

- Рыбалов А. М. Импульсный CO_2 -лазер с энергией излучения 5 кДж. — «Письма в ЖТФ», 1976, т. 2, вып. 5.
3. Оршич А. М., Пономаренко А. Г., Посух В. Г., Солоухин Р. И., Шаламов С. П. Компактный электроионизационный лазер на CO_2 с энергией излучения 1 кДж. — «Письма в ЖТФ», 1977, т. 3, вып. 1.
 4. Boyer K. Los Alamos Scientific Laboratory, Presentation at Japan-US Seminar on Laser Interaction with Matter. Kyoto. September 24—29, 1972.
 5. Locke E. V., Hoag E. D., Hella R. A. Deep penetration welding with high-power CO_2 -lasers. — «IEEE J. Quant. Electron.», 1972, QE—8, N 2.
 6. Афонин Ю. В., Долгов-Савельев Г. Г., Козоровицкий Л. Л., Оршич А. М., Орлов В. К., Пономаренко А. Г. О влиянии магнитного поля на объемный разряд, возбуждаемый электронным пучком. Препринт ИТПМ СО АН СССР, 1977.
 7. Boyer K., Henderson D. B., Morse R. L. Spatial distribution of ionization in electron-beam-controlled discharge lasers. — «J. Appl. Phys.», 1973, vol. 44, N 12.
 8. Афонин Ю. В., Пономаренко А. Г., Солоухин Р. И., Хапов Ю. И. Компактный импульсный ускоритель электронов с автономным питанием. — ПТЭ, 1973, № 5.
 9. Басов Н. Г., Данилычев В. А., Беленов Э. М., Сучков А. Ф. Электроионизационные лазеры на сжатом углекислом газе. — УФН, 1974, т. 114, вып. 2.
 10. Басов Н. Г., Данилычев В. А., Ионин А. А., Ковш И. Б., Соболев В. А., Сучков А. Ф., Урин Б. М. Исследование энергетических параметров электроионизационных CO_2 -лазеров. — «Квант. электроника», 1975, т. 2, № 11.

УДК 533.951.8

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНТРАГИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЫ

В. И. Артемов, О. А. Синкевич

(Москва)

Перегревная неустойчивость (ПН) в неравновесной однородной плазме связана с ионизационной неустойчивостью электронного газа, при этом потери энергии за счет столкновения с тяжелыми частицами не могут уравновесить флуктуации Джоулева тепловыделения. Критерием развития ПН в неравновесной плазме является условие $d \ln \tau_e / d \ln T_e > 1/2$, τ_e — время потери импульса при столкновении электрона с тяжелыми частицами [1, 2]. ПН развивается и в случае, когда потери энергии электронным газом определяются излучением [3—6], теплообменом со стенками [4, 7], неупругими потерями [2].

Перегревная неустойчивость при нелинейном развитии приводит к образованию структур с неоднородными распределениями тока и электронной температуры, которые представляют собой слои в плоском случае или шнуры в цилиндрическом случае с повышенными плотностью тока и электронной температурой. Теория таких структур в полупроводниках — узкие и широкие домены — построена в работах [8—10]. Аналогичные структуры (контрагированное состояние разряда) в плазме газового разряда исследовались в работах [4, 7, 11—13]. В контрагированном состоянии разряд занимает ограниченную область, при этом наблюдается режим с нормальной плотностью тока, плотность тока не зависит от полного тока. Эксперименты [14] подтверждают выводы теории. Развитие перегревной неустойчивости в равновесной плазме [15, 16] может приводить также к появлению нестационарных структур [17].

Для объяснения ряда экспериментальных фактов необходимо выяснить вопрос об устойчивости неоднородного распределения тока, а в случае неустойчивости вопрос о характерном времени ее развития — время существования неоднородного состояния. Устойчивость неоднородного распределения тока исследовалась в работах [8—10, 18, 19], где показано, что плоский узкий домен, у которого ширина шнура одного порядка с толщиной стенки шнура, неустойчив, а широкий плоский домен с шириной шнура гораздо больше толщины стенки устойчив при достаточно большом сопротивлении внешней цепи (режим заданного тока). Неустойчивость плоского узкого домена приводит к разбиению его на цилиндрические узкие домены, которые являются устойчивыми [8].

Исследования работы [8] ограничены возмущениями, однородными в направлении основного тока ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}_0 = 0$, (\mathbf{k} — волновой вектор возмущения, \mathbf{j}_0 — вектор невозмущенного тока с граничными условиями $\partial T'_e / \partial \eta^0 = 0$, T'_e — возмущение электронной температуры, η^0 — нормаль к границе образца).

В данной работе рассматривается построение неоднородных распределений тока и температуры, когда потери энергии электронного газа определяются упругими столкновениями с тяжелыми частицами и исследуется устойчивость этих распределений тока относительно трехмерных возмущений. В отличие от [4, 8] рассматривается более широкий класс граничных условий для электронной температуры $L(S, \nabla S, E) = 0$ (в [4, 8] использовалось условие $\partial T'_e / \partial \eta = 0$ на стенке). Для построения решений и исследования устойчивости используется метод сингулярных разложений [20].

1. Предположим, что концентрация электронов n и их температура T связаны уравнением Саха. Рассмотрим сильно неравновесную ($T \gg \gg T_a$) плазму, в которой содержится присадка легкоионизирующегося компонента. В этом случае система уравнений среды [21] в безразмерном виде сводится к следующей:

$$(1.1) \quad C \partial S / \partial t + \Lambda U \nabla \Phi \nabla S = \Lambda^2 \nabla^2 S + \sigma (\nabla \Phi)^2 - F_-, \\ \nabla^2 \Phi + (d \ln \sigma / dS) \nabla \Phi \nabla S = 0,$$

где $U = T^{-1}(a_T - 3/2)$; $C = (\tau T)^{-1} [3/2 \cdot \epsilon + a_T(T^{-1} + 3/2 \cdot \epsilon)]$; $a_T = = \partial \ln n / \partial \ln T$; $F_- = n T \tau^{-1}$; λ , σ — безразмерные коэффициенты электронной теплопроводности и электропроводности соответственно ($\lambda = \sigma T$); τ — безразмерное время потери импульса; S — потенциал теплопроводности ($dS = \lambda dT$); Φ — обобщенный потенциал электрического поля, связанный с электрическим полем \mathbf{E} соотношением

$$\nabla \Phi = \mathbf{E} + \Lambda(1 + a_T) \nabla T.$$

В качестве линейного масштаба в системе (1.1) принят характерный размер области b , масштаба времени величина $In^* \sigma^* / (\sigma^* E^*)^2$. Если коэффициент теплопроводности электронов удовлетворяет закону Видемана — Франца, то

$$\Lambda = k \sigma^* T^* / (e j^* b), \quad \epsilon = k T^* / I,$$

где I — потенциал ионизации, остальные обозначения те же, что и в работе [20].

Будем искать решение системы (1.1) в области $R = \{-1 \leq x \leq 1, -l_y \leq y \leq l_y\}$ на плоскости (x, y) , часть границы которой $\bar{R}_1 = \{y = = \pm l_y\}$ — идеально проводящие электроды, а часть $\bar{R}_2 = \{x = \pm 1\}$ — изоляторы, с граничными условиями (η^0 — вектор, нормальный к изолятору, χ^0 — вектор, лежащий в плоскости электрода):

$$(1.2) \quad \partial \Phi / \partial \chi^0 = \Lambda(1 + a_T) \partial T / \partial \chi^0 \text{ на } \bar{R}_1, \quad \partial \Phi / \partial \eta^0 = 0 \text{ на } \bar{R}_2, \\ S = S_r(\bar{R}), \quad \bar{R} = \bar{R}_1 \cup \bar{R}_2.$$

Все дальнейшие рассуждения можно провести, не конкретизируя вид граничного условия для потенциала теплопроводности. При построении стационарного решения в случае $\Lambda \ll 1$ (что выполняется для большинства задач) можно использовать метод, предложенный в [20]. Решение задачи представляется в виде двух разложений по малому параметру Λ : внешнего разложения

$$(1.3) \quad T = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k T_k(x, y), \quad \Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k \Phi_k(x, y)$$

и внутреннего

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k \Theta_k(x^*, y^*), \quad E = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k E_k(x^*, y^*),$$

где $x^* = x/\Lambda$, $y = y^*$ или $x^* = x$, $y = y/\Lambda$.

При построении плоских стационарных решений уравнений внутреннего разложения в замкнутой области решения могут быть двух типов: решения типа пограничного слоя у границы \bar{R} и решения типа стоячих волн ионизации, расположенных внутри области R . Для существования последних необходимо, чтобы функция

$$F(S) = \sigma(S)E^2 - F_-(S)$$

имела три нуля. Это условие выполняется, если

$$a_\tau \equiv d \ln \tau / d \ln T > 1/2.$$

Первый нуль связан с ионизацией присадки, второй — с влиянием кулоновских столкновений, третий — с ионизацией основного газа. Построение нулевого приближения внутреннего разложения рассмотрено в работе [20], поэтому здесь этот вопрос не будет рассматриваться.

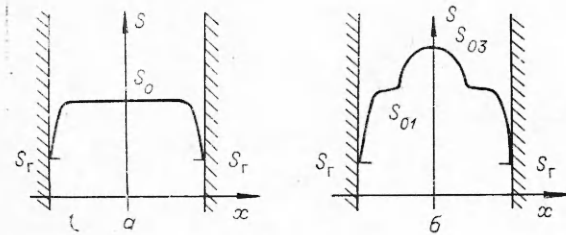
Уравнения внешнего разложения можно получить, подставив (1.4) в (1.1) и собрав члены при одинаковых степенях Λ . В нулевом приближении система (1.1) в стационарном случае сводится к квазилинейному уравнению относительно функции Φ_0 . При этом используются только электродинамические граничные условия. Частным решением этой системы является однородное решение ($E_{x_0} = \text{const}$, $E_{y_0} = \text{const}$), которое применяется для построения решения. В этом случае потенциал теплопроводности также однороден, он находится из решения $F(S_0) = 0$. Стационарное решение строится путем сшивания внутреннего и внешнего разложений. Поскольку область изменения потенциала теплопроводности в волне ионизации и в пограничном слое $\sim \Lambda$, при стремлении $\Lambda \rightarrow 0$ пограничный слой и волну ионизации можно рассматривать как разрывы, и поэтому решения с волнами ионизации будем называть разрывными.

В зависимости от параметров внешней цепи могут возникать два типа стационарных решений: непрерывные и разрывные. Первые представляют собой однородные решения ($S_0 = \text{const}$, $E_{y_0} = \text{const}$, $E_{x_0} = 0$) почти во всей области R (внешней области решения), за исключением узких областей толщиной $\sim \Lambda$ у границы (область пограничного слоя), где потенциал S_0 резко изменяется от значения во внешней области до граничного значения S_τ (пример такого распределения потенциала приведен на фиг. 1, а). Вольт-амперная характеристика (ВАХ) такого решения изображена штриховыми линиями на фиг. 2, здесь

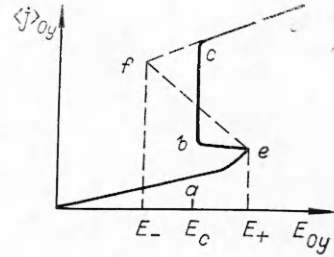
$$\langle j_{0y} \rangle = \int_{-1}^1 j_{0y} dx_x$$

ВАХ является неоднозначной по полю E_{y_0} , поскольку $S_0(E_{y_0})$ — неоднозначная функция (на участке ef (фиг. 2) $d \ln \tau / d \ln T > 1/2$).

Разрывные решения — это одна или несколько стационарных слоевых волн. Слойная волна — совокупность двух волн ионизации (по терминологии



Фиг. 1



Фиг. 2

гии [8] — широких доменов) или стационарных солитонов (узких доменов) во внешней области. Плоскость волн параллельна изоляторам. Слойная волна представляет собой три однородных решения (S_{01} , S_{03} , S_{01} , фиг. 1, б), связанных между собой двумя узкими ($\sim \Lambda$) зонами резкого изменения потенциала от S_{01} до S_{03} и от S_{03} до S_{01} (волны ионизации). На ВАХ (фиг. 2) слоевой волне соответствует участок bc , а солитонам — eb . Поскольку непрерывная структура волны ионизации существует только при вполне определенном поле E_c , ВАХ слоевой волны есть прямая, параллельная оси $\langle j_{0y} \rangle$. Значение поля E_c можно определить из условия [4]

$$\int_{S_{01}(E_c)}^{S_{03}(E_c)} F(S, E_c) dS = 0.$$

Структура стационарных решений существенно зависит от типа граничных условий для S на изоляторе.

Как показано в [20], распределению потенциала S в пограничном слое соответствует на фазовой плоскости (dS/dx^* , S) фазовая траектория, выходящая из особой точки $(0, S_0)$ и идущая до $S = S_r$. Рассмотрим наиболее реальный случай $S_r < S_0$. Поскольку особая точка $(0, S_0)$ для значений S_0 , удовлетворяющих неравенству

$$a_{\tau_0} > 1/2,$$

является центром, в этом случае стационарной структуры пограничного слоя на изоляторах не существует. Поэтому участок ef на ВАХ (см. фиг. 2) не реализуется. Для значений S_0 , соответствующих участку fc , фазовая траектория, выходящая из $(0, S_0)$, не может достигнуть значения $S = S_r$, поэтому этот участок ВАХ также не реализуется. Учет медленных изменений параметров тяжелых частиц может приводить к эволюции полученных стационарных структур для электронов и электродинамических величин.

2. Рассмотрим устойчивость одномерных распределений тока (электрического поля) и температуры (это соответствует случаю $l_y \rightarrow \infty$). Пусть канал, безграничный в направлении осей y и z , ограничен в направлении оси x ($x = \pm 1$) изоляторами, невозмущенное поле направлено по оси y . Если распределение тока и температуры однородно во внешней области, то, используя метод, предложенный в [22], и представляя зависимость возмущений от времени и координат y и z в виде $\sim \exp(ik_y y + ik_z z - \omega t)$, можно получить из дисперсионного уравнения (в качестве масштаба поля выбрано невозмущенное поле, в качестве характерной длины — полуширина канала) следующее соотношение:

$$(2.1) \quad \operatorname{Re} \omega = \frac{1}{C_0 \left[1 + \left(\frac{2k}{\pi m} \right)^2 \right]} \left\{ 1 - 2a_{\tau_0} + 2\Lambda^2 k^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{2k}{\pi m} \right)^2 \left[2(a_{T_0} + a_{\tau_0}) + \frac{k^2}{k_y^2} (1 - 2a_{\tau_0} + \Lambda^2 k^2) \right] \right\}, \\ \operatorname{Im} \omega = \Lambda k_y (a_{T_0} - 3/2), \quad k = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Здесь C_0 , a_{T_0} , a_{τ_0} — значения функций, определенных в уравнении (1.1), взятых при невозмущенных параметрах. При получении (2.1) пограничный слой не учитывался и граничные условия задавались на границе пограничного слоя, поскольку при $\Lambda \ll 1$ дисперсионное соотношение слабо зависит от типа граничных условий для возмущений на изоляторе [22].

Если $\partial S_0 / \partial x = 0$ при $x = +1$, то однородные состояния с $a_{\tau_0} > 1/2$ неустойчивы, при этом наиболее быстро развиваются возмущения с $k = 0$. Если $\partial S_0 / \partial x \neq 0$ при $x = +1$, то однородные состояния устойчивы, поскольку состояния с $a_{\tau_0} > 1/2$ не реализуются.

Для неоднородных распределений тока и температуры во внешней области (для разрывных решений) представим (ниже для простоты $C_0 = \text{const}$)

$$(2.2) \quad S = S_0(\xi) + \Theta(\xi) \exp\left(ik_y y + ik_z z - \frac{\omega}{C_0} t\right), \\ \Phi = E_{y0} y + \Lambda \Psi(\xi) \exp\left(ik_y y + ik_z z - \frac{\omega}{C_0} t\right),$$

где $\xi = x/\Lambda$; нижний индекс относится к невозмущенному решению; Θ и $\Lambda \Psi$ — малые величины (Θ и $\Lambda \Psi$ — величины одного порядка). Подставив (2.2) в (1.1) и отбросив нелинейные члены, сведем исследование устойчивости неоднородного состояния к следующей задаче на собственные значения:

$$(2.3) \quad H_1 \Psi = -i \Lambda k_y E_{y0} \frac{d \ln \sigma_0}{d S_0} \Theta, \\ (H_0 + \omega) \Theta = H_2 \Psi + \Lambda^2 k^2 \Theta + i \Lambda k_y E_{y0} U_0 \Theta,$$

где $H_1 = \frac{1}{\sigma_0(\xi)} \frac{d}{d\xi} \sigma_0(\xi) \frac{d}{d\xi} - \Lambda^2 k^2$; $H_0 = \frac{d^2}{d\xi^2} - V(\xi)$;

$$H_2 = U_0 \frac{d S_0}{d \xi} \frac{d}{d \xi} - 2i \Lambda k_y \sigma_0(\xi) E_{y0};$$

$$V(\xi) = -\frac{d}{d S_0} (\sigma_0 E_{y0}^2 - F_{-0});$$

$k = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$ с граничными условиями

$$(2.4) \quad \xi = \pm \Lambda^{-1}, \quad \frac{d\Psi}{d\xi} = 0, \quad a_1 \frac{d\Theta}{d\xi} + ik_y a_3 \Lambda \Psi + a_2 \Theta = 0.$$

Здесь постоянные a_1 , a_2 , a_3 связаны с оператором L соотношениями

$$a_1 = \left[\frac{\partial L}{\partial (\nabla S)} \right]_{\nabla \Phi, S}, \quad a_2 = \left[\frac{\partial L}{\partial S} \right]_{\nabla S, \nabla \Phi}, \quad a_3 = \left[\frac{\partial L}{\partial (\nabla \Phi)} \right]_{\nabla S, S}.$$

Рассмотрим задачу об устойчивости неоднородного распределения тока в случае $k_y \sim k_z \sim 1$, $a_3 = 0$, $\Lambda \ll 1$. Если ввести функцию Грина уравнения

$$H_1 G(\xi, \eta) = \delta(\xi, \eta), \quad \left. \frac{\partial G}{\partial \xi} \right|_{\xi = \pm \Lambda^{-1}} = 0$$

(здесь $\delta(\xi - \eta)$ — дельта-функция Дирака), то систему (2.3) можно свести к одному интегро-дифференциальному уравнению для функции Θ

$$(2.5) \quad (H_0 + \omega)\Theta = -H_2 \left[i\Lambda k_y E_{y0} \int_{-\Lambda^{-1}}^{\Lambda^{-1}} G(\xi, \eta) \frac{d \ln \sigma_z}{dS_z} \times \right. \\ \left. \times \Theta(\eta) d\eta \right] + i\Lambda k_y E_{y0} U_0 \Theta + \Lambda^2 k^2 \Theta, \\ \xi = \pm \Lambda^{-1}, \quad a_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} + a_2 \Theta = 0.$$

Поскольку система $H_1 \Psi = 0$, $d\Psi/d\xi(\pm\Lambda^{-1}) = 0$ имеет только тривиальное решение, функция Грина всегда существует и единственна [23]. Функция Грина удовлетворяет следующим условиям:

$$G(\xi, \eta, k) < 0, \quad -\Lambda^{-1} \leq \xi, \eta \leq \Lambda^{-1}, \\ G \sim O(\Lambda^{-1}), \quad \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right)_\eta \sim O(1)$$

и с точностью до членов $\sim \Lambda$ имеет вид

$$(2.6) \quad G(\xi, \eta, k) = -\frac{1}{\Lambda k} \frac{\text{ch}(k\Lambda\eta - k) \text{ch}(k\Lambda\xi + k)}{\text{sh}(2k)}, \quad \xi < \eta.$$

Для $\xi > \eta$ функция Грина получается из (2.6) перестановкой ξ и η .

Исходная система (2.3) имеет особенность по параметру Λ (сингулярность возникает из-за наличия члена Λ^{-1} в граничных условиях (2.4)). Обойти эту особенность в уравнении (2.5) можно, представив

$$(2.7) \quad \Theta = \sum_{m=0}^{\infty} \Lambda^m \Theta^{(m)}(\xi, \eta; \Lambda), \quad \omega = \sum_{m=0}^{\infty} \Lambda^m \omega^{(m)}(\Lambda),$$

где функция $\Theta^{(m)}$ и $\omega^{(m)}$ имеют по Λ формальный порядок, равный единице. Разложение (2.7) не является асимптотическим в обычном смысле (поскольку функции $\Theta^{(m)}$ зависят от параметра Λ), а имеет вид составного разложения по параметру Λ [24].

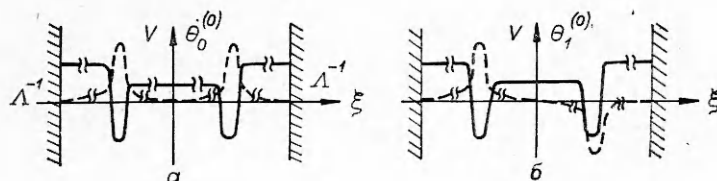
Для нулевых членов в разложении (2.7) получаем уравнение

$$(2.8) \quad (H_0 + \omega^{(0)})\Theta^{(0)} = 0$$

с граничными условиями

$$\xi_{\pm}^* = \pm \Lambda^{-1}, \quad a_1 \frac{d\Theta^{(0)}}{d\xi} + a_2 \Theta^{(0)} = 0.$$

Уравнение (2.8) аналогично уравнению Шредингера для частицы с потенциалом $V(\xi)$. Функция $V(\xi)$ представляет собой одну потенциальную яму для волны ионизации (рекомбинации) и две потенциальные ямы, удаленные друг от друга на расстояние $\sim \Lambda^{-1}$ для слоевой волны (фиг. 3, а,



Ф и г. 3

сплошная линия) и на расстояние ~ 1 для солитона (фиг. 3, б, сплошная линия). Функция $V(\xi)$ построена без учета пограничного слоя, влияние последнего на устойчивость будет рассмотрено ниже. В силу эрмитовости оператора H_0 собственные функции $\Theta_m^{(0)}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) образуют полную ортонормированную систему

$$(2.9) \quad \int_{-\Lambda^{-1}}^{\Lambda^{-1}} \Theta_m^{(0)} \Theta_l^{(0)} d\xi = \delta_{lm}$$

(если C_0 зависит от ξ , то в (2.9) под знак интеграла войдет функция $C_0(\xi)$), а собственные значения $\omega_0^{(0)} < \omega_1^{(0)} < \dots$ вещественны [22]. Уравнение первого приближения можно представить в виде ($\Theta_m^{(1)}$ есть поправка $\sim \Lambda$ для функции $\Theta_m^{(0)}$)

$$(2.10) \quad (H_0 + \omega_m^{(0)}) \Theta_m^{(1)} = -ik_y E_{y0} U_0 \frac{dS_0}{d\xi} \int_{-\Lambda^{-1}}^{\Lambda^{-1}} \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{d \ln \sigma_0}{dS_0} \Theta_m^{(0)} d\eta - \\ - \Lambda^2 k_y^2 E_{y0} \sigma_0 \int_{-\Lambda^{-1}}^{\Lambda^{-1}} G(\xi, \eta) \frac{d \ln \sigma_0}{dS_0} \Theta_m^{(0)} d\eta + ik_y E_{y0} U_0 \Theta_m^{(0)} - \omega_m^{(1)} \Theta_m^{(0)}$$

с граничными условиями

$$\xi = \pm \Lambda^{-1}, \quad a_1 \frac{d\Theta_m^{(1)}}{d\xi} + a_2 \Theta_m^{(1)} = 0.$$

Разлагая $\Theta_m^{(1)}$ в ряд по $\Theta_l^{(0)}$

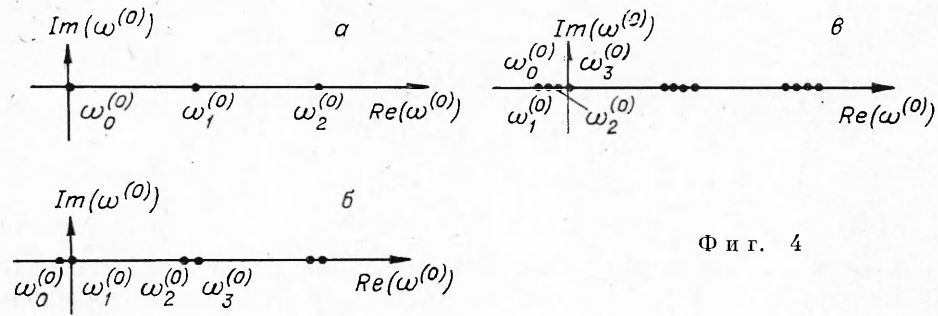
$$(2.11) \quad \Theta_m^{(1)} = \sum_{l=0}^{\infty} A_{ml} \Theta_l^{(0)},$$

можно определить величины $\omega_m^{(1)}$ и A_{ml} ($m \neq l$)

$$\omega_m^{(1)} = -2k_y^2 E_{y0}^2 \alpha_{mm} + ik_y E_{y0} \beta_{mm}, \\ A_{ml} = \frac{1}{\omega_l^{(0)} - \omega_m^{(0)}} [2k_y^2 E_{y0}^2 \alpha_{ml} - ik_y E_{y0} \beta_{ml}],$$

где

$$\alpha_{ml} = \Lambda \int_{-\Lambda^{-1}}^{\Lambda^{-1}} \sigma_0(\xi) \Theta_l^{(0)}(\xi) \left[\int_{-\Lambda^{-1}}^{\Lambda^{-1}} G(\xi, \eta) \frac{d \ln \sigma_0}{dS_0} \Big|_{S_0(\eta)} \Theta_m^{(0)}(\eta) d\eta \right] d\xi; \\ \beta_{ml} = \int_{-\Lambda^{-1}}^{\Lambda^{-1}} U_0(\xi) \Theta_l^{(0)}(\xi) \left[\Theta_m^{(0)}(\xi) - \frac{dS_0}{d\xi} \int_{-\Lambda^{-1}}^{\Lambda^{-1}} \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{d \ln \sigma_0}{dS_0} \Big|_{S_0(\eta)} \Theta_m^{(0)}(\eta) d\eta \right] d\xi.$$



Фиг. 4

Продолжая данную процедуру, можно построить все члены в разложении (2.7). Для действительной составляющей ω имеем

$$(2.12) \quad \operatorname{Re} \omega = \omega_m^{(0)} - 2\Lambda k_y^2 E_{y0}^2 \alpha_{mm}.$$

Поскольку $G < 0$, $\alpha_{mm} < 0$ (для уровней, лежащих в потенциальной яме) и вопрос об устойчивости сводится к построению спектра оператора H_0 . При $k_y = 0$ уравнение (2.5) переходит в следующее:

$$(2.13) \quad (H_0 + \omega - \Lambda^2 k_z^2) \Theta = 0.$$

Уравнение (2.13) можно исследовать, не прибегая к разложениям по параметру Λ , аналогично работе [8].

Непосредственным дифференцированием можно убедиться, что функция $dS_0/d\xi$ с граничными условиями $dS_0/d\xi = 0$ при $x = \pm 1$ есть собственная функция оператора H_0 с $\omega = 0$ (этот факт впервые использован для исследования устойчивости фронта пламени в работе [25]). Для одной волны ионизации или рекомбинации $dS_0/d\xi$ есть собственная функция $\Theta_0^{(0)}$ (пограничный слой на изоляторах не рассматривается), поэтому одна волна ионизации (рекомбинации) устойчива относительно трехмерных возмущений. Для солитона $dS_0/d\xi$ совпадает с собственной функцией $\Theta_1^{(0)}$, и при достаточно малых k_y солитон неустойчив ($\omega_0^{(0)} < 0$).

Рассмотренный выше метод неприменим к исследованию устойчивости слоевой волны (нескольких слоевых волн) и нескольких солитонов, что связано со структурой спектра оператора H_0 . Пусть l_c — ширина слоевой волны (расстояние между волнами ионизации и рекомбинации).

В случае $l_c \rightarrow \infty$ спектр слоевой волны совпадает со спектром одной волны ионизации или рекомбинации (функция $V(\xi)$ имеет одну потенциальную яму, фиг. 4, а), расстояние между собственными значениями ~ 1 , при этом эти собственные значения двукратно вырождены. При конечных значениях l_c спектр H_0 для слоевой волны получается из предыдущего расщеплением каждого собственного значения на два близлежащих значения, соответствующих симметричной и антисимметричной собственным функциям (слоевая волна расположена в канале симметрично, фиг. 4, б). Расстояние между этими собственными значениями трансцендентно мало, для ω_0 можно получить [25]

$$\omega_0^{(0)} = -\sqrt{V(S_{03})} \exp\left(-\sqrt{V(S_{03})} \frac{l_c}{\Lambda}\right).$$

Так как $A_{ml} \sim (\omega_m^{(0)} - \omega_l^{(0)})^{-1}$, то среди собственных значений ω всегда будут существовать такие, что $A_{ml} \sim O(\exp(\Lambda^{-1}))$, из чего следует не-

справедливость (2.7). В случае двух слоевых волн собственные значения, соответствующие $l_c \rightarrow \infty$, расщепляются на четыре близких уровня (фиг. 4, *в*). В этом случае также будут существовать трансцендентно большие коэффициенты A_{ml} .

Рассмотрим построение первого приближения для слоевой волны. Появление трансцендентно больших величин в разложении (2.11) связано с вырождением собственных значений, причем кратность вырождения каждого собственного значения равна двум. В силу линейности оператора H_0 любая линейная комбинация двух собственных функций, соответствующих вырожденному уровню, есть также собственная функция этого уровня. Пусть собственному значению $\omega_m^{(0)}$ соответствуют две собственные функции $\Theta_{m1}^{(0)}$ и $\Theta_{m2}^{(0)}$. Будем искать собственную функцию вырожденного значения $\hat{\Theta}_m^{(0)}$ в виде

$$(2.14) \quad \hat{\Theta}_m^{(0)} = A_1 \Theta_{m1}^{(0)} + A_2 \Theta_{m2}^{(0)}.$$

Подставив (2.14) в (2.10), умножив второе уравнение сначала на $\Theta_{m1}^{(0)}$, затем на $\Theta_{m2}^{(0)}$ и проинтегрировав по ξ от $-\Lambda^{-1}$ до Λ^{-1} , с учетом (2.9) получим систему для определения величин A_1, A_2 и $\omega_m^{(1)}$

$$(2.15) \quad \begin{aligned} A_1 (\gamma_{m1m1} - \omega_m^{(1)}) + A_2 \gamma_{m2m1} &= 0, \\ A_1 \gamma_{m1m2} + A_2 (\gamma_{m2m2} - \omega_m^{(1)}) &= 0, \end{aligned}$$

где $\gamma_{m1m2} = -2k_y^2 E_{y0}^2 \alpha_{m1m2} + ik_y E_{y0} \beta_{m1m2}$.

Условие разрешимости системы (2.15) определяет значение $\omega_m^{(1)}$

$$(2.16) \quad [\omega_m^{(1)}]_{1,2} = \frac{\gamma_{m1m1} + \gamma_{m2m2}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\gamma_{m1m1} - \gamma_{m2m2})^2 + \gamma_{m1m2} \gamma_{m2m1}}.$$

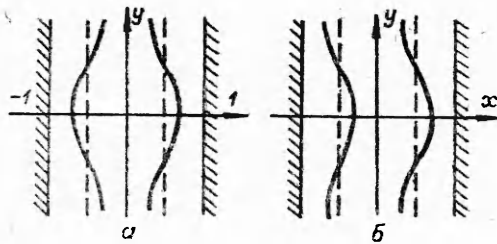
Оценим порядок членов в уравнении (2.16). Функции $\Theta_{m1}^{(0)}$ и $\Theta_{m2}^{(0)}$ для нижних уровней отличны от нуля только в областях потенциальных ям, в остальных областях они трансцендентно малы (функции $\Theta_0^{(0)}$ и $\Theta_1^{(0)}$, соответствующие вырожденному уровню $\{\omega_0^{(0)}, \omega_1^{(0)}\}$, изображены штриховыми линиями на фиг. 3, *а, б* соответственно). Функция $G(\xi, \eta)$ зависит от ξ и η только через комбинации $\Lambda\xi$ и $\Lambda\eta$, поэтому для величины γ_{mimj} можно получить следующие оценки:

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \gamma_{m1m1} \approx \gamma_{m2m2} &\sim \text{const} (G_1 + G_2) + O\left(\frac{1}{\Lambda} \exp\left(-\frac{1}{\Lambda}\right)\right), \\ \gamma_{m1m1} - \gamma_{m2m2} &\sim \gamma_{m1m2} \sim \gamma_{m2m1} \sim O\left(\frac{1}{\Lambda} \exp\left(-\frac{1}{\Lambda}\right)\right), \end{aligned}$$

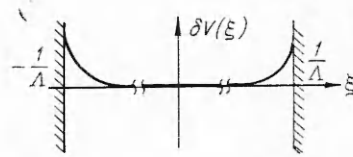
где $G_1 = G(\xi = \xi_1, \eta = \xi_1, k)$; $G_2 = G(\xi = \xi_2, \eta = \xi_2, k)$; ξ_1, ξ_2 — координаты волн ионизации и рекомбинации; поскольку оператор H_1 симметричен относительно $\xi = 0$, то $G_1 = G_2$. Используя (2.17), можно получить с точностью до трансцендентно малой величины

$$(2.18) \quad \omega_{m1}^{(1)} = \omega_{m2}^{(1)} = \gamma_{m1m1}.$$

Поскольку возмущение, пропорциональное $dS_0/d\xi$, есть просто смещение фронта волны [25], возмущение $\Theta_0^{(0)}$ имеет вид перетяжек токового шнура (фиг. 5, *а*), а $\Theta_1^{(0)}$ представляет собой искривление токового шнура



Ф и г. 5



Ф и г. 6

(фиг. 5, б). Истинные возмущения слоевой волны ($\hat{\Theta}_0^{(0)}$, $\hat{\Theta}_1^{(0)}$) представляют собой линейные комбинации этих случаев.

Из (2.12), (2.18) следует, что наиболее неустойчивы возмущения с $k_y = k_z = 0$. В этом случае система (2.3) сводится к уравнению (2.8). Для одной слоевой волны или солитона возмущение, соответствующее $\omega_0^{(0)}$, является неустойчивым, причем инкремент убывает с увеличением l_c , для слоевой волны он трансцендентно мал. Это возмущение представляет собой сжатие или растяжение токового шнура ($l_c = l_{c0} \pm \alpha \times \exp(-\omega_0^{(0)} t)$, $\alpha \ll 1$) и может быть подавлено внешней цепью при достаточно большом сопротивлении внешней цепи (в режиме заданного тока это возмущение вообще не допускается). Для солитона в силу малости зоны неоднородности тока внешняя цепь не может оказать существенного влияния на инкремент возмущения [8]. Поскольку солитон есть предельный случай слоевой волны (при $l_c \rightarrow 0$), при заданном сопротивлении внешней цепи существует критическое значение l_c , при превышении которого система становится устойчивой. Неустойчивость плоского солитона приводит к разбиению его на цилиндрические солитоны [8].

В случаях двух слоевых волн ($\omega_3^{(0)} = 0$) существуют три типа возмущений, для которых инкремент неустойчивости меньше нуля ($\omega_2^{(0)} < 0$, $\omega_1^{(0)} < 0$, $\omega_0^{(0)} < 0$). Возмущение с $\omega = \omega_0^{(0)}$ представляет собой одновременное сжатие или расширение слоевых волн и приводит к изменению состояния внешней цепи, поэтому это возмущение может быть подавлено внешней цепью.

При развитии возмущения с $\omega = \omega_1^{(0)}$ ширина одной волны уменьшается, а другой — увеличивается. Поскольку это возмущение антисимметрично, его нельзя подавить внешней цепью. Возмущение с $\omega = \omega_2^{(0)}$ представляет собой движение волн или навстречу друг другу, или друг от друга. Несмотря на то, что это возмущение симметрично, влияние внешней цепи на ее развитие мало. Из вышесказанного следует, что наиболее неустойчивым является возмущение с $\omega = \omega_0^{(0)}$, последнее означает, что решение с числом слоевых волн ≥ 2 неустойчиво. Поскольку инкремент этой неустойчивости трансцендентно мал, в экспериментах на газовом разряде, по-видимому, могут иногда наблюдаться решения с двумя слоевыми волнами [14].

При наличии пограничного слоя появляется дополнительный потенциал $\delta V(\xi)$ (для случая, когда температура на границе меньше S_{01} , изображен на фиг. 6). Поправку к ω можно найти методом возмущений [19]

$$\delta\omega_m = \int_{-\Lambda^{-1}}^{\Lambda^{-1}} [\Theta_m^{(0)}]^2 \delta V(\xi) d\xi.$$

Используя асимптотический вид $\Theta_m^{(0)}$, при $\xi \rightarrow \pm \Lambda^{-1}$ получим

$$\delta\omega_m \approx \int_{-\Lambda^{-1}}^{\Lambda^{-1}} \delta V(\xi) d\xi \exp \left\{ -\sqrt{V(S_{01})} \frac{1 + \frac{l_c}{2}}{\Lambda} \right\}.$$

Такой же порядок и знак имеет добавка за счет отличия от нуля при $\xi = \pm \Lambda^{-1}$ величины $a_1 d(dS_0/d\xi)/d\xi + a_2 dS_0/d\xi$. Добавка к частоте за счет пограничного слоя зависит от знака $\delta V(\xi)$. В случае, когда температура на стенке меньше S_{01} , $\delta V(\xi)$ и $\delta\omega > 0$. Поскольку отрицательное значение для слоевой волны по порядку величины совпадает с $\delta\omega_m$, пограничный слой может перебросить отрицательное собственное значение $\omega_0^{(0)}$ в область устойчивости. Если $\delta V(\xi) < 0$, пограничный слой приводит к дополнительной неустойчивости неоднородных решений.

Поступила 25 IX 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Шипук И. Я. Ионизационная неустойчивость в дисковом канале неравновесного МГД-генератора. — В кн.: Магнитогидродинамический метод получения энергии. М., «Энергия», 1968.
2. Пашкин С. Б. Гидродинамические неустойчивости плазмы с током в поперечном поле. — ТВТ, 1971, т. 9, № 1.
3. Кружилин Н. А. О развитии перегретой и акустической неустойчивости в плазме с молекулярными примесями. — ТВТ, 1973, т. 11, № 1.
4. Дыхне А. М. Теория одномерной контракции дуг. — В кн.: Некоторые вопросы исследования газоразрядной плазмы и создания сильных магнитных полей. Л., «Наука», 1970.
5. Атражев В. М., Якубов И. Т. Контракция сильно неравновесной плазмы с током. — ПМТФ, 1975, № 1.
6. Письменный В. Д., Рахимов А. Г. Неустойчивость мощного газового разряда. — Докл. АН СССР, 1971, т. 196.
7. Витнас А. Ф., Дыхне А. М., Наумов В. Г., Панченко В. Н. Исследование квази-одномерной модели контракции газового разряда. — ТВТ, 1971, т. 9, № 2.
8. Волков А. Ф., Коган Ш. М. О возникновении неоднородного распределения тока в полупроводниках с отрицательной дифференциальной проводимостью. — ЖЭТФ, 1967, т. 52, № 6.
9. Коган Ш. М. Токосый шнур в полупроводнике с S-образной вольт-амперной характеристикой. — ЖЭТФ, 1968, т. 54, № 4.
10. Волков А. Ф., Коган Ш. М. Физические явления в полупроводниках с отрицательной дифференциальной проводимостью. — УФН, 1968, т. 96, № 2.
11. Пашкин С. В. О контракции плазмы с током. — ТВТ, 1972, т. 10, № 6.
12. Баранов В. Ю., Ульянов К. Н. Контракция положительного столба. — ЖТФ, 1969, т. 39.
13. Баранов В. Ю., Ульянов К. П. Контракция положительного столба. — «Письма в ЖЭТФ», 1967, т. 6, № 5.
14. Витнас А. Т., Голубев В. С., Маликов М. М. О величине нормальной плотности тока в контрагированной плазме. — В кн.: Некоторые вопросы исследования газоразрядной плазмы и создания сильных магнитных полей. Л., «Наука», 1970.
15. Кадомцев Б. Б. Гидромагнитная устойчивость плазмы. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 2. М., Госатомиздат, 1963.
16. Саночкин Ю. В. О диссипативной неустойчивости неизотермического электропроводного потока между параллельными пластинами в поперечном магнитном поле. — ПМТФ, 1967, № 5.
17. Курдюмов С. П., Попов Ю. П., Самарский А. А. Нелинейные эффекты образования структур в радиационной магнитной гидродинамике. — В кн.: Тепло- и массоперенос. Т. 8. Минск, 1972.
18. Knight W. W., Peterson G. A. Theory of the Gunn effect. — «Phys. Rev.», 1967, vol. 155, N 2.
19. Синкевич О. А. Об устойчивости неоднородных стационарных состояний в неравновесной замагниченной плазме. — ПММ, 1977, т. 41, № 6.
20. Артемов В. П., Синкевич О. А. К построению плоских стационарных решений уравнений неравновесной замагниченной плазмы. — ПММ, 1976, т. 40, вып. 5.

