УДК 532.51

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В СЛОЕ С ПЛОСКОЙ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Е. Н. Журавлева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия
E-mail: Zhuravleva_e@mail.ru

Исследуется частично инвариантное решение трехмерной задачи со свободной границей для уравнений Навье — Стокса. Рассматривается область течения, представляющая собой горизонтальный слой, ограниченный снизу твердой плоскостью, а сверху — плоской свободной поверхностью. Вертикальная скорость и давление не зависят от координат x, y. При различных начальных скоростях течения возникают три режима движения: стабилизация к состоянию покоя при увеличении времени, разрушение решения за конечное время и автомодельный режим, в котором толщина слоя со временем неограниченно увеличивается.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, задачи со свободной границей, автомодельное решение, разрушение решения.

DOI: 10.15372/PMTF20220302

Введение. Уравнения Навье — Стокса с потенциальным полем внешних сил имеют большие группы точечных преобразований (см., например, [1]) и вследствие этого множество инвариантных и частично инвариантных решений, описывающих движения со свободными границами. Классификация таких решений для плоского случая выполнена в работе [2], в которой также исследован ряд инвариантных двумерных задач со свободной границей. Класс частично инвариантных решений двумерной системы Навье — Стокса в полосе, когда одна из компонент скорости и давление являются функциями одной координаты и времени, изучался в [3, 4]. В работе [3] для случая деформации полосы с одной или двумя свободными границами сформулированы условия разрешимости в целом по времени. Класс решений, разрушающихся за конечный период времени для полосы с двумя свободными границами, представлен в [4]. Численное исследование деформации вязкой полосы со свободной границей и параллельной ей твердой стенкой проведено в работе [5], при этом получено решение, разрушающееся за конечный промежуток времени. В работе [6] найдены необходимые условия возникновения таких решений.

Для трехмерных течений вязкой жидкости существуют лишь отдельные примеры решений, обладающих групповой симметрией. Это прежде всего радиальные движения, описывающие заполнение сферической полости в безграничной жидкости [7] и деформацию

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 19-01-00096).

сферического слоя, обе границы которого свободны [8]. Пример частично инвариантного решения, которое можно интерпретировать как вращательно-симметричное течение в слое жидкости, ограниченном твердой вращающейся плоскостью и параллельной ей плоской свободной поверхностью, построен и исследован в работах [9, 10]. Точное решение, описывающее осесимметричное движение вязкой несжимаемой жидкости в слое, ограниченном твердой плоскостью и параллельной ей свободной поверхностью, исследовано в работе [11].

1. Постановка задачи. Рассматривается трехмерное течение вязкой несжимаемой жидкости в слое $\Lambda_t = \{(x, y) \in R^2,\ z \in (0, s(t))\}$, ограниченном снизу твердой плоскостью $z = 0$, а сверху — плоской свободной поверхностью $z = s(t)$. Здесь и далее x, y, z — декартовы координаты, $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ — вектор скорости, p — давление, ν, ρ — кинематическая вязкость и плотность жидкости, которые считаются положительными постоянными. Внешние массовые силы отсутствуют. Функции $\boldsymbol{v}, p$ в области Λ_t удовлетворяют уравнениям Навье — Стокса

$$\boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \boldsymbol{v}, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \qquad (x, y, z) \in \Lambda_t. \tag{1}$$

Далее вязкость будем полагать равной $\nu = 1$, что всегда можно получить с помощью стандартного обезразмеривания. На плоской свободной границе $z = s(t)$ выполнено кинематическое условие, т. е. скорость свободной границы совпадает с вертикальной составляющей скорости жидкости

$$\frac{ds}{dt} = w, \qquad z = s(t). \tag{2}$$

Из динамического условия непрерывности напряжений на плоской границе $z = s(t)$ следуют уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad -p + 4\rho\,\frac{\partial w}{\partial z} = p_a, \qquad z = s(t), \tag{3}$$

где p_a — атмосферное давление. На твердой стенке $z = 0$ выполнены условия прилипания

$$u = v = w = 0, \qquad z = 0. \tag{4}$$

Будем искать решения системы (1)–(4), в которых вертикальная составляющая вектора скорости и давление не зависят от координат x, y, а горизонтальные компоненты вектора скорости линейно зависят от соответствующей координаты:

$$u = xf(z, t), \quad v = yg(z, t), \quad w = w(z, t), \quad p = p(z, t). \tag{5}$$

Подставляя (5) в уравнения (1), для функций $f(z, t)$, $g(z, t)$, $w(z, t)$, $p(z, t)$ получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + f^2 + w\,\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}; \tag{6}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} + g^2 + w\,\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}; \tag{7}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w\,\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}; \tag{8}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} + f + g = 0. \tag{9}$$

Из динамического условия (3) следуют граничные условия

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z} = 0, \qquad z = s(t), \tag{10}$$

а также условие
$$-p + 4\rho\,\frac{\partial w}{\partial z} = p_a, \qquad z = s(t). \tag{11}$$
Условия (4) принимают вид
$$f = g = w = 0, \qquad z = 0. \tag{12}$$
Функция давления $p(z,t)$ входит только в уравнение (8), следовательно, задача распадается на две задачи: 1) определение скорости жидкости и положения свободной границы из уравнений (6), (7), (9) с граничными условиями (2), (10), (12); 2) решение уравнения (8) с условием (11) для определения давления. Далее будем рассматривать только задачу определения скорости жидкости и области течения (задача 1), поскольку последующее вычисление давления не вызывает трудностей. Заметим, что в этой задаче помимо трех искомых компонент скорости жидкости неизвестно также положение свободной границы, т. е. функция $s(t)$. Задача 1 дополняется начальными условиями
$$f(z,0) = f_0(z), \qquad g(z,0) = g_0(z), \qquad s(0) = 1.$$

2. Автомодельное решение. Введем автомодельную переменную $\xi = z/\sqrt{1+ct}$ (c — неизвестная постоянная). Решение задачи 1 будем искать в виде
$$f(z,t) = \frac{F(\xi)}{1+ct}, \quad g(z,t) = \frac{G(\xi)}{1+ct}, \quad w(z,t) = \frac{W(\xi) + c\xi/2}{\sqrt{1+ct}}, \quad s(t) = \sqrt{1+ct}. \tag{13}$$
При таком выборе автомодельной переменной ξ свободная граница $z = s(t)$ переходит в фиксированную линию $\xi = 1$. Искомые функции $F(\xi)$, $G(\xi)$, $W(\xi)$ и неизвестная постоянная c в области $\{(\xi,t)\colon 0 < \xi < 1,\ t > 0\}$ удовлетворяют следующим уравнениям:
$$F'' - WF' - F^2 + cF = 0, \quad G'' - WG' - G^2 + cG = 0, \quad F + G + W' + c/2 = 0, \tag{14}$$
где штрих означает дифференцирование по ξ. Кинематическое условие (2) принимает вид $W(1) = 0$, динамическое условие (10) — $F'(1) = G'(1) = 0$, условия непротекания — $F(0) = G(0) = W(0) = 0$.

Введем искомые функции
$$H(\xi) = F(\xi) + G(\xi), \qquad R(\xi) = F(\xi) - G(\xi).$$
Тогда система (14) запишется в виде
$$\begin{gathered} H'' - WH' + (H^2 + R^2)/2 + cH = 0, \qquad R'' - WG' - RH + cR = 0, \\ H + W' + c/2 = 0, \end{gathered} \tag{15}$$
граничные условия — в виде
$$W(0) = H(0) = R(0) = W(1) = H'(1) = R'(1) = 0. \tag{16}$$
Таким образом, вопрос о существовании автомодельного решения вида (13) для задачи 1 сводится к вопросу о существовании решения краевой задачи (15), (16).

Утверждение. *Если автомодельное решение* (13) *существует, то оно описывает бесконечное расширение слоя жидкости с конечной скоростью.*

Доказательство. Из третьего уравнения системы (15) следует $H = -W' - c/2$, поэтому первое уравнение данной системы можно записать в виде
$$H'' = W(-W'') + c(W' + c/2) + (H^2 + R^2)/2.$$
Прибавляя к обеим частям равенства $(W^2/2)''$, получаем
$$\Big(H + \frac{W^2}{2}\Big)'' = (W')^2 + cW' + \frac{c^2}{2} + \frac{H^2 + R^2}{2} = \Big(W' + \frac{c}{2}\Big)^2 + \frac{c^2}{4} + \frac{H^2 + R^2}{2} \geqslant \frac{c^2}{4}.$$

Таким образом, $(H + W^2/2)'' \geqslant c^2/4$. Проинтегрируем это неравенство от ξ до 1 с учетом граничных условий (16):

$$(H + W^2/2)' \leqslant c^2/4(\xi - 1). \tag{17}$$

Неравенство (17) проинтегрируем в пределах от 0 до ξ:

$$H + \frac{W^2}{2} \leqslant \frac{c^2}{8}(\xi^2 - 2\xi) \quad \Rightarrow \quad H \leqslant \frac{c^2}{8}(\xi^2 - 2\xi) \quad \Rightarrow \quad \int\limits_0^1 H\, d\xi \leqslant -\frac{c^2}{12}. \tag{18}$$

Из третьего уравнения системы (15) следует $W' = -H - c/2$. Интегрируя с учетом граничных условий (16), находим

$$\int\limits_0^1 H\, d\xi = -\frac{c}{2}. \tag{19}$$

Подставляя (19) в последнее неравенство (18), получаем неравенство для неизвестной постоянной c, решением которого является отрезок $c \in [0, 6]$.

Таким образом, в случае если рассматриваемая задача имеет автомодельное решение вида (13), неизвестная постоянная $c \in [0, 6]$. Заметим, что в этом случае скорость изменения толщины слоя жидкости определяется по формуле

$$\frac{ds}{dt} = \left(\sqrt{1 + ct}\,\right)' = \frac{c}{2\sqrt{1 + ct}}.$$

Поскольку $c \geqslant 0$, можно сделать вывод, что функция $z = s(t)$ является возрастающей, а значит, толщина слоя жидкости увеличивается с течением времени, причем скорость роста этой функции не превышает значения $c/2 \leqslant 3$, т. е. конечна. Что и требовалось доказать.

Для дальнейшего исследования рассмотрим численное решение краевой задачи (15), (16). Исключая из уравнений системы функцию H, получаем краевую задачу для двух неизвестных функций с параметром c:

$$\begin{gathered} W''' + \frac{1}{2}(W')^2 + \frac{3}{2}cW' - WW'' + \frac{1}{2}R^2 + \frac{5}{8}c^2 = 0, \\ R'' - WR' + RW' + \frac{3}{2}cR = 0, \\ W(0) = R(0) = W(1) = R'(1) = 0, \qquad W'(0) = -c/2, \qquad W''(1) = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Предлагается следующий алгоритм численного решения.

1. С использованием метода стрельбы решаем краевую задачу (20) без учета последнего условия $W''(1) = 0$; получаем семейство решений с различными значениями параметра c.

2. Для каждого найденного значения параметра c вычисляем $W''(1)$; получаем некоторую функцию $\psi(c) = W''(1)$.

3. Вычисляем нули функции $\psi(c) = 0$, таким образом определяем значение параметра c, являющегося решением системы (20).

С использованием данного алгоритма установлено, что рассматриваемая задача о течении вязкой жидкости в плоском трехмерном слое имеет два автомодельных решения. Для первого решения $H(\xi) \equiv R(\xi)$. В терминах исходных функций $F(\xi)$, $G(\xi)$ это означает, что $G(\xi) \equiv 0$. Найденное автомодельное решение, описывающее течение для двумерного случая, аналитически построено и исследовано в работе [3]. Для второго автомодельного решения $R(\xi) \equiv 0$, что в терминах исходных функций соответствует "симметричной" ситуации $F(\xi) \equiv G(\xi)$.

Заметим, что найденный автомодельный режим, как и автомодельные режимы в [6], имеет незначительный запас устойчивости. Любые возмущения, наложенные на функции $F(\xi), G(\xi)$, взятые из автомодельного решения, приводят к изменению поведения свободной границы $s(t)$, даже если при этом сохраняется "симметричность", т. е. $R(\xi) \equiv 0$.

3. Численное решение. С использованием численных методов определим, какие решения, помимо автомодельного, имеет задача 1. Для численного исследования задач со свободной границей перейдем к лагранжевым координатам, так как при этом область течения становится фиксированной. Однако, прежде чем переходить к лагранжевым координатам, введем новые искомые функции

$$h(z,t) = f(z,t) + g(z,t), \qquad r(z,t) = f(z,t) - g(z,t).$$

Из уравнения (9) выразим $w(z,t)$:

$$w(z,t) = -\int_0^z f(\zeta,t) + g(\zeta,t)\, d\zeta = -\int_0^z h(\zeta,t)\, d\zeta.$$

Тогда уравнения (6), (7) можно записать в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}\,(h^2 + r^2) - \frac{\partial h}{\partial z}\int_0^z h(\zeta,t)\, d\zeta = \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}; \tag{21}$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} + hr - \frac{\partial r}{\partial z}\int_0^z h(\zeta,t)\, d\zeta = \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}. \tag{22}$$

Динамическое и кинематическое условия на свободной границе принимают вид

$$\frac{ds}{dt} = -\int_0^s h(\zeta,t)\, d\zeta, \qquad \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} = 0, \qquad z = s(t). \tag{23}$$

Условие непротекания на твердой стенке выполняется при

$$h = r = 0, \qquad z = 0. \tag{24}$$

Для задачи (21)–(24) введем лагранжевы координаты (a, τ):

$$t = \tau, \qquad z = z(a,\tau), \tag{25}$$

где a определяется из решения задачи Коши

$$\frac{dz}{dt} = -\int_0^{z(t)} h(\zeta,t)\, d\zeta, \qquad z(0) = a.$$

При такой замене переменных область с подвижной границей $\{(z,t)\colon\ 0 < z < s(t),$ $0 < t < T\}$ преобразуется в фиксированный прямоугольник:

$$\Theta_T = \{(a,\tau)\colon\quad 0 < a < 1, \quad 0 < \tau < T\}.$$

Рассмотрим новые искомые функции

$$H(a,\tau) = h(z,t), \qquad R(a,\tau) = r(z,t), \qquad \lambda(a,\tau) = \frac{\partial z}{\partial a}. \tag{26}$$

После замены переменных (25) и перехода к функциям (26) уравнения (21), (22) принимают вид

$$\frac{\partial H}{\partial \tau}+\frac{1}{2}\,(H^2+R^2)=\frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial a}\Big(\frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial H}{\partial a}\Big), \quad \frac{\partial R}{\partial \tau}+RH=\frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial a}\Big(\frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial R}{\partial a}\Big), \quad (a,\tau)\in\Theta_T$$

с начальными условиями

$$H(a,0)=h_0(z)=f_0(z)+g_0(z), \qquad R(a,0)=r_0(z)=f_0(z)-g_0(z)$$

и граничными условиями

$$H(0,\tau)=R(0,\tau)=0, \qquad \frac{\partial H}{\partial a}(1,\tau)=\frac{\partial R}{\partial a}(1,\tau)=0.$$

Для функции $\lambda(a,\tau)$ справедливо уравнение

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial \tau}\Big(\frac{\partial z}{\partial a}\Big)=-\frac{\partial}{\partial a}\int\limits_0^{z(t)} h(\zeta,t)\,d\zeta=-h(z,t)\,\frac{\partial z}{\partial a}=-H(a,\tau)\lambda$$

с начальным условием

$$\lambda(a,0)=\frac{\partial z}{\partial a}\,(a,0)=1.$$

Таким образом, решение задачи 1 сводится к решению системы

$$\begin{gathered}
\frac{\partial H}{\partial \tau}+\frac{1}{2}\,(H^2+R^2)=\frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial a}\Big(\frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial H}{\partial a}\Big), \qquad (a,\tau)\in\Theta_T,\\
\frac{\partial R}{\partial \tau}+RH=\frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial a}\Big(\frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial R}{\partial a}\Big), \quad (a,\tau)\in\Theta_T, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \tau}=-H(a,\tau)\lambda, \quad (a,\tau)\in\Theta_T,\\
H(0,\tau)=R(0,\tau)=0, \qquad \frac{\partial H}{\partial a}\,(1,\tau)=\frac{\partial R}{\partial a}\,(1,\tau)=0,\\
H(a,0)=f_0(z)+g_0(z), \qquad R(a,0)=f_0(z)-g_0(z), \qquad \lambda(a,0)=1.
\end{gathered} \tag{27}$$

При этом положение свободной границы определяется по формуле

$$s(t)=z(1,t)=\int\limits_0^1 \lambda(\zeta,\tau)\,d\zeta.$$

Система (27) решалась различными численными методами с использованием пакета Wolfram Mathematica 11.0 Информационно-вычислительного центра Новосибирского государственного университета. Заметим, что верификация применяемых численных методов проводилась с использованием найденного выше автомодельного решения.

В результате численного исследования обнаружены следующие сценарии поведения свободной границы для задачи 1.

Сценарий 1. Неограниченное возрастание функции $z=s(t)$ за конечное время. Данный сценарий соответствует бесконечному увеличению толщины слоя жидкости за счет мощного притока жидкости с бесконечности, когда твердая стенка не оказывает значительного тормозящего влияния. Этот сценарий наблюдался также в ранее рассмотренных двумерном и осесимметричном случаях [5, 6, 11]. В трехмерной задаче подобное поведение свободной границы возможно не только в случае притока жидкости по обеим горизонтальным осям x, y, но и в случае притока по одной горизонтальной оси и оттока по другой. На

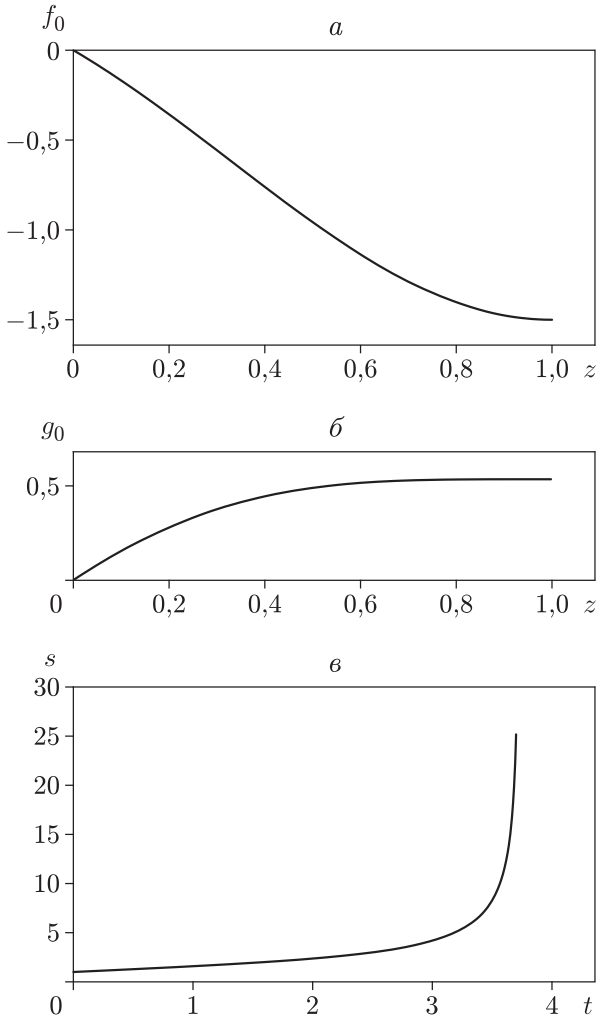

Рис. 1. Профили начальных скоростей жидкости f_0 (*а*) и g_0 (*б*) и положение свободной границы $z = s(t)$ (*в*) в случае бесконечного увеличения толщины слоя

рис. 1 приведены профили горизонтальных составляющих начальных скоростей жидкости $u_0 = xf_0(z)$, $v_0 = yg_0(z)$, где

$$f_0 = \frac{\cos(\pi z) - 1}{4} - \sin\Big(\frac{\pi z}{2}\Big), \qquad g_0 = \frac{\cos(\pi z) - 1}{4} + \sin\Big(\frac{\pi z}{2}\Big).$$

Наличие отрицательных значений функции $f_0(z)$ означает, что вдоль оси x в начальный момент времени происходит приток жидкости. Положительные значения функции $g_0(z)$ свидетельствуют о том, что вдоль оси y жидкость оттекает на бесконечность в начальный момент времени. Также на рис. 1 приведена функция $z = s(t)$, описывающая положение свободной границы, полученное при заданных начальных условиях. Видно, что за конечное время решение разрушается вследствие бесконечного увеличения толщины слоя жидкости.

Сценарий 2. Стремление функции $z = s(t)$ к постоянному значению за конечное время. Данный сценарий соответствует выходу за конечное время на установившееся течение. Стабилизирующее влияние бесконечности достаточно велико, и такой сценарий поведения свободной границы появляется при различных начальных данных. Однако в зависимости от начальных данных выход на стационарное значение $s(t)$ может быть как с понижением начального уровня жидкости, так и с его повышением. Более того, найде-

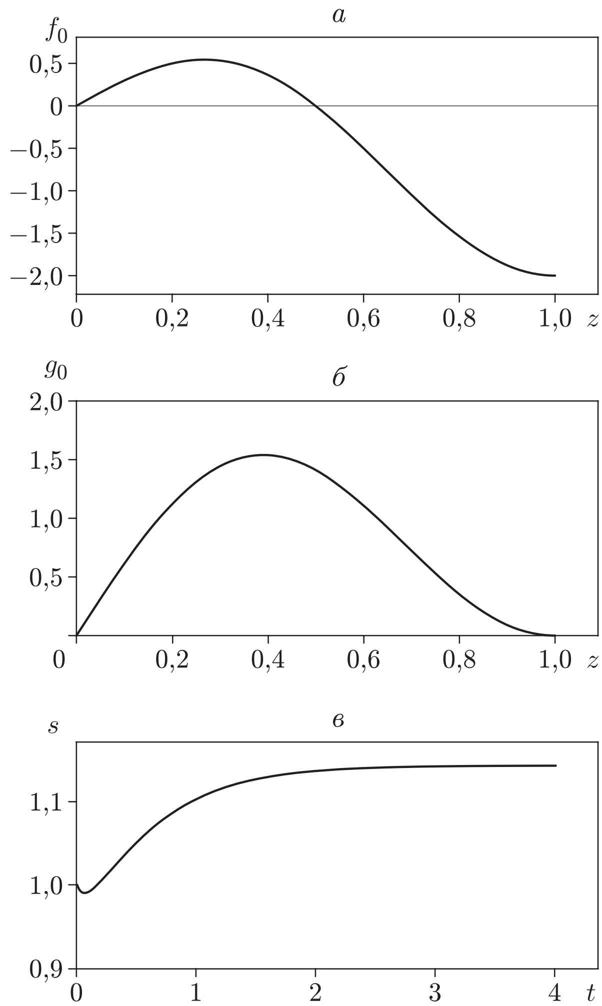

Рис. 2. Профили начальных функций $f_0(z)$ (*а*), $g_0(z)$ (*б*) и зависимость толщины слоя жидкости от времени $z = s(t)$ (*в*) при немонотонном поведении свободной границы

ны начальные условия, при которых с течением времени меняется характер монотонности свободной границы. Аналогичное поведение наблюдалось при исследовании осесимметричного течения на вращающейся плоскости [6, 9, 10], когда толщина слоя жидкости сначала увеличивается, а затем начинает уменьшаться вследствие вращения. В рассматриваемом случае уровень жидкости сначала понижается, а затем повышается и выходит на стационарное значение. На рис. 2 показаны начальные функции $f_0(z) = \sin(3\pi z/2) - \sin(\pi z/2)$, $g_0(z) = \sin(3\pi z/2) + \sin(\pi z/2)$, а также положение свободной границы. Видно, что в нижней части слоя жидкости при $0 < z < 0{,}5$ обе начальные функции являются положительными, а значит, жидкость течет в направлении от начала координат в бесконечность. В верхней части слоя, при $z > 0{,}5$ функция $f_0(z)$ становится отрицательной, т. е. жидкость меняет направление и течет вдоль оси x к началу координат в начальный момент времени. В случае задания такого профиля начальных скоростей характер монотонности свободной границы меняется с течением времени: толщина слоя сначала уменьшается, а затем начинает увеличиваться и выходит на стационарное значение.

4. Течение идеальной жидкости с линейным полем скоростей. Рассмотрим задачу о течении идеальной жидкости в аналогичной трехмерной области, ограниченной твердой плоскостью и параллельной ей свободной границей. Точное решение, описывающее течение идеальной жидкости с линейным полем скоростей в двумерной области, найдено Л. В. Овсянниковым [12]. В работе [5] при исследовании двумерной задачи о течении вязкой жидкости проведено сравнение с решением Овсянникова, поэтому, рассматривая трехмерную задачу, целесообразно провести аналогичные сравнения.

Решение задачи о течении идеальной несжимаемой жидкости в слое $\Lambda_t = \{(x, y) \in R^2, z \in (0, s(t))\}$, ограниченном твердой плоскостью $z = 0$ и свободной границей $z = s(t)$, будем искать в следующем виде:

$$u = xf(t), \qquad v = yg(t), \qquad w = zh(t), \qquad p = p(z,t). \tag{28}$$

Подставляя (28) в уравнения Эйлера, получаем систему дифференциальных уравнений для неизвестных функций $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ и давления $p(z,t)$:

$$f + g + h = 0, \qquad f' + f^2 = 0, \qquad g' + g^2 = 0, \qquad h' + h^2 = -\frac{1}{z}\,\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{29}$$

Дополним систему (29) граничными условиями. Условие непротекания на твердой стенке $z = 0$ выполняется автоматически в силу задания нормальной составляющей функции скорости в виде $w = zh(t)$. Динамическое условие на свободной границе имеет вид $p(s(t), t) = 0$. Из кинематического условия, согласно которому нормальная составляющая скорости жидкости и скорость границы совпадают, получаем уравнение для определения положения свободной границы:

$$s' = sh.$$

В начальный момент времени заданы поле скоростей и положение свободной границы:

$$f(0) = f_0, \qquad g(0) = g_0, \qquad s(0) = 1.$$

Интегрируя (29), находим точное решение уравнений Эйлера, описывающее течение идеальной жидкости с линейным полем скоростей в области со свободной границей:

$$\begin{gathered} u = \frac{xf_0}{1 + tf_0}, \qquad v = \frac{yg_0}{1 + tg_0}, \qquad w = -z\Big(\frac{f_0}{1 + tf_0} + \frac{g_0}{1 + tg_0}\Big), \\ p = -\frac{z^2}{2}\Big(\frac{f_0^2}{(1 + tf_0)^2} + \frac{g_0^2}{(1 + tg_0)^2} + \frac{f_0 g_0}{(1 + tf_0)(1 + tg_0)}\Big), \qquad s(t) = \frac{1}{(1 + tf_0)(1 + tg_0)}. \end{gathered} \tag{30}$$

Анализ формул (30) показывает, что, в случае если в начальный момент времени хотя бы одна из горизонтальных составляющих вектора скорости отрицательна (что соответствует притоку жидкости с бесконечности), т. е. $f_0 < 0$ или $g_0 < 0$, решение (30) разрушается за конечное время вследствие бесконечного увеличения толщины слоя жидкости. Действительно, при $g_0 < 0$ для конечного момента времени $t^* = -1/g_0 > 0$ имеем

$$\lim_{t\to t^*} s(t) = \lim_{t\to t^*} \frac{1}{(1 + tf_0)(1 + tg_0)} = \infty.$$

В аналогичном случае для вязкой жидкости также можно наблюдать бесконечное увеличение толщины слоя вследствие притока жидкости с бесконечности (см. рис. 1). Более того, асимптотически поведение свободной границы в случае вязкой и идеальной жидкостей одно и то же. Об этом свидетельствует существование для решения задачи 1 конечного значения времени T, такого что

$$\lim_{t\to T} \Big(\frac{1}{s(t)}\Big)' = \mathrm{const}\,.$$

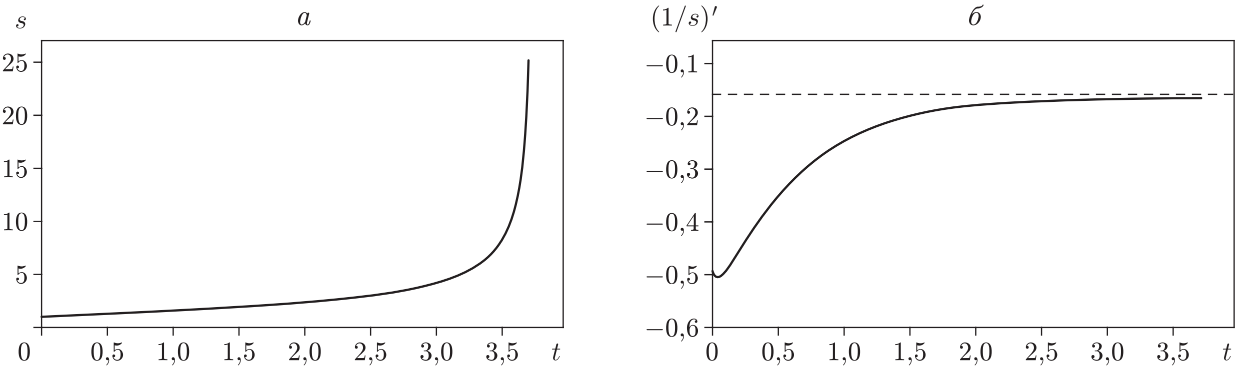

Рис. 3. Функции $z = s(t)$ (a) и $z = (1/s(t))'$ ($б$) для случая течения вязкой жидкости

На рис. 3 приведена функция $(1/s(t))'$, где $s(t)$ — решение задачи 1, представленное на рис. 1.

Качественное совпадение поведения свободных границ для вязкой и идеальной жидкостей можно объяснить, по-видимому, тем, что толщина слоя жидкости становится очень большой и твердая стенка не оказывает значительного тормозящего влияния.

Заключение. В работе проведено аналитическое и численное исследование одного из точных решений с особенностями, в частности разрушающихся за конечное время, представляющих интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения. Это решение имеет теоретико-групповую природу — является частично инвариантным по Овсянникову решением уравнений Навье — Стокса [1, 13] и описывает трехмерное течение вязкой жидкости в слое, ограниченном твердой плоскостью и параллельной ей свободной поверхностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Андреев В. К.** Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике / В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1994.
2. **Пухначев В. В.** Задачи со свободной границей для уравнений Навье — Стокса: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1974.
3. **Pukchnachov V. V.** On a problem of viscous strip deformation with a free boundary // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. 1999. V. 328. P. 357–362.
4. **Galaktionov V. A., Vazquez J. L.** Blow-up of a class of solutions with free boundaries for the Navier — Stokes equations // Adv. Difference Equat. 1999. V. 4. P. 297–321.
5. **Журавлева Е. Н.** Численное исследование точного решения уравнений Навье — Стокса, описывающего движение жидкости со свободной границей // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 3. С. 9–15.
6. **Pukhnachev V. V., Zhuravleva E. N.** Viscous flows with flat free boundaries // Europ. Phys. J. Plus. 2020. V. 135. 554.
7. **Забабахин Е. И.** Заполнение пузырьков в вязкой жидкости // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 6. С. 1129–1132.
8. **Бытев В. О.** Инвариантные решения уравнений Навье — Стокса // ПМТФ. 1972. № 6. С. 56–64.
9. **Лаврентьева О. М.** Течение вязкой жидкости в слое на вращающейся плоскости // ПМТФ. 1989. № 5. С. 41–48.

10. **Лаврентьева О. М., Волкова Г. Б.** Предельные режимы растекания слоя на вращающейся плоскости // Динамика сплошной среды / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1996. Вып. 111. С. 68–77.
11. **Журавлева Е. Н., Пухначев В. В.** Задача о деформации вязкого слоя // Докл. РАН. Физика, техн. науки. 2020. Т. 490. С. 66–69.
12. **Овсянников Л. В.** Общие уравнения и примеры // Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967. С. 5–75.
13. **Овсянников Л. В.** Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.

Поступила в редакцию 12/V 2021 г.,
после доработки — 12/V 2021 г.
Принята к публикации 31/V 2021 г.