{(2n+1)[(2n+1)^2 \pi^2 - 4(\pi - \gamma)^2]}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2(\pi - \gamma)} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{c_0}, \quad \theta = \arctg \frac{\xi}{\eta} \\ u_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad u_y = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (16)$$

Из первого и второго уравнений (7) и условия $\Phi = 0$ на свободной границе следует:

$$c_0^2(\delta - 1) = \xi \partial \Phi / \partial \xi + \eta \partial \Phi / \partial \eta - \Phi = r \partial \Phi / \partial r - \Phi \quad (17)$$

Ряд, определяющий δ , удается просуммировать

$$\begin{aligned} \delta &= 1 + \varepsilon \left[\arctg \frac{\cos \alpha (\gamma + \pi - \theta)}{\operatorname{sh} \alpha q} + \arctg \frac{\cos \alpha (\gamma + \pi + \theta)}{\operatorname{sh} \alpha q} \right] \\ q &= \ln(1 + \sqrt{1-r^2}) - \ln r \end{aligned} \quad (18)$$

В этой работе делаются из указанных формул некоторые качественные выводы, которые сравниваются с экспериментом.

Из формул (15) и (18) следует, что при $r \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial r} &\approx 4c_0^2 \frac{\alpha}{\alpha - 1} \varepsilon \cos \alpha \gamma \cos \alpha (\pi - \theta) r^{\alpha-1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &\approx 4c_0^2 \frac{\alpha}{\alpha - 1} \varepsilon \cos \alpha \gamma \sin \alpha (\pi - \theta) r^\alpha \end{aligned} \quad (19)$$

$$\delta - 1 \approx 4\varepsilon \cos \alpha \gamma \cos \alpha (\pi - \theta) r^\alpha$$

Решение (15), (18) соответствует звуковому приближению, следовательно, но справедливо лишь в той области, где скорость частиц мала по сравнению со скоростью звука. При $r \rightarrow 0$

$$v^2 = \frac{1}{c_0^2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 \right] \approx \frac{16c_0^2 \alpha^2}{(\alpha - 1)^2} \varepsilon^2 r^{2(\alpha-1)} \quad (20)$$

Так как $1/2 < \alpha < 1$, то при $r \rightarrow 0$ значение $v^2 \rightarrow \infty$, поэтому необходимо выделить область, где справедливо звуковое приближение. В результате подстановки асимптотики (19) в нелинеаризованные уравнения газодинамики для изэнтропического и потенциального течения получается, что звуковым приближением можно пользоваться лишь в той области, где $\varepsilon r^{\alpha-2} \ll 1$. Для исследования решения в области, где $\varepsilon r^{\alpha-2} \approx 0$ (1), удобно перейти к новым масштабам

$$r = \varepsilon^{1/(2-\alpha)} R, \quad \Phi = \varepsilon^{2/(2-\alpha)} \psi, \quad \delta - 1 = \varepsilon^{2/(2-\alpha)} \Delta \quad (21)$$

При этом исследованию подлежит область конечных значений R . Стремление $r \rightarrow 0$ в звуковой области означает, что $R \rightarrow \infty$. Следовательно, при $R \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика

$$\psi \approx \frac{4c_0^2}{\alpha - 1} \cos \alpha \gamma \cos \alpha \theta R^\alpha, \quad \Delta = 4 \cos \alpha \gamma \cos \alpha \theta R^\alpha \quad (22)$$

Из уравнений, полученных в результате подстановки (21) в газодинамическую систему для изэнтропического и потенциального течения, следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ и конечных значениях R должно быть выполнено уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0 \quad (23)$$

т. е. $\psi(R, \theta)$ — гармоническая функция, удовлетворяющая асимптотике

$$\psi \approx \frac{4c_0^2}{\alpha - 1} \cos \alpha \gamma \cos \alpha \theta R^\alpha \quad \text{при } R \rightarrow \infty \quad (24)$$

Так как при конечных значениях R звуковое приближение перестает быть справедливым, то свободная граница в плоскости $\xi\eta$ уже не совпадает с отрезками прямых. Вдоль свободной границы должны быть выполнены уравнения

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 = 0 \quad (25)$$

что в переменных ξ, η и функции $\psi(\xi, \eta)$ записывается следующим образом:

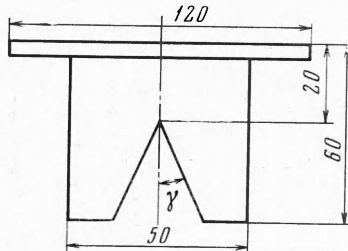
$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \eta \right) / \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \xi \right), \quad \psi - \psi_\xi \xi - \psi_\eta \eta + \frac{1}{2} (\psi_\xi^2 + \psi_\eta^2) = 0 \quad (26)$$

Заметим, кстати, что граничное условие (26) дает тот же масштаб для перехода из области, где действует акустика, в область, где в главном члене действуют уравнения несжимаемой жидкости.

Очевидно, при $R \rightarrow \infty$ уравнение свободной границы должно быть

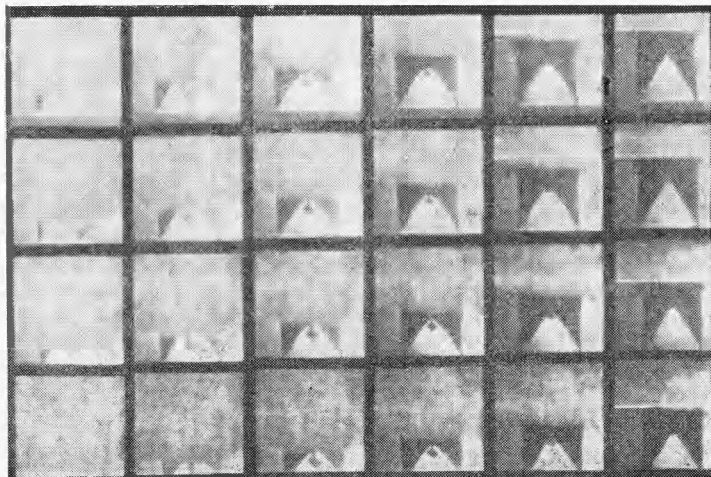
$$\xi \approx \pm \operatorname{tg} \gamma \eta \quad (27)$$

Таким образом, задача сведена к нахождению гармонической функции $\psi(\lambda, \eta)$, удовлетворяющей асимптотике (24) и условиям на свободной границе (26).



Фиг. 2

Экспериментальное исследование процесса набегания ударной волны на угол осуществлялось с помощью скоростного фоторегистра СФР, работающего в режиме лупы времени с частотой съемки 10^6 кадров в секунду. Опыты проводились в дюралевых образцах с размерами, указанными на фиг. 2. В качестве источников ударных волн исполь-

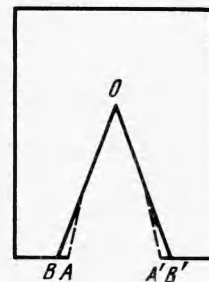


Фиг. 3

зовались заряды ВВ из гексогена и ТГ 50/50. Для получения плоской ударной волны изготавливались специальные конусные заряды из двух ВВ с различными скоростями детонации. Заряды располагались непосредственно на верхней плоскости образца.

Углы γ при вершине наблюдаемого клина составляли 15, 30, 32°. На фиг. 3 представлены фотографии процесса образования струи для углов $\gamma = 15^\circ$ и $\gamma = 32^\circ$.

Для сопоставления результатов теоретического исследования и данных эксперимента сравнивались скорости w движения точки пересечения свободной границы с осью симметрии — точки «схлопывания», и профиль свободной границы. В звуковом приближении величины r и θ можно считать лагранжевыми координатами, и, пользуясь формулами (22), можно найти эйлеровы координаты данной точки. Соответствие между эйлеровыми и лагранжевыми координатами не будет взаимно однозначным в окрестности точки схлопывания. Это связано с тем, что в этой окрестности звуковое приближение не применимо. В частности, полупрямые, соответствующие свободной границе, перейдут в две пересекающиеся на оси симметрии кривые. Точку пересечения этих кривых можно принять за точку схлопывания, а их отрезки, расположенные ниже этой точки, — за профиль свободной границы. При этом стоит отметить, что полученный таким образом профиль



Фиг. 4

свободной границы будет со временем меняться, однако угол, образованный им с осью симметрии в точке схлопывания от времени не зависит. Ниже приводятся сравнительные данные для скоростей w точки схлопывания O , и на фиг. 4 изображены профили свободной границы, полученные из эксперимента при $t = \infty$ ($B'OB$), и из звукового приближения (пунктир $A'OA$) при некотором определенном значении t .
 $\gamma = 15^\circ$ расчетное $w = 9000$ м/сек, экспериментальное $w = 7000-8000$ м/сек;
 $\gamma = 30^\circ$ расчетное $w = 7000$ м/сек, экспериментальное $w = 6000-8000$ м/сек.

Авторы благодарят А. А. Дерибаса за дискуссию по постановке задачи и по технике эксперимента и Н. С. Козина за проведение численных расчетов.

Поступила 28 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Теория дифракции плоских волн. Тр. сейсмологического ин-та, 1934, № 41.