

УДК 536.46

ОТРИЦАТЕЛЬНЫЙ ЭРОЗИОННЫЙ ЭФФЕКТ И ВОЗНИКНОВЕНИЕ НЕУСТОЙЧИВОГО ГОРЕНИЯ.

2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

К. О. Сабденов, М. Ерзада

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, 010008 Астана, Казахстан
sabdenovko@yandex.kz

Проведено численное моделирование горения при проявлении эффекта Вилюнова — Дворяшина, заключающегося в снижении скорости горения при обдуве поверхности газификации топлива газообразными продуктами горения. Рассмотрены случаи эндотермической и экзотермической реакций газификации твердого топлива. Эффект Вилюнова — Дворяшина может приводить к прекращению горения еще до достижения коэффициентом эрозии минимального значения 0.61. Возможно также возникновение автоколебательного горения. Моделирование горения топлива, близкого по свойствам к пороху Н, показало качественное согласие теоретических и экспериментальных результатов. Но оно также выявило необходимость более точных данных по условиям проведения и результатам экспериментов. В значительном усовершенствовании нуждаются и существующие модели горения твердых ракетных топлив.

Ключевые слова: эффект Вилюнова — Дворяшина, скорость обдува поверхности горения, прекращение горения, неустойчивость горения.

DOI 10.15372/FGV20160209

ВВЕДЕНИЕ

В канале заряда твердого ракетного топлива газообразные продукты горения ускоряются за счет поступающих новых порций газа и его теплового расширения. В результате часть внутренней энергии газовых продуктов горения превращается в их кинетическую энергию. Скорость обдува w поверхности газификации твердого топлива направлена вдоль поверхности. При этом возникают эрозионные эффекты — изменение скорости горения, зависящее от скорости газового потока w [1–3]. Физические основы положительного эрозионного эффекта хорошо изучены: установлены причины роста скорости горения и предложены различные модели этого явления [4–12], определен универсальный параметр в виде числа Булгакова — Липанова и предложены уравнения для расчета пороговых скоростей и коэффициента эрозии [10–13].

Если горение происходит в условиях, когда у поверхности газификации нет обдувающего потока, то температура пламени равна T_b . В канале топливного заряда переход части внутренней энергии продуктов горения в их кинетическую энергию приводит к снижению

температуры пламени: $T_{b,w} < T_b$, где $T_{b,w}$ — температура пламени при обдуве. Как следствие, уменьшается скорость горения [11, 13].

С увеличением скорости обдува w скорость горения u снижается до тех пор, пока зона химических реакций в газовой фазе находится в вязком подслое турбулентного пограничного слоя. Если зона реакций выходит за пределы вязкого подслоя, в газовой фазе формируется турбулентное пламя, и скорость горения начинает расти. Тогда должен наблюдаться положительный эрозионный эффект.

Граница между эффектом Вилюнова — Дворяшина и положительным эрозионным эффектом определяется значением числа Булгакова — Липанова $\Theta = \delta_b/\delta_g$, где δ_b — ширина зоны горения, δ_g — толщина ламинарного подслоя. Приблизительно можно полагать, что при $\Theta < 1$ наблюдается отрицательный эрозионный эффект, при $\Theta > 1$ — положительный.

Эффект Вилюнова — Дворяшина может привести к неустойчивому горению [10, 13]. Оно вызвано снижением потока тепла из зоны пламени в газе к поверхности газификации твердой фазы топлива. В результате необходимый для существования стационарного горения баланс теплопереноса нарушается.

Скорость обдува w сильно зависит от ко-

ординаты по направлению нормали к поверхности топлива. Максимальное значение $w = w_\infty$ достигается на оси трубчатого канала топливного заряда.

Исследования [10, 13] показали, что если скорость w_∞ не изменяется в направлении движения обдувающего потока, то при определенных условиях горение может прекратиться. Это может произойти, если $w_\infty > w_{cr}$, где w_{cr} — критическое значение скорости w_∞ . Но в реальности скорость w_∞ монотонно растет вдоль канала вниз по потоку. Поэтому на некотором участке канала ($w_\infty < w_{cr}$) выше по потоку может существовать устойчивое горение, а на другом участке ($w_\infty > w_{cr}$) оно невозможно. Взаимодействие этих областей вызывает колебания скорости горения.

При эффекте Вилюнова — Дворяшина стационарная скорость горения может снижаться в $e^{1/2}$ раз ($e \approx 2.72$) [10, 13]. Но этот результат получен приближенными расчетами. Его необходимо проверить численным моделированием, так как нет полной ясности о процессе горения при сильном проявлении эффекта Вилюнова — Дворяшина. Настоящее исследование посвящено моделированию горения при широком изменении скорости обдувающего потока.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГОРЕНИЯ ТВЕРДОГО РАКЕТНОГО ТОПЛИВА ПРИ НАЛИЧИИ ОБДУВА

Моделирование горения при возникновении эрозионных эффектов необходимо проводить вместе с моделированием газодинамического течения в камере ракетного двигателя [7–9, 14] с учетом меняющейся скорости горения. Это сложная задача, но она упрощается в одном частном случае. Известно [14, 15], что соотношение между скоростью газодинамических процессов в камере сгорания двигателя и изменением теплового состояния топлива можно оценить параметром $\chi = t_c/t_k$, где t_c — характерное время прогрева в твердой фазе топлива, t_k — характерное время процессов в камере сгорания.

Если $\chi \gg 1$, то при нестационарном горении топлива процессы в камере сгорания можно приближенно считать стационарными, а соответствующие газодинамические параметры заданными. Исследования при $\chi \gg 1$ представляют интерес еще и потому, что в этом случае нестационарные процессы горения в основном связаны с параметрами самого топлива.

При моделировании горения твердого ракетного топлива в указанных выше условиях воспользуемся следующей схемой и обозначениями: с поверхности газификации $x_s(t)$ горючая смесь оттекает со скоростью v_s (t — время). Эта смесь затем сгорает в окрестности точки $x_f(t)$, где условно расположен передний фронт горения в газовой фазе. Химические реакции представлены одной реакцией с тепловым эффектом Q и эффективной энергией активации E . Она протекает по брутто-схеме $A \rightarrow B$, где A — горючая смесь, B — продукт химической реакции.

Топливо имеет переменную температуру T_c . Его теплоемкость c_c и плотность ρ_c считаются постоянными. Газификация твердой фазы топлива происходит в бесконечно узкой зоне с тепловым эффектом L . Эта зона является границей раздела твердой и газовой фаз и характеризуется температурой T_s . В полупространстве $x > x_s$ газовая смесь характеризуется температурой T , относительной концентрацией Y горючей смеси A ($0 \leq Y \leq 1$), плотностью ρ и теплоемкостью при постоянном давлении $c_p = \text{const}$.

Пусть теперь обдув плоской поверхности топлива со скоростью $w(x)$ происходит вдоль координаты z , ее направление совпадает с направлением движения продуктов горения. Это приводит к появлению пограничного слоя. На достаточно большом удалении $x \rightarrow \infty$ за пределами пограничного слоя устанавливается постоянное значение этой скорости: $w = w_\infty = \text{const}$. Вектор скорости газа имеет проекции v , w на оси декартовых координат x , z .

Ниже мы полагаем, что пограничный слой можно представить состоящим из двух областей: ламинарного подслоя и зоны развитого турбулентного течения. Структура ламинарного подслоя такова [16], что гидродинамические параметры в нем сильно меняются по направлению координаты x и слабо — по направлению z , и последними можно пренебречь.

Примем следующие допущения:

при относительно малой скорости обдува толщина ламинарного подслоя δ_g больше ширины зоны горения $\delta_b = x_f - x_s$ в газовой фазе; теплоемкости газовой и твердой фаз топлива одинаковы ($c_c \approx c_p$); кинетической энергией движения газа по направлению нормали к поверхности топлива можно пренебречь; диссипацией кинетической энергии газа и вы-

делением топлива за счет силы трения можно пренебречь.

Сначала необходимо найти основные соотношения для фронта горения. Воспользуемся подходом, принятым в теории пограничного слоя.

В пределах ламинарного подслоя скорости v , w можно полагать зависящими только от координаты x : $v = v(x)$, $w = w(x)$.

Изложенная выше физическая картина установившегося режима горения гомогенного ракетного топлива при обдуве математически может быть описана системой уравнений [10, 13, 17, 18]:

$$-\infty < x < x_s(t):$$

$$\rho c c_c \frac{\partial T_c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial x} \right);$$

$$x_s(t) < x < +\infty:$$

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \\ + \rho Q Y k_0 \exp \left(-\frac{E}{RT} \right) - \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial w^2}{\partial t} + v \frac{\partial w^2}{\partial x} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial Y}{\partial t} + v \frac{\partial Y}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(D \rho \frac{\partial Y}{\partial x} \right) - \\ - \rho Y k_0 \exp \left(-\frac{E}{RT} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho v = 0, \quad p = \rho R_g T.$$

Граничные условия:

$$x \rightarrow -\infty: \quad T_c = T_0;$$

$$x = x_s(t):$$

$$-\rho c \frac{dx_s}{dt} = -\rho \frac{dx_s}{dt} + \rho v,$$

$$-\rho c \frac{dx_s}{dt} = -\rho \frac{dx_s}{dt} + \rho v Y - D \rho \frac{\partial Y}{\partial x},$$

$$-\rho c \frac{dx_s}{dt} = m(T_c, p),$$

$$\lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial x} = \lambda \frac{\partial T}{\partial x} - L \rho c \frac{dx_s}{dt}, \quad T = T_c;$$

$$x \rightarrow +\infty: \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 0.$$

Здесь $\lambda_c = \text{const}$ — коэффициент теплопроводности топлива; D — коэффициент диффузии реагирующего в газовой фазе вещества; k_0 — предэкспоненциальный множитель в законе Аррениуса; R — универсальная газовая постоянная; R_g — газовая постоянная; m — массовая скорость газификации; λ — коэффициент теплопроводности газа; L — тепловой эффект в твердой фазе, $L > 0$, если газификация топлива происходит с выделением тепла.

В качестве начальных условий для уравнений (1) принимаются их стационарные решения в пределе бесконечно тонкой зоны химических реакций в газовой фазе ($E \rightarrow \infty$). Эти решения в безразмерной форме приведены ниже.

Скорость газификации топлива u можно определить по модели Мержанова — Дубовицкого [19]:

$$u = -\frac{dx_s}{dt} \sim \exp \left(-\frac{E_c}{2RT_c} \right), \quad (2)$$

где для удобства вместо температуры поверхности газификации T_s используется $T_c(t, x = x_s)$. Формула (2) служит для определения массовой скорости газификации $m(T_c, p)$ и следует из закона Аррениуса для скорости реакции с энергией активации E_c . Она справедлива для топлив, газификация которых преимущественно происходит путем пиролиза. Уравнение (2) широко применяется при моделировании горения твердых ракетных топлив [7, 10, 17, 20]. Скорость u в виде уравнения (2) или в форме степенной аппроксимации закона Аррениуса используется также в модели Денисона — Баума [21, 22].

При формулировке математической модели несущественным различием теплоемкостей твердой и газовой фаз пренебрегали: $c_c = c_p$. По такой же причине в дальнейшем не учитывалось изменение молекулярной массы продуктов реакции: $R_g = \text{const}$, $c_p = \text{const}$. Зависимости коэффициентов диффузии и теплопроводности от температуры и давления взяты для удобства в виде [13, 17]

$$D \sim T^2/p, \quad \lambda \sim T. \quad (3)$$

Переход в системе уравнений (1) к безразмерным величинам и координате Лагранжа ξ проводится по следующим формулам:

$-\infty < x < x_s(t)$:

$$\xi = \frac{u^0}{\varkappa_c} [x - x_s(t)], \quad u^0 \equiv -\left(\frac{dx_s}{dt}\right)^0;$$

$x_s(t) < x < +\infty$:

$$\xi = \frac{u^0}{\sigma \varkappa_c \rho_c} \int_{x_s(t)}^x \rho(y, t) dy, \quad \varkappa_c = \frac{\lambda_c}{c_c \rho_c}; \quad (4)$$

$$\theta_c = \frac{T_c}{T_s^0}, \quad \theta = \frac{T}{T_s^0}, \quad \theta_b = \frac{T_b}{T_s^0}, \quad \theta_0 = \frac{T_0}{T_s^0},$$

$$q = \frac{Q}{c_p T_s^0}, \quad \sigma = \frac{D(\rho^0)^2}{\varkappa_c \rho_c^2}, \quad B = -\frac{1}{u^0} \frac{dx_s}{dt},$$

$$l = \frac{L}{c_c T_s^0}, \quad \tau = \frac{(u^0)^2}{\varkappa_c} t, \quad \omega = \frac{w}{v_*}.$$

Здесь \varkappa_c — коэффициент температуропроводности топлива, масштаб скорости — $v_* = (\tau_s/\rho_s)^{1/2}$, где τ_s , ρ_s — касательное напряжение и плотность газа на поверхности твердой фазы топлива; верхним индексом 0 обозначены стационарные значения величин и значения в условиях без обдува.

Переход к координате Лагранжа позволяет отделить гидродинамическую часть задачи от диффузионно-тепловой части. Полагая $\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = 0$, это следует из принятого выше допущения $\chi \gg 1$. В результате несложных преобразований с учетом зависимостей (3) приходим к следующей формулировке задачи:

$$-\infty < \xi < 0: \quad \frac{\partial \theta_c}{\partial \tau} + B \frac{\partial \theta_c}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta_c}{\partial \xi^2};$$

$0 < \xi < +\infty$:

$$\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + B \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + qW(Y, \theta) - B\delta\omega \frac{d\omega}{d\xi};$$

$$\sigma \frac{\partial Y}{\partial \tau} + B \frac{\partial Y}{\partial \xi} = \text{Le} \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} - W(Y, \theta); \quad (5)$$

$$W(Y, \theta) = YK_0 \exp\left(-\frac{1}{\beta\theta}\right);$$

$$\delta = \frac{v_*^2}{c_p T_s^0}, \quad K_0 = \frac{\sigma \varkappa_c k_0}{(u^0)^2}, \quad \beta = \frac{RT_s^0}{E},$$

$$\text{Le} = \frac{D^0 \rho^0 c_p}{\lambda^0} = \text{const.}$$

Граничные условия:

$$\xi \rightarrow -\infty: \quad \theta_c = \theta_0;$$

$$\xi \rightarrow 0: \quad \theta_c = \theta, \quad \frac{\partial \theta_c}{\partial \xi} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + lB, \quad (6)$$

$$B(1 - Y) + \text{Le} \frac{\partial Y}{\partial \xi} = 0;$$

$$\xi \rightarrow +\infty: \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial \xi} = 0.$$

Безразмерная скорость горения B рассчитывается по формуле

$$B = \exp\left[\frac{1}{\beta_c} \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)\right], \quad \beta_c = \frac{2RT_s^0}{E_c}. \quad (7)$$

Системой уравнений (5)–(7) моделируются основные процессы горения. В них остается неопределенным распределение скорости $\omega(\xi)$ обдувающего потока газа. Этот вопрос обсуждается в следующем параграфе.

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА $\omega(\xi)$

Для расчета распределения скорости обдувающего газа используем полуэмпирическую теорию турбулентного пограничного слоя [16]. Базовым элементом этой теории служит понятие пути смешения Прандтля s . Для этого параметра можно построить дифференциальное уравнение [23]. Так как все процессы горения происходят в областях, включающих вязкий подслой и буферную зону, то для описания турбулентного пограничного слоя достаточно решить уравнения [23]

$$s \frac{d^2 s}{dx^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - \frac{\gamma}{\nu} s^2 \frac{dw}{dx} \left(1 - \frac{1}{\mu} \frac{ds}{dx}\right) = 0,$$

$$\nu \frac{dw}{dx} + s^2 \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = v_*^2.$$

Здесь ν — кинематическая вязкость газа. Первое уравнение содержит две константы: $\gamma = 0.15$ и $\mu = 0.395$ — постоянную Кармана. Второе выражение является уравнением Рейнольдса [16].

В приведенных уравнениях не учитывается движение газовых продуктов разложения топлива от поверхности горения со скоростью v . Давление в ракетных двигателях составляет десятки и сотни бар. Поэтому $v \ll w$, и скоростью v можно пренебречь.

Уравнения турбулентного пограничного слоя необходимо решать при условиях [23]

$$x = x_s(t):$$

$$\frac{d^2 s}{dx^2} = q \frac{v_*}{\nu}, \quad q = 4.23 \cdot 10^{-3}; \quad s = 0; \quad w = 0. \quad (8)$$

Определим безразмерную плотность газа ρ_n через безразмерную температуру θ :

$$\rho_n = \frac{p}{\rho_c R_g T_s^0 \theta}. \quad (9)$$

Запишем координату Лагранжа в виде

$$\xi = \frac{1}{s_*} \int_{x_s(t)}^x \rho_n dx', \quad \rho_n = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad s_* = \frac{\sigma \alpha c}{u^0},$$

где введен масштаб длины s_* для пути смешения. Тогда уравнение для безразмерной скорости $\omega = w/v_*$ с переменной Лагранжа принимает вид

$$\frac{1}{\text{Re}_s} \rho_n \frac{d\omega}{d\xi} + S^2 \left(\rho_n \frac{d\omega}{d\xi} \right)^2 = 1, \quad (10)$$

$$S = \frac{s}{s_*}, \quad \text{Re}_s = \frac{s_* v_*}{\nu}.$$

Переход к переменной Лагранжа в уравнении для безразмерного пути смешения S дает выражение

$$S \frac{d^2 S}{d\xi^2} + S \frac{dS}{d\xi} \frac{1}{\rho_n} \frac{d\rho_n}{d\xi} - \frac{1}{2} \left(\frac{dS}{d\xi} \right)^2 - \gamma \frac{\text{Re}_s}{\rho_n} \frac{d\omega}{d\xi} S^2 \left(1 - \frac{1}{\mu} \rho_n \frac{dS}{d\xi} \right) = 0. \quad (11)$$

Для численного решения уравнений (10), (11) их необходимо сначала преобразовать. Пусть $S = F^2$. Тогда уравнения (10), (11) можно записать как систему трех уравнений первого порядка:

$$\frac{d\omega}{d\xi} = \frac{X}{\rho_n}, \quad X = \frac{\sqrt{1 + 4\text{Re}_s^2 F^4} - 1}{2\text{Re}_s F^4},$$

$$\frac{dF}{d\xi} = U, \quad (12)$$

$$\frac{dU}{d\xi} = -\frac{U}{\rho_n} \frac{d\rho_n}{d\xi} + \frac{\gamma \text{Re}_s}{2} \frac{F}{\rho_n^2} X \left(1 - \frac{2}{\mu} \rho_n F U \right).$$

Вторая производная от пути смешения при $x = x_s(t)$ выражается через первую производную $\frac{dF}{d\xi}$ в точке $\xi = 0$ ($F = 0$):

$$\frac{d^2 s}{dx^2} = \frac{2\rho_n^2}{s_*} \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^2.$$

Из этого выражения и первого начального условия из (8) находим

$$U(\xi = 0) = \left. \frac{dF}{d\xi} \right|_{\xi=0} = \sqrt{\frac{q}{2}} \frac{\sqrt{\text{Re}_s}}{\rho_n}. \quad (13)$$

Сюда присоединяются еще два начальных условия:

$$\xi = 0: \quad \omega = 0, \quad F = 0. \quad (14)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Ясно, что в рассматриваемой задаче при стационарном режиме скорость горения B совпадает с коэффициентом эрозии ε . Но так как здесь рассматриваются и нестационарные режимы горения, то следует ясно различать эти параметры. Поэтому переменную B далее будем называть коэффициентом эрозии только в случае, когда имеется в виду изменение скорости горения при изменении скорости обдува w_∞ . В нестационарных режимах скорость горения B может меняться при фиксированном значении w_∞ .

Уравнения (5)–(7) и (9), (12)–(14) решались с применением численных методов. Методика решения приведена в приложении. Для системы (5)–(7) использовалась неявная схема [24] с первым порядком точности по переменным τ и ξ . Начальные условия задавались аналитическими решениями, полученными в пределе $\beta \rightarrow 0$ и $\delta = 0$. Эти решения с измененным знаком безразмерного теплового эффекта l имеют вид [17, 25]:

$$\begin{aligned}
 -\infty < \xi \leq 0: \quad \theta_c^0 &= \theta_0 + (1 - \theta_0) \exp \xi; \\
 0 < \xi \leq \xi_f^0: \quad \theta^0 &= \theta_0 + l + (1 - \theta_0 - l) \exp \xi, \\
 &Y = 1 - (1 - Y_s^0) \exp(\xi/Le); \\
 \xi_f^0 < \xi < \infty: \quad \theta_b^0 &= \theta_0 + q + l, \quad Y = 0; \\
 B^0 = 1, \quad \xi_f^0 &= -Le \ln(1 - Y_s^0) = \ln \frac{q}{1 - l - \theta_0}, \\
 Y_s^0 &= 1 - \left(\frac{1 - \theta_0 - l}{q} \right)^{1/Le},
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

где Y_s^0 — массовая концентрация горючего газа вблизи поверхности разложения топлива (при стационарном горении).

Уравнения пограничного слоя (12)–(14) решались методом Эйлера — Крамера [24].

Для полного анализа необходимо еще привлечь связь между масштабной скоростью v_* и скоростью w_∞ на оси топливного канала. При турбулентном течении в трубе и изменении числа Рейнольдса $Re = w_\infty(x - x_s)/\nu$ от $5 \cdot 10^3$ до $3 \cdot 10^6$ выполняется [16]

$$w_\infty / \langle w \rangle = 1.3 \div 1.15.$$

В то же время имеет место другая связь между скоростями w_∞ и $\langle w \rangle$ [16]:

$$(w_\infty - \langle w \rangle) / v_* = 3.75.$$

Взяв среднее значение в первом равенстве, находим $v_* \approx 0.05w_\infty$.

Уравнения (1) записаны для вязкого подслоя, и в них не учитывается турбулентный перенос. Насколько это оправданно, можно оценить по отношению турбулентной вязкости ν_t к молекулярной ν :

$$\frac{\nu_t}{\nu} = \frac{s^2 dw}{\nu dx} = \frac{\sqrt{1 + 4Re_s^2 F^4} - 1}{2}.$$

Оно примерно равно отношению интенсивностей турбулентного переноса тепла и вещества в вязком подслое и молекулярного переноса [16, 26].

При проведении расчетов исходные теплофизические и химические параметры топлива подбирались так, чтобы зона горения располагалась в вязком подслое, где $\nu_t/\nu \ll 1$.

Эндотермическая реакция газификации топлива ($l < 0$)

Рассмотрим в качестве примера горение при следующих параметрах: $K_0 = 2.9 \cdot 10^5$; $\beta = 0.04$; $\beta_c = 0.08$; $\sigma = 0.01$; $Le = 1$; $l = -0.23$; $q = 2.8$; $\theta_0 = 0.3$; $\theta_b = 2.87$; $s_* = 2.4 \cdot 10^{-7}$ м; $Re_s = 6.86 \cdot 10^{-2}$; $p = 4.0 \cdot 10^6$ Па; $T_s^0 = 610$ К; $R_g = 300$ Дж/(кг·К); $\nu = 7.0 \cdot 10^{-5}$ м²/с; $u^0 = 5 \cdot 10^{-3}$ м/с; $\rho_c = 10^3$ кг/м³; $\alpha_c = 1.2 \cdot 10^{-7}$ м²/с; $c_c = c_p = 10^3$ Дж/(кг·К).

В первую очередь обратим внимание на уменьшение толщины ламинарного подслоя при увеличении скорости обдува w_∞ со 100 (рис. 1,а) до 200 м/с (рис. 1,б).

Если точку достижения $\nu_t/\nu = 1$ принять условно в качестве толщины ламинарного подслоя ξ_{lam} , то на рис. 1,а $\xi_{lam} \approx 5.3$ (0.15 мм), а на рис. 1,б — $\xi_{lam} \approx 2.8$ (0.08 мм). Та-

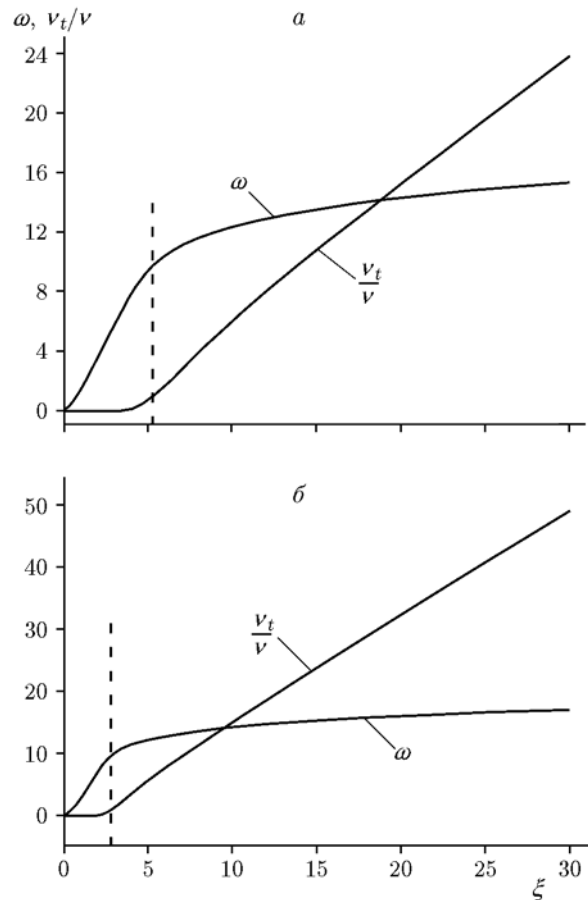


Рис. 1. Распределение гидродинамических параметров обдувающего потока: штриховая линия — $\nu_t/\nu = 1$; $w_\infty = 100$ (а), 200 м/с (б)

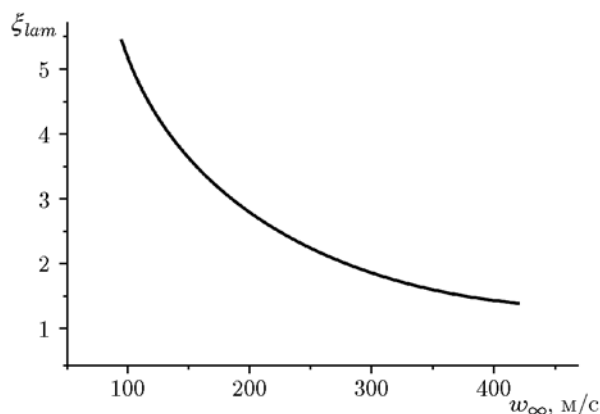


Рис. 2. Зависимость толщины ламинарного подслоя ξ_{lam} от скорости обдува w_∞

ким образом, наблюдается примерно двукратное уменьшение толщины ламинарного подслоя. Функция $\xi_{lam}(w_\infty)$, построенная по результатам численных расчетов, приведена на рис. 2. Она хорошо представляется приближенной зависимостью $\xi_{lam} \sim 1/w_\infty$.

С увеличением скорости обдува ширина зоны химической реакции ξ_f растет очень медленно, например: $\xi_f = 1.05$ и 1.19 при $w_\infty = 200$ и 300 м/с соответственно. Видно, что зависимость $\xi_f(w_\infty)$ очень слабая по сравнению с зависимостью $\xi_{lam}(w_\infty)$.

В итоге из анализа возможных функциональных зависимостей $\xi_{lam}(w_\infty)$ и $\xi_f(w_\infty)$ следует, что

$$\frac{\xi_{lam}}{\xi_f} = \frac{\text{const}}{w_\infty}.$$

При дальнейшем увеличении скорости обдува w_∞ толщина ламинарного подслоя ξ_{lam} становится меньше ξ_f . Тогда число Булгакова — Липанова $\Theta = \xi_f/\xi_{lam}$ больше 1 и пламя становится турбулентным [10, 11]. В этом случае уравнения (1) не применимы.

По мере роста w_∞ устойчивость горения ослабевает. Это видно из зависимости скорости горения B от времени τ при возрастающих значениях w_∞ (рис. 3). По мере увеличения w_∞ стационарные решения (15) все больше отклоняются от решений, отвечающих заданному значению w_∞ . Поэтому амплитуда возмущения, вызванного выбором «жестких» начальных условий (15), возрастает по мере увеличения w_∞ . «Жесткость» аналитических решений (15) привнесена разрывностью произ-

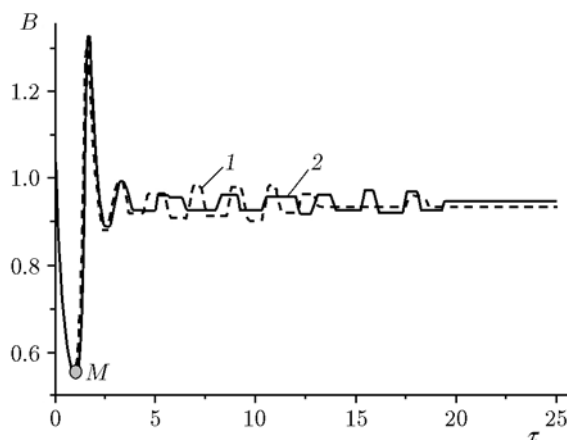


Рис. 3. Скорость горения $B(\tau)$ при $w_\infty = 375.3$ (1) и 375.4 м/с (2)

водных от функций распределения температуры и концентрации.

Точка M на рис. 3 соответствует наибольшему снижению $B = B_{\min} \approx e^{1/2}$, при котором горение еще возможно. Если скорость горения меньше B_{\min} , горение быстро прекращается.

При скорости обдува $w_\infty < 370$ м/с возникшие вначале колебания с течением времени быстро затухают. Но уже при $w_\infty > 375$ м/с длительность периода колебаний скорости горения быстро растет. Это указывает на возникновение незатухающего колебательного режима горения, но какой-либо регулярности (периодичности) в них не обнаружено. Кривые 1 и 2 на рис. 3 построены для очень мало различающихся скоростей обдува. Средняя по времени скорость горения $\langle B \rangle \approx 0.944$.

Рост скорости обдува приводит к росту амплитуды и слабому увеличению частоты колебаний, особенно на начальной стадии. При $w_\infty = 375.5$ м/с происходит потухание: сильное снижение скорости ($B < B_{\min}$) делает дальнейшее горение невозможным.

При использовании вместо аналитических решений (15) более «мягких» начальных условий можно избежать чрезмерно сильного снижения скорости горения в начальный момент времени. Это позволило бы детально исследовать свойства осциллирующих режимов горения. На рис. 3 такие режимы горения в полном виде еще не проявляются, при $\tau > 20$ горение переходит в стационарный режим, где $B = \text{const}$. Но можно найти достаточно правдоподобные значения теплофизических парамет-

ров и параметров кинетики химической реакции, при которых будут наблюдаться незатухающие режимы горения.

Колебания на рис. 3 являются низкочастотными, их период порядка единицы. На низкочастотные колебания накладываются колебания высокой частоты с очень малой амплитудой, поэтому они на рисунке не видны. Период высокочастотных колебаний порядка $\sigma = 0.01$. Взаимодействие высокочастотных процессов с низкочастотными не исследовалось, но наличие на рисунках «горизонтальных» участков и внезапно появляющихся низкочастотных изменений скорости горения указывает на такое взаимодействие.

Интервал скорости w_∞ , внутри которого удастся наблюдать незатухающие колебания, очень узкий.

Из уравнения сохранения массы, записанного для цилиндрического канала топливного заряда, получается зависимость [14, 15]

$$\langle w \rangle \approx w_\infty \approx \frac{2\rho_c u w}{a\rho} z,$$

где a — радиус канала. Для коэффициента используем формулу [11]

$$\varepsilon = \exp \left[\frac{E}{2RT_b} \left(1 - \frac{1}{1 - w_\infty^2/2w_0^2} \right) \right],$$

$$w_0 = \sqrt{c_p T_b}.$$

Критическому значению скорости $w_\infty = w_{cr}$ соответствуют отношение расстояния к радиусу $(z/a)_{cr}$ и значение $\varepsilon_{\min} = 1/\sqrt{e}$:

$$w_{cr} \approx \frac{2\rho_c u^0}{\rho\sqrt{e}} \left(\frac{z}{a} \right)_{cr},$$

$$\exp \left[\frac{E}{2RT_b} \left(1 - \frac{1}{1 - w_{cr}^2/2w_0^2} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Исключив отсюда w_{cr} , находим ($RT_b/E \ll 1$)

$$\left(\frac{z}{a} \right)_{cr} \approx \frac{\rho w_0}{\rho_c u^0} \sqrt{\frac{RT_b}{E}}.$$

Это уравнение позволяет найти начальную точку в канале, откуда может возникнуть неустойчивость за счет эффекта Вилюнова — Дворяшина.

Экзотермическая реакция газификации топлива ($l > 0$)

Рассмотрим результаты моделирования горения топлива, близкого по свойствам к пороху Н. На основе экспериментальных измерений скорости горения пороха Н, выполненных А. А. Зениным, принимается следующая формула [5]:

$$u = K \exp \left(-\frac{E_c}{2RT_s} \right),$$

где $K = 8.46$ м/с, $E_c = 19\,065$ кал/моль = 79 825 Дж/моль.

Дополнительно для пороха Н рекомендуются [5] параметры: $\rho_c = 1\,600$ кг/м³, $c_c = 1\,465$ Дж/(кг·К), $L = 556\,800$ Дж/кг, $c_p = 1\,466.5$ Дж/(кг·К), $Q = 2\,435\,300$ Дж/кг, $Le = 1$, $T_b = 2\,334$ К, $T_0 = 293$ К. Скорость химической реакции в газовой фазе

$$W = Y\rho k_0 \exp \left(-\frac{E}{RT} \right),$$

где $k_0 = 0.98 \cdot 10^{10}$ с⁻¹, $E = 44\,500$ кал/моль = 186 010 Дж/моль.

При давлении $p \approx 50$ атм температура поверхности газификации пороха Н $T_s^0 = 658$ К [5]. Тогда $l \approx 0.578$, $\theta_0 \approx 0.445$, $q \approx 2.52$. Если эти данные использовать в аналитических формулах для ширины зоны горения $\xi_f^0 = \ln \frac{q}{1-l-\theta_0}$ и концентрации горючего на по-

верхности газификации $Y_s^0 = 1 - \frac{1-\theta_0-l}{q}$, то под логарифмом окажется отрицательное число, а концентрация будет $Y_s^0 > 1$.

Обнаруженное противоречие указывает или на наличие неточностей в имеющихся данных экспериментов для пороха Н, или на неприменимость для этого пороха простой модели горения (5)–(7) с одной реакцией в газовой фазе.

Чтобы сделать возможным моделирование, изменим тепловой эффект реакции в твердой и газовой фазах: $L = 257\,000$ Дж/кг, $Q = 2\,730\,000$ Дж/кг. Такой выбор оставляет неизменной температуру пламени $T_b \approx 2\,330$ К. Это обстоятельство привносит сложности при сравнении теоретических результатов с экспериментальными данными, полученными для пороха Н. Если сказать точно, то уравнения (5)–(7) только в грубом приближении могут

описывать горение пороха Н, для которого реализуется режим распределенных в конечной по толщине зоне газозвучных реакций [5].

Так как ниже планируется сравнение результатов моделирования с данными экспериментов [1], следует подробнее остановиться на условиях проведения опытов. Схема экспериментальной установки представлена на рис. 4.

Давление в месте расположения исследуемого образца 4 авторы [1] вычисляли по теоретической формуле, в которой не учитывается сужение области течения в эрозионном насадке. В противном случае в формуле присутствовало бы отношение сечений камеры сгорания и эрозионного насадка. Базовое давление 50 атм, указанное в работе [1], соответствует месту расположения контрольного образца 7. Поэтому остающаяся неопределенность в значении давления в месте расположения исследуемого образца 4 создает еще одну сложность при сравнении результатов моделирования с опытными данными [1]. В работе [1] не проводилось прямого измерения скорости обдува w_∞ , скорее всего, из-за несовершенства или отсутствия хорошей экспериментальной техники.

В итоге моделирование выполнено при следующем наборе параметров: $K_0 = 5.5 \cdot 10^5$; $\beta = 0.03$; $\beta_c = 0.14$; $\sigma = 4.4 \cdot 10^{-3}$; $Le = 1$; $l = 0.27$; $q = 2.83$; $\theta_0 = 0.445$; $\theta_b = 3.54$; $s_* = 7.44 \cdot 10^{-7}$ м; $Re_s = 1.86 \cdot 10^{-1}$; $p = 10^6$ Па; $T_s^0 = 658$ К; $R_g = 300$ Дж/(кг·К); $\nu = 7.0 \cdot 10^{-5}$ м²/с; $u^0 = 5.73 \cdot 10^{-3}$ м/с; $\rho_c = 1.6 \cdot 10^3$ кг/м³; $\alpha_c = 4.3 \cdot 10^{-7}$ м²/с; $c_p = 1.47 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К). Результаты моделирования приведены в таблице и на рис. 5. На рисунке представлены также данные экспериментов [1]. Толщина ламинарного подслоя указана в координатах Лагран-

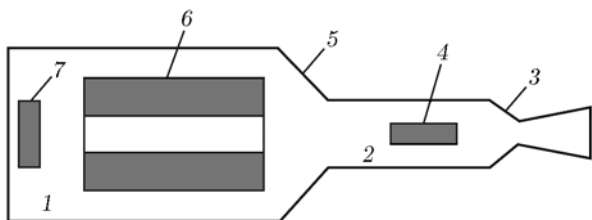


Рис. 4. Схема экспериментальной установки [1]:

1 — камера сгорания, 2 — эрозионный насадок, 3 — сверхзвуковое сопло, 4 — исследуемый образец, 5 — дозвуковое сопло, 6 — основной заряд, 7 — контрольный образец

жа ξ_{lam} и Эйлера δ_g . При стационарном горении скорость B совпадает с коэффициентом эрозии ε . Верхняя ось на рис. 5 — это число Виллюнова:

$$Vi = \frac{w_\infty \rho}{\rho_c u^0} \sqrt{\zeta},$$

где ζ — коэффициент гидродинамического сопротивления, $\zeta \approx 0.02$.

При скорости обдува $w_\infty > 385$ м/с стационарное горение становится неустойчивым и затухает после сильного снижения скорости горения, подобно тому, как показано на рис. 3.

Число Булгакова — Липанова, представляющее собой отношение ширины зоны химической реакции к толщине ламинарного подслоя:

$$\Theta = \frac{\xi_f}{\xi_{lam}} = 1.67 \cdot 10^{-2} w_\infty,$$

w_∞ , м/с	Vi	ξ_{lam} (δ_g , мм)	ξ_f	B, ε	$\Theta = \frac{\xi_f}{\xi_{lam}}$
100	2.2	1.17 (0.15)	2.28	0.988	1.95
150	3.31	0.82 (0.10)	2.29	0.982	2.79
200	4.41	0.67 (0.078)	2.32	0.97	3.46
250	5.51	0.56 (0.063)	2.35	0.95	4.20
300	6.61	0.47 (0.052)	2.39	0.915	5.09
350	7.71	0.41 (0.045)	2.45	0.87	5.98

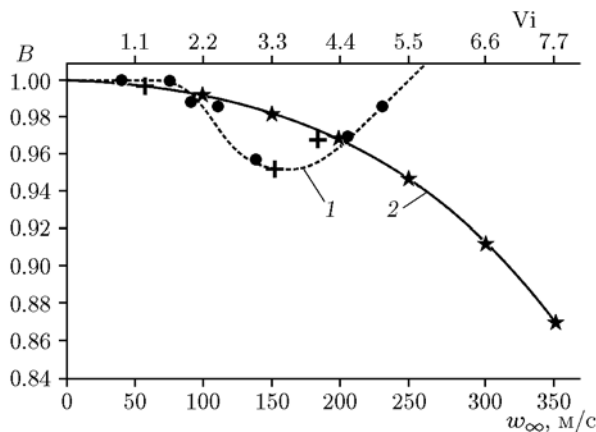


Рис. 5. Зависимость скорости горения B (коэффициента эрозии ε) от скорости обдува w_∞ : 1 — экспериментальная кривая [1], построенная интерполяцией по точкам (+, ●), 2 — теоретическая кривая, построенная по данным таблицы

превышает 1 (см. таблицу), что указывает на неприменимость уравнений (5)–(7), которые сформулированы только для ламинарного горения. Но результаты расчетов показывают, что в величину коэффициента эрозии вносит вклад снижение температуры пламени, и поэтому здесь такие результаты, полученные без учета влияния турбулентности на горение в газовой фазе, представляют интерес.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В целом, все основные результаты работ [10–13], полученные при исследовании эффекта Вилюнова — Дворяшина с помощью приближенных аналитических методов, подтверждаются численным моделированием. Эффект Вилюнова — Дворяшина снижает устойчивость горения, и это проявляется в повышении чувствительности стационарного режима к накладываемым возмущениям. По мере приближения коэффициента эрозии к минимальному значению $\varepsilon_{\min} \approx 0.61$ максимальная амплитуда колебаний скорости горения возрастает, что в дальнейшем всегда приводит к потуханию. Перед потуханием может возникнуть автоколебательный или нерегулярный режим горения.

С увеличением w_{∞} ширина зоны горения ξ_f растет, толщина ламинарного подслоя ξ_{lam} уменьшается. Совместно это приводит к росту числа Булгакова — Липанова ($\Theta \rightarrow 1$) и приближению коэффициента эрозии ε к минимальному значению, когда стационарное (ламинарное) пламя становится неустойчивым.

Расчеты коэффициента эрозии для пороха, близкого по свойствам к пороху Н, и сравнение с данными опытов [1] показали следующее:

1) наблюдается только качественное согласие по снижению скорости горения при небольшой скорости обдува;

2) существующие данные об условиях проведения экспериментов, а также данные по химическим и физическим свойствам пороха Н неполные и требуются новые исследования для их уточнения;

3) для дальнейшего изучения отрицательного эрозионного эффекта необходимо проводить более точные эксперименты и разрабатывать более точные модели горения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В решениях (15) отсутствуют параметры K_0 и β скорости химической реакции. Чтобы они соответствовали стационарным решениям уравнений (5)–(7), при фиксированном β подбиралось значение K_0 . При правильном выборе K_0 скорость $B(\tau \rightarrow \infty)$ приближается к 1. Тогда аналитические решения (15) в пределах ошибок, вносимых предельным переходом $\beta \rightarrow 0$, $K_0 \rightarrow \infty$, будут совпадать с результатами численного решения уравнений (5)–(7) при $\delta = 0$. Эта процедура позволяет контролировать точность и правильность выполнения численных расчетов на начальном этапе моделирования. Шаги интегрирования: $\Delta\xi = 0.01$ — по пространству, $\Delta\tau = \text{Cr}(\Delta\xi)^2 = 10^{-5} \div 10^{-4}$ — по времени. В интервале изменения числа Куранта $\text{Cr} = 0.1 \div 0.25$ численная схема устойчива и наблюдается сходимость по шагу $\Delta\tau$. Сходимость по шагу $\Delta\xi$ проверялась двукратным его уменьшением и сравнением результатов, выполненных при разных значениях шага $\Delta\xi$.

При применении неявной схемы к уравнениям (5)–(7) скорость химической реакции $W(\theta, Y)$ рассчитывалась по значениям температуры θ и концентрации Y с предыдущего слоя по времени.

На рис. 6 для сравнения приведены зависимости $\theta(\xi)$, $Y(\xi)$ и $W(\theta, Y)$, построенные по аналитическим формулам (15) и по результатам численного решения.

В нестационарном режиме горения правильность результатов численного решения уравнений (5)–(7) контролировалась по скорости горения B . Ее можно вычислять двумя способами: первая формула (7) приведена в постановке задачи, вторая формула получена интегрированием уравнения диффузии в системе (5):

$$B = \int_0^{\infty} \left(W(\theta, Y) + \sigma \frac{\partial Y}{\partial \tau} \right) d\xi.$$

При правильном ходе вычислений результаты расчета по двум формулам совпадают с точностью порядка $\Delta\xi$.

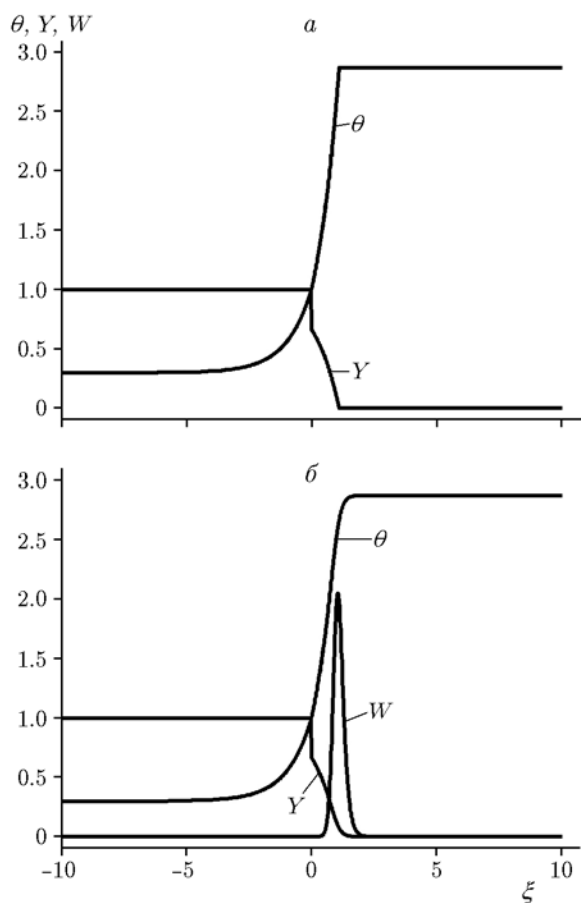


Рис. 6. Зависимости $\theta(\xi)$, $Y(\xi)$ и $W(\theta, Y)$:
 а — расчет по формулам (15), б — численный расчет; при $\xi < 0$ принято $Y = 1$

ЛИТЕРАТУРА

1. Вилюнов В. Н., Дворяшин А. А. О закономерностях горения пороха Н в потоке газа // Физика горения и взрыва. — 1971. — Т. 7, № 1. — С. 45–51.
2. Вильямс Ф. А. Теория горения. — М.: Наука, 1971.
3. Mukunda H. S. A comprehensive theory of erosive burning in solid rocket propellants // Combust. Sci. Technol. — 1978. — V. 18, iss. 3-4. — P. 105–118.
4. Гусаченко Л. К., Зарко В. Е. Эрозионное горение. Проблемы моделирования // Физика горения и взрыва. — 2007. — Т. 43, № 3. — С. 47–58.
5. Булгаков В. К., Липанов А. М. К теории горения конденсированного вещества при обдуве // Физика горения и взрыва. — 1983. — Т. 19, № 3. — С. 32–41.
6. Булгаков В. К., Липанов А. М. Модель горения твердых топлив при обдуве, учитывающая взаимодействие турбулентности с химической реакцией // Физика горения и взрыва. — 1984. — Т. 20, № 5. — С. 68–74.
7. Greatrix D. R. Model for prediction of negative and positive erosive burning // Canad. Aeronaut. and Space J. — 2007. — V. 53, N 1. — P. 13–21.
8. Srinivasan K., Narayanan S., Sharma O. P. Numerical studies on erosive burning in cylindrical solid propellant grain // Heat Mass Transfer. — 2008. — V. 44. — P. 579–585. — DOI 10.1007/s00231-007-0280-5.
9. Willcox M. A., Brewster M. Q., Tang K. C., Stewart D. S., Kuznetsov I. Solid rocket motor internal ballistics simulation using three-dimensional grain burnback // J. Propul. Power. — 2007. — V. 23, N 3. — P. 575–584.
10. Сабденев К. О. К вопросу о пороговом характере эрозионного горения // Физика горения и взрыва. — 2008. — Т. 44, № 3. — С. 61–71.
11. Сабденев К. О., Ерзада М. Механизм возникновения отрицательного эрозионного эффекта // Физика горения и взрыва. — 2013. — Т. 49, № 3. — С. 22–33.
12. Сабденев К. О., Зарко В. Е., Ерзада М. Природа и расчет скорости эрозионного горения твердого ракетного топлива // Инж. журн.: наука и инновации. — 2013. — Вып. 4(16). — URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/710.html>.
13. Сабденев К. О., Ерзада М. Аналитический расчет скорости горения при отрицательном эрозионном эффекте // Физика горения и взрыва. — 2013. — Т. 49, № 6. — С. 76–86.
14. Абугов Д. И., Бобылев В. М. Теория и расчет ракетных двигателей твердого топлива. — М.: Машиностроение, 1987.
15. Barrere M., Jaumotte A., De Veubeke B. F., Vandekerckhove J. Rocket Propulsion. — Amsterdam: Elsevier Publ. Co., 1960.
16. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1987.
17. Сабденев К. О. Неустойчивое горение твердых ракетных топлив. Проблемы и успехи моделирования. — Saarbrücken, Germany: Lambert Acad. Publ. GmbH & Co. KG, 2012.
18. Сабденев К. О., Ерзада М. Отрицательный эрозионный эффект и возникновение неустойчивого горения. 1. Анализ моделей // Физика горения и взрыва. — 2016. — Т. 52, № 1. — С. 76–83.
19. Мержанов А. Г., Дубовицкий Ф. И. К теории стационарного горения пороха // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 129. — С. 153–156.
20. Новожилов Б. В. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. — М.: Наука, 1973.
21. Denison M. R., Baum E. A simplified model of instable burning in solid propellant // AIAA Journal. — 1961. — V. 31, N 8. — P. 1112–1132.

22. **Boskovic D. M., Krstic M.** Stabilization of a solid propellant rocket instability by state feedback // Intern. J. Robust and Nonlinear Control. — 2003. — V. 13. — P. 483–495. — DOI: 10.1002/rnc.732.
23. **Sabdenov K. O., Erzada M.** The equation for prandtls mixing length // Frontiers in Aerospace Eng. — 2014. — V. 3, iss. 2. — P. 50–55.
24. **Самарский А. А., Гулин А. В.** Численные методы. — М.: Наука, 1989.
25. **Новожилов Б. В.** Влияние инерционности газовой фазы на устойчивость горения летучих конденсированных систем // Хим. физика. — 1988. — Т. 7, № 3. — С. 388–396.
26. **Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И.** Тепло-массообмен и трение в турбулентном пограничном слое. — М.: Энергоатомиздат, 1985.

*Поступила в редакцию 27/XII 2014 г.,
в окончательном варианте — 25/V 2015 г.*
