УДК 539.1

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАСТИН ПРИ ВОЗРАСТАЮЩИХ СЖИМАЮЩИХ НАГРУЗКАХ

Б. Х. Эшматов

Ташкентский институт ирригации и мелиорации, 700000 Ташкент, Узбекистан
E-mail: ebkh@mail.ru

Рассматривается задача о динамической устойчивости вязкоупругих ортотропных и изотропных пластин по обобщенной теории Тимошенко в геометрически нелинейной постановке. Задача решена с помощью метода Бубнова — Галеркина в сочетании с численным методом, основанным на использовании квадратурных формул. Показано влияние вязкоупругих и неоднородных свойств материала на процесс динамической устойчивости пластины.

Ключевые слова: теория Тимошенко, динамическая устойчивость, вязкоупругость, метод Бубнова — Галеркина.

Введение. Использование новых композиционных материалов в проектировании и создании прочных, легких и надежных конструкций требует совершенствования механических моделей деформируемых тел и разработки математических моделей их расчета с учетом реальных свойств конструкционных материалов. Как показывают многочисленные экспериментальные исследования, большинство композиционных материалов обладают ярко выраженными вязкоупругими свойствами [2–6] и являются неоднородными [6, 7].

Использование классической модели Кирхгофа — Лява хотя и позволяет получить достаточно точные решения ряда прикладных задач, однако в большинстве случаев они являются недостаточно полными [8]. Это в первую очередь относится к расчетам динамической устойчивости вязкоупругих оболочек из композиционных материалов, имеющих неоднородную анизотропную структуру [3, 6, 9]. Решению задач в такой постановке в случае упругого деформирования посвящены работы [7, 8, 10–13], в которых, однако, учитывались лишь отдельные свойства материалов конструкций.

В ряде работ вязкоупругие свойства материала учитывались только по сдвиговым направлениям (см., например, [3]). При этом в расчетах в качестве ядер релаксации принимались экспоненциальные ядра, которые не могут описать реальные процессы, происходящие в оболочках и пластинах в начальные моменты времени [14]. Выбор экспоненциального ядра в расчетах не случаен. Получаемые системы интегродифференциальных уравнений путем дифференцирования сводились к решению обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка, которые в большинстве случаев решались известным численным методом Рунге — Кутты. Ранее существовавшие методы не позволяли решать такие задачи со слабосингулярными ядрами типа ядер Колтунова, Ржаницына, Абеля, Работнова.

Благодаря разработанному численному методу [1], основанному на применении квадратурных формул, стало возможным решать системы нелинейных интегродифференциальных уравнений с сингулярными ядрами. Данный метод обеспечивает достаточно высокую точность получаемых результатов, универсален и позволяет решать широкий класс динамических задач теории вязкоупругости. На основе этого метода были получены численные результаты [2, 9], хорошо согласующиеся с экспериментальными данными.

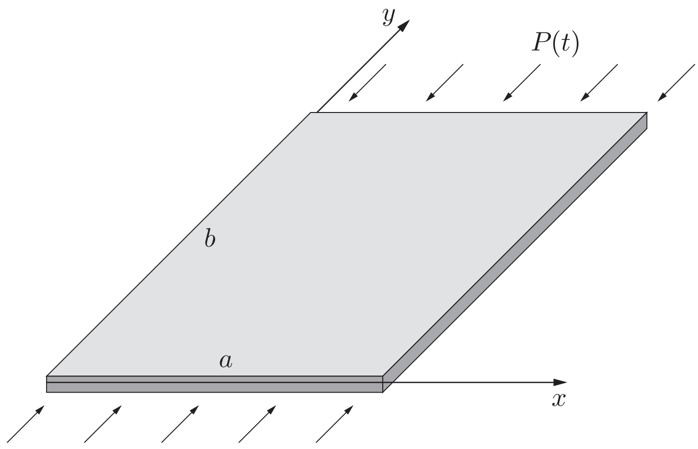

Рис. 1

Отметим, что если при решении задач динамики вязкоупругих систем в изотропной постановке в интегродифференциальных уравнениях присутствует только одно ядро релаксации с тремя различными реологическими параметрами вязкости, то в ортотропной постановке имеется 7 разных ядер, а количество различных реологических параметров увеличивается до 21, что приводит к громоздким вычислениям.

Цель данной работы — исследование динамической устойчивости вязкоупругих изотропных и ортотропных пластин на основе различных теорий и определение предела применимости этих гипотез при решении прикладных задач.

Расчет деформирования вязкоупругой изотропной прямоугольной пластины. Рассмотрим вязкоупругую изотропную прямоугольную пластину со сторонами a и b, сжатую в одном направлении вдоль стороны a (рис. 1). Примем, что усилия сжатия P возрастают пропорционально времени по закону $P(t) = vt$ (v — скорость нагружения).

Зависимость между напряжениями σ_x, σ_y, τ_{xy} и деформациями ε_x, ε_y, γ_{xy} примем в виде [8, 9]

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\,(1-R^*)(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y), \qquad x \leftrightarrow y, \qquad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\,(1-R^*)\gamma_{xy}, \tag{1}$$

где E — модуль упругости; μ — коэффициент Пуассона; R^* — интегральный оператор с ядром релаксации $R(t)$: $R^*\varphi = \int\limits_0^t R(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau$. Здесь и далее символ $x \leftrightarrow y$ показывает, что остальные соотношения получаются круговой перестановкой индексов.

Геометрические соотношения между деформациями ε_x^z, ε_y^z, γ_{xy}^z и угловыми перемещениями ψ_x, ψ_y принимаем в виде [7, 8]

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\,\frac{\partial\psi_x}{\partial x}, \qquad x \leftrightarrow y, \qquad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + z\Big(\frac{\partial\psi_x}{\partial y} + \frac{\partial\psi_y}{\partial x}\Big). \tag{2}$$

Здесь ε_x, ε_y и γ_{xy} определяются из соотношений [8]

$$\begin{gathered} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 - \Big(\frac{\partial w_0}{\partial x}\Big)^2\Big], \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2 - \Big(\frac{\partial w_0}{\partial y}\Big)^2\Big], \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial x}\,\frac{\partial w_0}{\partial y}, \end{gathered} \tag{3}$$

где $w_0 = w_0(x, y)$ — начальный прогиб пластины.

Подставляя (1) и (2) в уравнения движения элемента пластины [7, 8] и вводя функции усилия $\Phi = \Phi(x, y, t)$, получим систему интегродифференциальных уравнений относительно прогиба w, функции усилия Φ и угловых перемещений ψ_x, ψ_y

$$\begin{gathered}
\frac{K^2 E}{2(1+\mu)}\,(1-R^*)\Big(\nabla^2(w-w_0)+\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\Big)+L(w,\Phi)+\frac{q}{h}-P(t)\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\rho\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,\\
\frac{D}{h}\,(1-R^*)\Big(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\,(1+\mu)\,\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\,\partial y}+\frac{1}{2}\,(1-\mu)\,\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}\Big)-\\
-\frac{K^2 E}{2(1+\mu)}\,(1-R^*)\Big(\frac{\partial\,(w-w_0)}{\partial x}+\psi_x\Big)-\rho\,\frac{h^2}{12}\,\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}=0, \qquad x\leftrightarrow y,\\
\frac{1}{E}\,\nabla^4\Phi=-\frac{1}{2}\,(1-R^*)[L(w,w)-L(w_0,w_0)],
\end{gathered} \tag{4}$$

описывающую процесс динамической устойчивости вязкоупругой изотропной пластины [15], где h — толщина пластины; ρ — плотность материала пластины; D — цилиндрическая жесткость; $L(w,w)=2\Big[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\Big)^2\Big]$, $L(w,\Phi)=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}$; коэффициент K определен в [7, 8].

Считая, что пластина шарнирно закреплена по краям, решение системы уравнений (4), удовлетворяющее граничным условиям задачи, будем искать в виде

$$\begin{gathered}
w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} w_{nm}(t)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b},\\
w_0(x,y)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} w_{0nm}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b},\\
\psi_x(x,y,t)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \psi_{xnm}(t)\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b},\\
\psi_y(x,y,t)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \psi_{ynm}(t)\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b},
\end{gathered} \tag{5}$$

где $w_{nm}=w_{nm}(t)$, $\psi_{xnm}=\psi_{xnm}(t)$, $\psi_{ynm}=\psi_{ynm}(t)$ — неизвестные функции времени.

Подставляя выражения для прогибов w и w_0 из (5) в последнее уравнение системы (4) и приравнивая в обеих частях полученного уравнения коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, запишем функцию усилий в виде

$$\begin{aligned}
\Phi(x,y,t)=E\sum_{i,r=1}^{N}\sum_{j,s=1}^{M}(1-R^*)(w_{ij}w_{rs}-w_{0ij}w_{0rs})\Big[C_{ijrs}\cos\frac{(i+r)\pi x}{a}\cos\frac{(j+s)\pi y}{b}+\\
+A_{ijrs}\cos\frac{(i+r)\pi x}{a}\cos\frac{(j-s)\pi y}{b}+D_{ijrs}\cos\frac{(i-r)\pi x}{a}\cos\frac{(j+s)\pi y}{b}+\\
+B_{ijrs}\cos\frac{(i-r)\pi x}{a}\cos\frac{(j-s)\pi y}{b}\Big]-\frac{P(t)y^2}{2},
\end{aligned} \tag{6}$$

где безразмерные коэффициенты A_{ijrs}, B_{ijrs}, C_{ijrs}, D_{ijrs} определяются аналогично работе [9].

Подставляя (5) и (6) в первые три уравнения системы (4) и выполняя процедуру Бубнова — Галеркина, получим

$$\frac{1}{S}\,\ddot{w}_{kl}-\Big(\frac{k}{\lambda}\Big)^2 t w_{kl}+\frac{5(1-\mu)}{4\pi^2}\,\delta^2\Big[\Big(\frac{k}{\lambda}\Big)^2+l^2\Big](1-R^*)(w_{kl}-w_{okl})+$$
$$+\frac{5(1-\mu)}{4\pi^3}\,\delta^3(1-R^*)\Big[\Big(\frac{k}{\lambda}\Big)\psi_{xkl}+l\psi_{ykl}\Big]=$$
$$=\frac{16\alpha_{kl}}{kl\pi^4}\,\frac{q}{P^*_{\text{кр}}}-\frac{1}{P^*_{\text{кр}}}\sum_{n,i,r=1}^{N}\sum_{m,j,s=1}^{M}a_{klnmijrs}w_{nm}(1-R^*)(w_{ij}w_{rs}-w_{oij}w_{ors}), \tag{7}$$
$$\frac{1}{S}\,\ddot{\psi}_{xkl}+\frac{3}{\pi^2}\,\delta^2\Big[\Big(\frac{k}{\lambda}\Big)^2+\frac{1}{2}\,(1-\mu)l^2+\frac{5(1-\mu)}{\pi^2}\,\delta^2\Big](1-R^*)\psi_{xkl}+$$
$$+\frac{3}{2\pi^2}\,\delta^2(1+\mu)\frac{k}{\lambda}\,l(1-R^*)\psi_{ykl}+\frac{15(1-\mu)k}{\pi^3\lambda}\,\delta^3(1-R^*)(w_{kl}-w_{okl})=0,$$
$$x\leftrightarrow y,\qquad k,l=1,2,\ldots.$$

В (7) введены следующие безразмерные величины:

$$\frac{w_{kl}}{h},\quad \frac{w_{0kl}}{h},\quad P^*=\frac{P}{E}\Big(\frac{b}{h}\Big)^2,\quad q^*=\frac{q}{E}\Big(\frac{b}{h}\Big)^4,\quad t^*=\frac{P}{P_{\text{кр}}}=\frac{vt}{P_{\text{кр}}}=\frac{\omega t}{\sqrt{S}}=\frac{P^*}{P^*_{\text{кр}}},$$
$$\frac{\sqrt{S}}{\omega}\,R(t),\quad S=P^{*3}_{\text{кр}}\Big(\frac{\pi c E h^3}{v b^4}\Big)^2,\quad P^*_{\text{кр}}=\frac{P_{\text{кр}}}{E}\Big(\frac{b}{h}\Big)^2=\frac{\pi^2}{3(1-\mu^2)},$$

где $P_{\text{кр}}=\pi^2Eh^2/(3(1-\mu^2)b^2)$ — статическая критическая нагрузка; $\omega=\sqrt{\pi^2Eh^2P^*_{\text{кр}}/(\rho b^4)}$ — частота основного тона колебаний; $c=\sqrt{E/\rho}$ — скорость звука в материале пластины; S — безразмерный параметр скорости нагружения; $\lambda=a/b$; $\delta=b/h$; коэффициент $\alpha_{kl}=1$, если k и l нечетные, если же хотя бы один из этих параметров четный, то $\alpha_{kl}=0$; коэффициент $a_{klnmijrs}$ определяется аналогично работе [9].

Интегрирование системы (7) осуществлялось численным методом, основанным на применении квадратурных формул [1]. При расчетах использовалось простейшее и в то же время достаточно общее слабосингулярное ядро Колтунова — Ржаницына с тремя реологическими параметрами вида $R(t)=A\,\mathrm{e}^{-\beta t}\,t^{\alpha-1}$ $(0<\alpha<1)$ [14].

Результаты вычислений представлены на рис. 2–4. Здесь, как и в работе [8], в качестве критерия, определяющего критическое время, а вместе с тем и критическую нагрузку, принято условие, что стрела прогиба не должна превышать толщину пластины. В качестве параметра, определяющего устойчивость пластины, принят $K_{\text{Д}}$ — коэффициент динамичности, равный отношению динамической критической нагрузки к эйлеровой статической.

На рис. 2 приведены результаты расчета деформирования квадратной пластины $(\lambda=1)$ с начальной стрелой $w_0=10^{-4}$ при отсутствии поперечной нагрузки $(q=0)$. Кривая *1* на рисунке соответствует расчету, при котором вязкоупругие свойства материала пластины не учитываются (упругий случай), кривая *2* — результатам, полученным при экспоненциальном ядре релаксации, и кривая *3* — при ядре Колтунова — Ржаницына. Как показывают исследования, в этих случаях больших различий в значениях $K_{\text{Д}}$ нет.

Изучалось также влияние параметра β на поведение пластины. Полученные результаты показывают, что изменения параметра β в интервале $0<\beta<1$ не оказывают существенного влияния на изменение критического времени и критической нагрузки. Это говорит о неприемлемости уравнений с экспоненциальными ядрами релаксации, которые часто используются при расчетах динамических задач вязкоупругих систем.

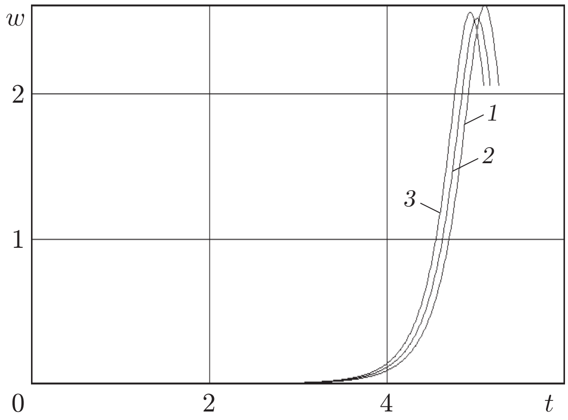

Рис. 2

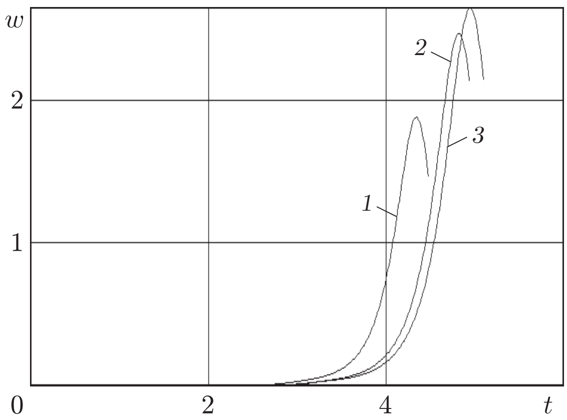

Рис. 3

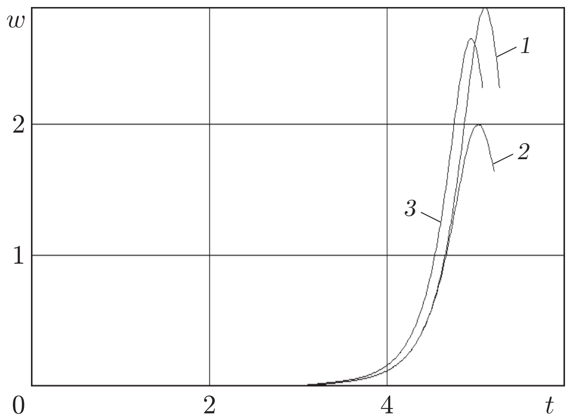

Рис. 4

На рис. 3 приведен график функции w вязкоупругой квадратной пластины для различных значений геометрического параметра δ. При $\delta = 10$, 20 и 30 (кривые *1, 2, 3* соответственно) “критические” значения $K_{Д}$ равны 4,1; 4,4; 4,5. Заметим, что увеличение параметра δ приводит к перемещению всех кривых в сторону больших значений t, следовательно, к увеличению коэффициента динамичности. Здесь и далее в расчетах будут использованы следующие исходные данные: $A = 0{,}05$; $\beta = 0{,}25$; $\alpha = 0{,}25$ (если не оговорены другие).

На рис. 4 представлено сравнение результатов, полученных для квадратной пластины при $\delta = 20$ по различным теориям: Кирхгофа — Лява (кривая *1*), Бергера (кривая *2*) и Тимошенко (кривая *3*). Как видно на рисунке, хотя результаты, полученные по гипотезам Кирхгофа — Лява и Бергера качественно отличаются друг от друга, однако критические значения $K_{Д}$ при этом одинаковы и составляют 4,7. По теории Тимошенко критическое значение составляет 4,5.

В таблице приведены результаты численного решения задачи о динамической устойчивости вязкоупругой изотропной пластины при различных геометрических и физических параметрах пластины, полученные по различным теориям. Анализ этих результатов показывает, что решения на основе теории Тимошенко дают заниженные или завышенные значения коэффициента динамичности по сравнению с полученными на основе теорий Бергера и Кирхгофа — Лява в зависимости от физико-механических и геометрических параметров пластины.

A	α	q	λ	w_0	S	δ	Значения $K_{Д}$, полученные в решениях задачи по теориям		
							Бергера	Кирхгофа — Лява	Тимошенко
0,1	0,25	0	1	10^{-4}	1	20	4,87	4,45	4,35
0,03	0,25	0	1	10^{-4}	1	20	4,92	4,82	4,92
0,05	0,25	0	1	10^{-4}	1	20	4,90	4,75	4,77
0,08	0,25	0	1	10^{-4}	1	20	4,70	4,67	4,52
0,1	0,1	0	1	10^{-4}	1	20	3,32	3,05	3,15
0,1	0,5	0	1	10^{-4}	1	20	4,92	4,80	4,75
0,1	0,75	0	1	10^{-4}	1	20	4,92	4,85	4,85
0,1	0,25	1	1	10^{-4}	1	20	3,80	3,57	3,57
0,1	0,25	10	1	10^{-4}	1	20	2,10	1,97	1,97
0,1	0,25	0	2	10^{-4}	1	20	4,25	4,37	4,37
0,1	0,25	0	1	10^{-2}	1	20	3,45	3,17	3,22
0,1	0,25	0	1	10^{-1}	1	20	3,17	2,25	2,40
0,1	0,25	0	1	10^{-4}	0,1	20	8,15	7,47	7,25
0,1	0,25	0	1	10^{-4}	0,5	20	5,85	5,12	5,05
0,1	0,25	0	1	10^{-4}	10	20	3,05	2,67	2,65
0,1	0,25	0	1	10^{-4}	1	200	4,87	4,45	4,45
0,1	0,25	0	1	10^{-4}	1	10	4,87	4,45	4,10

Расчет деформирования вязкоупругих ортотропных прямоугольных пластин. Рассмотрим ту же задачу для вязкоупругой ортотропной пластины. В этом случае соотношения между напряжениями σ_x, σ_y, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} и деформациями ε_x, ε_y, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz} запишем в следующем виде [7, 14]:

$$\begin{gathered}\sigma_x = B_{11}(1-R_{11}^*)\varepsilon_x + B_{12}(1-R_{12}^*)\varepsilon_y, \qquad x\leftrightarrow y, \qquad 1\leftrightarrow 2,\\ \tau_{xy} = 2B(1-R^*)\gamma_{xy}, \qquad \tau_{xz} = 2B_{13}(1-R_{13}^*)\gamma_{xz}, \qquad x\leftrightarrow y, \qquad 1\leftrightarrow 2,\end{gathered} \tag{8}$$

где B_{ij}, B — упругие постоянные; R_{ij}^*, R^* — интегральные операторы с ядрами релаксации $R_{ij}(t)$, $R(t)$:

$$R^*\varphi = \int_0^t R(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \qquad R_{ij}^*\varphi = \int_0^t R_{ij}(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \qquad i=1,2; \quad j=1,2,3.$$

Связь между деформациями ε_x^z, ε_y^z, γ_{xy}^z и угловыми перемещениями ψ_x, ψ_y примем в виде (2). Подставляя (2) и (8) в уравнения движения элемента пластины, получим следующую систему интегродифференциальных уравнений относительно перемещений u, v, прогиба w и угловых перемещений ψ_x, ψ_y:

$$B_{11}(1-R_{11}^*)\,\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial x} + B_{12}(1-R_{12}^*)\,\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial x} + 2B(1-R^*)\,\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial y} - \rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

$$B_{22}(1-R_{22}^*)\,\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial y} + B_{21}(1-R_{21}^*)\,\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial y} + 2B(1-R^*)\,\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial x} - \rho\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

$$-2K^2\Big[B_{13}(1-R_{13}^*)\Big(\frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi_x}{\partial x}\Big) + B_{23}(1-R_{23}^*)\Big(\frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial y^2} + \frac{\partial\psi_y}{\partial y}\Big)\Big] -$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\Big\{\frac{\partial w}{\partial x}\,[B_{11}(1-R_{11}^*)\varepsilon_x + B_{12}(1-R_{12}^*)\varepsilon_y] + 2B\,\frac{\partial w}{\partial y}\,(1-R^*)\gamma_{xy}\Big\} - \tag{9}$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\Big\{\frac{\partial w}{\partial y}\,[B_{22}(1-R_{22}^*)\varepsilon_y+B_{21}(1-R_{21}^*)\varepsilon_x]+2B\,\frac{\partial w}{\partial x}\,(1-R^*)\gamma_{xy}\Big\}-$$

$$-\frac{q}{h}+P(t)\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\rho\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,$$

$$\frac{B_{11}h^2}{12}\,(1-R_{11}^*)\,\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}+\frac{B_{12}h^2}{12}\,(1-R_{12}^*)\,\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\,\partial y}+\frac{Bh^2}{6}(1-R^*)\Big(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\,\partial y}\Big)-$$

$$-2K^2B_{13}(1-R_{13}^*)\Big(\frac{\partial\,(w-w_0)}{\partial x}+\psi_x\Big)-\frac{\rho h^2}{12}\,\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}=0,\qquad x\leftrightarrow y,\quad 1\leftrightarrow 2,$$

где ε_x, ε_y и γ_{xy} определяются из соотношений (3).

Подставляя выражения для прогибов и угловых перемещений (5), а также соотношения для перемещений u и v

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}u_{nm}(t)\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b},$$

$$v(x,y,t)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}v_{nm}(t)\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}$$

в систему (9) и применяя процедуру Бубнова — Галеркина, получим систему обыкновенных нелинейных интегродифференциальных уравнений вида

$$\frac{1}{S}\,\ddot{u}_{kl}+\Big[\frac{6\Delta\delta^2k^2}{\pi^2\lambda^2\eta}\,(1-R_{11}^*)+\frac{6g\delta^2l^2(1-\mu_1\mu_2)}{\pi^2\eta}\,(1-R^*)\Big]u_{kl}=$$

$$=-\frac{6\delta^2kl}{\pi^2\lambda\eta}\,[\Delta\mu_2(1-R_{12}^*)+g(1-\mu_1\mu_2)(1-R^*)]v_{kl}+$$

$$+\frac{6\Delta\delta}{\pi^3\lambda^3\eta}\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,j=1}^{M}ni^2\mu_{nik}\beta_{mjl}(1-R_{11}^*)(w_{nm}w_{ij}-w_{0nm}w_{0ij})+$$

$$+\frac{6\Delta\delta\mu_2}{\pi^3\lambda\eta}\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,j=1}^{M}mij\gamma_{nik}\alpha_{mjl}(1-R_{12}^*)(w_{nm}w_{ij}-w_{0nm}w_{0ij})+$$

$$+\frac{6g\delta(1-\mu_1\mu_2)}{\pi^3\lambda\eta}\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,j=1}^{M}(mij\gamma_{nik}\alpha_{mjl}+nj^2\mu_{nik}\beta_{mjl})(1-R^*)(w_{nm}w_{ij}-w_{0nm}w_{0ij}),$$

$$\frac{1}{S}\,\ddot{v}_{kl}+\Big[\frac{6\delta^2l^2}{\pi^2\Delta\eta}\,(1-R_{22}^*)+\frac{6g\delta^2k^2(1-\mu_1\mu_2)}{\pi^2\lambda^2\eta}\,(1-R^*)\Big]v_{kl}=$$

$$=-\frac{6\delta^2kl}{\pi^2\Delta\lambda\eta}\,[\mu_1(1-R_{21}^*)+\Delta g(1-\mu_1\mu_2)(1-R^*)]u_{kl}+$$

$$+\frac{6\delta}{\Delta\pi^3\eta}\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,j=1}^{M}mj^2\beta_{nik}\mu_{mjl}(1-R_{22}^*)(w_{nm}w_{ij}-w_{0nm}w_{0ij})+$$

$$+\frac{6\delta\mu_1}{\Delta\pi^3\lambda^2\eta}\sum_{n,i=1}^{N}\sum_{m,j=1}^{M}nij\alpha_{nik}\gamma_{mjl}(1-R_{21}^*)(w_{nm}w_{ij}-w_{0nm}w_{0ij})+$$

$$+ \frac{6g\delta(1-\mu_1\mu_2)}{\pi^3\lambda^2\eta} \sum_{n,i=1}^{N} \sum_{m,j=1}^{M} (nij\alpha_{nik}\gamma_{mjl} + n^2 j\beta_{nik}\gamma_{mjl})(1-R^*)(w_{nm}w_{ij} - w_{0nm}w_{0ij}),$$

$$\frac{1}{S}\,\ddot{w}_{kl} - \Big(\frac{k}{\lambda}\Big)^2 tw_{kl} + \frac{3K^2\delta^2(1-\mu_1\mu_2)}{2\pi^4\eta}\,[4g_{13}\pi^2k^2(1-R_{13}^*)w_{kl} + 4g_{13}\pi\delta k(1-R_{13}^*)\psi_{xkl} +$$

$$+ g_{23}\lambda^2 l^2(1-R_{23}^*)w_{kl} + 2g_{23}\lambda\delta l(1-R_{23}^*)\psi_{ykl}] + \frac{6\lambda^2\delta^2}{\Delta\pi^4\eta}\,(1-R_{22}^*)(w_{kl} - w_{0kl}) =$$

$$= \sum_{n,i,k=1}^{N} \sum_{m,j,l=1}^{M} w_{nm}\Big[\frac{6\Delta\delta}{\pi^3\eta}\,a_{nmijkl}(1-R_{11}^*) + \frac{3g\lambda^2\delta(1-\mu_1\mu_2)}{2\pi^5\eta}\,c_{nmijkl}(1-R^*) +$$

$$+ \frac{3\mu_1\lambda^2\delta}{2\Delta\pi^5\eta}\,f_{nmijkl}(1-R_{21}^*)\Big]u_{ij} +$$

$$+ \sum_{n,i,k=1}^{N} \sum_{m,j,l=1}^{M} w_{nm}\Big[\frac{3\Delta\mu_2\lambda\delta}{\pi^4\eta}\,b_{nmijkl}(1-R_{12}^*) + \frac{3g\lambda\delta(1-\mu_1\mu_2)}{\pi^4\eta}\,d_{nmijkl}(1-R^*) +$$

$$+ \frac{3\lambda^3\delta}{4\Delta\pi^6\eta}\,e_{nmijkl}(1-R_{22}^*)\Big]v_{ij} -$$

$$- \sum_{n,i,k,r=1}^{N} \sum_{m,j,l,s=1}^{M} w_{nm}\Big[\frac{3\Delta}{16\eta}\,h_{nmijklrs}(1-R_{11}^*) - \frac{3\Delta\mu_2\lambda^2}{64\pi^2\eta}\,p_{nmijklrs}(1-R_{12}^*) +$$

$$+ \frac{3g\lambda^2(1-\mu_1\mu_2)}{32\pi^2\eta}\,g_{nmijklrs}(1-R^*) + \frac{3\lambda^4}{256\Delta\pi^4\eta}\,q_{nmijklrs}(1-R_{22}^*) -$$

$$- \frac{3\mu_1\lambda^2}{64\Delta\pi^2\eta}\,r_{nmijklrs}(1-R_{21}^*)\Big](w_{ij}w_{rs} - w_{0ij}w_{0rs}) - \qquad (10)$$

$$- \sum_{n,i,k=1}^{N} \sum_{m,j,l=1}^{M} \Big[\frac{3\lambda^3\delta}{4\Delta\pi^6\eta}\,mj\beta_{nik}\alpha_{mjl}(1-R_{22}^*) +$$

$$+ \frac{3\mu_1\lambda\delta}{\Delta\pi^4\eta}\,ni\alpha_{nik}\beta_{mjl}(1-R_{21}^*)\Big](w_{nm}w_{ij} - w_{0nm}w_{0ij}) +$$

$$+ \sum_{n,i,k=1}^{N} \sum_{m,j,l=1}^{M} w_{nm}\Big[\frac{6\Delta\mu_2\lambda\delta}{\pi^4\eta}\,s_{nmijkl}(1-R_{12}^*) + \frac{3\lambda^3\delta}{2\Delta\pi^6\eta}\,x_{nmijkl}(1-R_{22}^*)\Big](w_{ij} - w_{0ij}) -$$

$$- \frac{3\lambda^2\delta^2 l}{\Delta\pi^4\eta}\,(1-R_{22}^*)v_{kl} - \frac{6\mu_1\lambda\delta^2 k}{\Delta\pi^3\eta}\,(1-R_{21}^*)u_{kl} + \frac{96\alpha_{kl}(1-\mu_1\mu_2)}{\pi^6\eta kl}\,q,$$

$$\frac{1}{S}\,\ddot{\psi}_{xkl} + \frac{6\Delta\delta^2k^2}{\pi^2\eta}\,(1-R_{11}^*)\psi_{xkl} + \frac{3\Delta\mu_2\lambda\delta^2 kl}{\pi^3\eta}\,(1-R_{12}^*)\psi_{ykl} +$$

$$+ \frac{3g\lambda^2\delta^2 l^2(1-\mu_1\mu_2)}{2\pi^4\eta}\,(1-R^*)\psi_{xkl} + \frac{3g\lambda\delta^2 kl(1-\mu_1\mu_2)}{\pi^3\eta}\,(1-R^*)\psi_{ykl} +$$

$$+ \frac{72K^2g_{13}\delta^3k(1-\mu_1\mu_2)}{\pi^3\eta}\,(1-R_{13}^*)w_{kl} + \frac{72K^2g_{13}\delta^4(1-\mu_1\mu_2)}{\pi^4\eta}\,(1-R_{13}^*)\psi_{xkl} = 0,$$

$$\frac{1}{S}\,\ddot{\psi}_{ykl}+\frac{3\lambda^2\delta^2 l^2}{2\Delta\pi^4\eta}\,(1-R_{22}^*)\psi_{ykl}+\frac{3\mu_1\lambda\delta^2 kl}{\Delta\pi^3\eta}\,(1-R_{21}^*)\psi_{xkl}+$$

$$+\frac{3g\lambda\delta^2 kl(1-\mu_1\mu_2)}{\pi^3\eta}\,(1-R^*)\psi_{xkl}+\frac{6g\delta^2 k^2(1-\mu_1\mu_2)}{\pi^2\eta}\,(1-R^*)\psi_{ykl}+$$

$$+\frac{36K^2 g_{23}\lambda\delta^3 l(1-\mu_1\mu_2)}{\pi^4\eta}\,(1-R_{23}^*)w_{kl}+\frac{72K^2 g_{23}\delta^4(1-\mu_1\mu_2)}{\pi^4\eta}\,(1-R_{23}^*)\psi_{ykl}=0,$$

$$k,l=1,2,\ldots\,.$$

В (10) введены следующие безразмерные величины:

$$\frac{w_{kl}}{h},\quad \frac{w_{0kl}}{h},\quad \frac{u_{kl}}{h},\quad \frac{v_{kl}}{h},\quad P^*=\frac{P}{\sqrt{E_1E_2}}\Big(\frac{b}{h}\Big)^2,\quad q^*=\frac{q}{\sqrt{E_1E_2}}\Big(\frac{b}{h}\Big)^4,$$

$$t^*=\frac{P}{P_{\text{кр}}}=\frac{vt}{P_{\text{кр}}}=\frac{\omega t}{\sqrt{S}}=\frac{P^*}{P_{\text{кр}}^*},\quad \frac{\sqrt{S}}{\omega}\,R(t),\quad \frac{\sqrt{S}}{\omega}\,R_{ij}(t),\quad i=1,2,\quad j=1,2,3,$$

$$S=P_{\text{кр}}^{*3}\Big(\frac{\pi c\sqrt{E_1E_2}\,h^3}{vb^4}\Big)^2,\quad P_{\text{кр}}^*=\frac{P_{\text{кр}}}{\sqrt{E_1E_2}}\Big(\frac{b}{h}\Big)^2=\frac{\pi^2}{6(1-\mu_1\mu_2)}\,\eta,$$

где $P_{\text{кр}}=\pi^2\sqrt{E_1E_2}h^2\eta/(6(1-\mu_1\mu_2)b^2)$ — статическая критическая нагрузка; $c=\sqrt{\sqrt{E_1E_2}/\rho}$; $\omega=\sqrt{\pi^2\sqrt{E_1E_2}\,h^2P_{\text{кр}}^*/(\rho b^4)}$; $\Delta=\sqrt{E_1/E_2}$; $g=G/\sqrt{E_1E_2}$; $\eta=1+\Delta\mu_2+2(1-\mu_1\mu_2)g$; E_1, E_2 — модули упругости, μ_1, μ_2 — коэффициенты Пуассона, удовлетворяющие условию $E_1\mu_2=E_2\mu_1$; остальные коэффициенты этой системы приведены в [9].

Интегрирование системы (10) также проводилось численным методом, основанным на применении квадратурных формул [1].

На рис. 5 и 6 приведены результаты расчетов деформирования вязкоупругой ортотропной квадратной пластины с учетом деформации сдвига и инерции вращения при $\Delta=1{,}5$ и $\delta=20$.

На рис. 5 представлены зависимости $w(t)$ для различных вязкоупругих свойств материала конструкции. Кривая *1* соответствует случаю, когда вязкоупругие свойства материала не учитываются ($A=A_{ij}=0$, $i=1,2$; $j=1,2,3$ — упругий случай), кривая *2* — случаю (применяемому в работе [3] при исследовании вязкоупругих ортотропных конструкций $A=A_{13}=A_{23}=0$), когда вязкоупругие свойства материала учитываются только по сдвиговым направлениям, и кривая *3* — случаю, когда вязкоупругие свойства материала учитываются одинаково по всем направлениям ($A=A_{ij}=0{,}1$, $i=1,2$, $j=1,2,3$). Как видно на рисунке, результаты, полученные в упругом случае, почти совпадают с результатами, полученными в случае учета вязкоупругих свойств материала только по сдвиговым направлениям. Кроме того, учет вязкоупругих свойств материала приводит к более раннему интенсивному возрастанию прогибов соответственно уменьшению критических значений $K_{\text{Д}}$.

На рис. 6 приведены зависимости $w(t)$ для различной степени анизотропии материала пластины. Как видно на рисунке, увеличение параметра Δ, определяющего степень анизотропии (кривая *1* — $\Delta=1$; кривая *2* — $\Delta=2$ и кривая *3* — $\Delta=3$), приводит к более позднему интенсивному возрастанию прогибов соответственно увеличению критического значения $K_{\text{Д}}$. Аналогичные результаты наблюдаются в экспериментах, проведенных с участием конструкций из композитных материалов [8]. Это подтверждает обоснованность выбранного метода и достоверность полученных результатов.

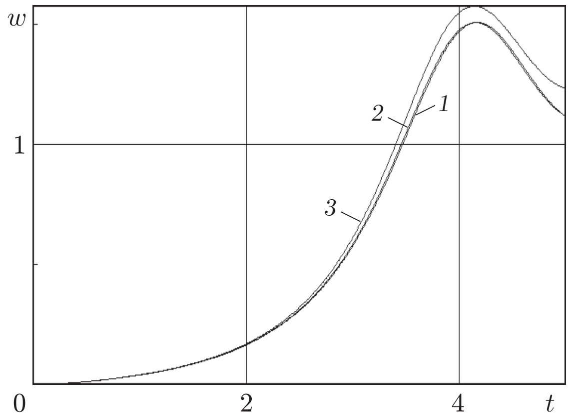

Рис. 5

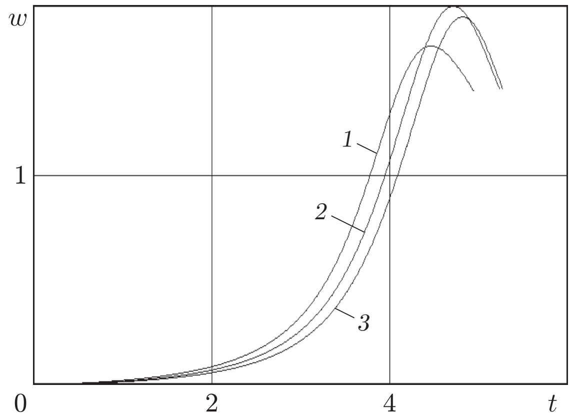

Рис. 6

Выводы. Исследования нелинейных динамических задач об устойчивости изотропных и ортотропных вязкоупругих пластин показывают, что при расчете вязкоупругих конструкций вязкоупругие свойства материала необходимо учитывать не только по сдвиговым, но и по остальным направлениям одновременно;

в качестве ядер релаксации, учитывающих вязкоупругие свойства материала конструкции, следует брать ядра типа Колтунова — Ржаницына, содержащие достаточное количество реологических параметров;

в зависимости от различных геометрических и физических параметров пластин необходимо выбрать соответствующие теории, согласующиеся с экспериментальными результатами: теорию Бергера, классическую теорию Кирхгофа — Лява или уточненную теорию Тимошенко.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бадалов Ф. Б., Эшматов Х., Юсупов М.** О некоторых методах решения систем интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, № 5. С. 867–871.
2. **Бадалов Ф. Б., Эшматов Х., Акбаров У. Й.** Устойчивость вязкоупругих пластин при динамических нагрузках // Прикл. механика. 1991. Т. 27, № 9. С. 892–899.
3. **Bogdanovich A. E.** Nonlinear dynamic problems for composite cylindrical shells. N. Y.: Elsevier science publishers, 1993.
4. **Sun Y. X., Zhang S. Y.** Chaotic dynamic analysis of viscoelastic plates // Intern. J. Mech. Sci. 2001. V. 43. P. 1195–1208.
5. **Touati D., Cederbaum G.** Influence of large deflections on the dynamic stability of nonlinear viscoelastic plates // Acta Mech. 1995. V. 113. P. 215–231.
6. **Cederbaum G.** Dynamic instability of viscoelastic orthotropic laminated plates // Composite Struct. 1991. V. 19. P. 131–144.
7. **Ambartsumyan S. A.** Theory of anisotropic plates. Stamford: Technomic, 1970.
8. **Вольмир А. С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
9. **Eshmatov B. Kh.** Nonlinear vibrations of viscoelastic orthotropic plates from composite materials // Proc. of the 3rd M.I.T. conf. on computational fluid and solid mechanics, Boston (USA), 14–17 June, 2005. Cambridge: Cambridge Univ., 2005. P. 93.
10. **Shirakawa K.** Effects of shear deformation and rotary inertia on vibration and buckling of cylindrical shells // J. Sound and Vibration. 1983. V. 91, N 3. P. 425–437.

11. **Wang X.** Numerical analysis of moving orthotropic thin plates // Computers and Struct. 1999. V. 70. P. 467–486.
12. **Awrejcewicz J., Krys'ko A. V.** Analysis of complex parametric vibrations of plates and shells using Bubnov — Galerkin approach // Arch. Appl. Mech. 2003. V. 73. P. 495–504.
13. **Kubenko V. D., Koval'chuk P. S.** Influence of initial geometric imperfections on the vibrations and dynamic stability of elastic shells // Intern. Appl. Mech. 2004. V. 40, N 8. P. 847–877.
14. **Колтунов М. А.** Ползучесть и релаксация. М.: Высш. шк., 1976.
15. **Эшматов Б. Х.** Математическая модель задачи о нелинейных колебаниях и динамической устойчивости вязкоупругих ортотропных оболочек с учетом деформации сдвига и инерции вращения // Докл. АН Республики Узбекистан. 2005. № 1. С. 13–16.

Поступила в редакцию 18/V 2005 г.