

7. **Lengrand J. C., Allegre J., Raffin M.** Experimental investigation of underexpanded exhaust plumes. — AIAA J., 1976, vol. 14, N 5. Рус. пер. Ракетн. техника и космонавтика, 1976, № 5.
8. **Koziak W. W.** Quantitative laser schlieren measurements in an expanding hypersonic laminar boundary layer. UTIAS Report, 1971, N 173.
9. **Заслонко И. С., Когарко С. М. и др.** Исследование кинетики энерговыделения в экзотермических реакциях за ударными волнами лазерным шпирен-методом. — ФГВ, 1974, № 5.
10. **Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике**/Под ред. Г. И. Майкапара. М.: Машиностроение, 1972.
11. **Greenberg R. A., Schneiderman A. M. et al.** Rapid expansion nozzles for gas dynamic lasers. — AIAA J., 1972, vol. 10, N 11. Рус. пер. Ракетн. техника и космонавтика, 1972, т. 10, № 11.
12. **Сковородко П. А.** Колебательная релаксация в свободной струе углекислого газа. — В кн.: Некоторые задачи гидродинамики и теплообмена. Новосибирск: изд. ИТФ СО АН СССР, 1976.
13. **Amman H. O.** Starting process in reflection nozzle. — Phys. Fluids, 1969, vol. 12, N 5, pt II.
14. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
15. **Дейч М. Е.** Техническая газодинамика. М.: Энергия, 1974.
16. **Kawamura R., Masuda W.** A numerical study on the effects of viscosity on the performance of CO₂ gasdynamic laser. ISAS Rep. N 528, 1975.
17. **Mitra N., Fiebig M.** Viscous nozzle flows and CO₂ gasdynamics lasers. — In: 1st GCL Intern. Sympos. Köln, 1976.
18. **Simons G. A.** The effect of boundary layers on GDL-medium homogeneity. AIAA Paper, 1972, N 72-709.

УДК 532.546

БЫСТРЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

А. П. Ершов
(Новосибирск)

Задачи о движении газа в пористой среде решались неоднократно, начиная с работ Л. С. Лейбензона, и в основном применительно к фильтрации газа в пластах. Обзор по этой тематике имеется в [1]. Как правило, использовался закон сопротивления Дарси, что оправдано при малых скоростях течения. Даже в такой постановке сжимаемость газа приводит к нелинейности. Поэтому получено очень мало точных решений нестационарных задач, в основном автомодельных [2-4].

В настоящее время в связи с развитием исследований двухфазных реагирующих систем представляют интерес высокоскоростные течения газа. При двухфазной детонации или быстром конвективном горении [5, 6] относительная скорость газа и частиц может составлять несколько сотен метров в секунду. Для понимания этих процессов и контроля численных решений при моделировании желательно иметь точные решения нестационарных уравнений. В данной работе для задачи о вытеснении газа из пористой среды получены асимптотические решения, описывающие течение для достаточно больших значений времени.

1. Постановка задачи. Перед фронтом горения в двухфазной системе существует область течения без химической реакции (зона фильтрации или воздушная пробка). Трение между газом и частицами в этой области преодолевается напором свежих продуктов горения.

Приходим к следующей постановке задачи. В пористой среде по заданному закону движется «жидкий» поршень, пронизываемый для частиц и непроницаемый для газа. Требуется найти движение газа перед поршнем.

Примем, что из-за прочности скелета или большой плотности движение частиц несущественно. Для быстрых движений газа закон Дарси не выполняется. В свободной засыпке частиц диаметром 1 мм и скорости течения 100 м/с число Рейнольдса, вычисленное по диаметру, порядка 10^4 . Поэтому основной вклад в межфазное взаимодействие вносит не вязкость, а инерционность мелкомасштабных течений газа. Реальный закон сопротивления квадратичный, запишем его в виде $f = A\Phi u^2/d$, где u — скорость газа; Φ — пористость; d — диаметр частицы; A — коэффициент порядка 1, зависящий от пористости и структуры порового пространства.

Так как частицы неподвижны, пористость постоянна. Основные уравнения для газа имеют вид

$$(1.1) \quad \rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (\rho u)_t + (\rho u^2)_x + \langle \rho \delta u^2 \rangle_x + p_x = -\rho f/\Phi, \\ (\rho(E + u^2/2 + K))_t + (\rho u(E + u^2/2 + K) + pu)_x + W_x = -q/\Phi, \\ W = \langle \rho \delta u(\delta I + u \delta u + K) \rangle, \quad I = E + p/\rho.$$

Здесь аналогично [7] ρ — плотность, средняя по «представительному» малому объему газа; u , E , I — среднemasовые величины; давление p — среднеповерхностное; q — теплообмен. В уравнениях учтены пульсационный перенос импульса $\langle \rho \delta u^2 \rangle$ и энергия пульсационного движения K . Обычно при расчетах этими флуктуациями пренебрегают [8, 9]. Однако, когда объемная доля твердой фазы $(1 - \Phi)$ не мала, газ движется по очень извилистым каналам, и флуктуации будут порядка самих величин. Поэтому в пористой среде учет пульсаций необходим во всех случаях, когда надо учитывать инерционные члены и кинетическую энергию среднего движения.

Для «плавных» течений, в которых характерный масштаб $L \gg d$ и характерное время $T \gg d/u$ — времени обтекания зерна, естественно ожидать, что

$$(1.2) \quad \langle \rho \delta u^2 \rangle = \delta_1 \rho u^2, \quad K = \delta_2 u^2/2, \quad W = \delta_3 \rho u^3,$$

где коэффициенты δ_1 , δ_2 и δ_3 , зависящие от геометрии скелета и пористости, имеют порядок 1. В этом случае можно пренебречь инерционными членами и пульсациями:

$$(1.3) \quad \rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad p_x = -\rho f/\Phi, \quad p_t + \gamma(pu)_x = -(\gamma - 1)q/\Phi.$$

Уравнения (1.3) — типичные для задач фильтрации с учетом теплоотвода. Газ считается идеальным с показателем адиабаты γ . При этом справедливы неравенства

$$p \sim L \rho f/\Phi = A \rho u^2 L/d \gg \rho u^2, \quad E = p/(\gamma - 1)\rho \gg u^2/2, \quad K.$$

«Жидкий» поршень будем вдвигать в первоначально покоившуюся среду с постоянной скоростью v . Далее рассмотрим два предельных случая: 1) постоянная температура газа (идеальный теплоотвод и большая теплоемкость частиц); 2) нулевой теплоотвод (тепло межфазного трения идет на нагрев газа).

Очевидно, что изотермический случай соответствует достаточно малым скоростям, когда успевает пройти теплообмен. Это приближение хорошо известно в теории фильтрации. Наоборот, пренебречь теплообменом можно при больших скоростях течения.

2. Изотермическая задача. При постоянной температуре $p = c^2 \rho$ (c — изотермическая скорость звука). Эту связь следует использовать вместо уравнения энергии. Для сравнительно небольших скоростей имеет смысл рассмотреть двучленный закон сопротивления:

$$f/\Phi = -A u^2/d - b u.$$

На поршне (при $x = vt$) $u = v$, $\rho(x, 0) = \rho(\infty, t) = \rho_0$, $u(\infty, t) = 0$. Будем искать ρ и u в виде $\rho = \rho_0 R(\xi, \tau)$, $u = v U(\xi, \tau)$, где $\xi = (x - vt)/L$ — безразмерная координата в системе поршня; $\tau = vt/L$ — безразмерное время; $L = (c/v)^2 d/A$ — характерный масштаб течения. Из системы (1.3) получим

$$R_\tau - R_\xi + (RU)_\xi = 0, \quad R_\xi/R = -U(U + \alpha),$$

где $\alpha = bd/Av$. Исключая R , имеем уравнение для скорости:

$$(2.1) \quad \frac{\partial U}{\partial \xi} = -U(U + \alpha)(1 - U) - \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\xi}^{\infty} U(U + \alpha) d\xi.$$

Нас будет интересовать решение при больших значениях времени τ . Естественно, что здесь нельзя получить строго стационарного режима. Если опустить зависимость от времени, то на поршне при $U = 1$ имеем $\partial U / \partial \xi = 0$ и $U \equiv 1$. Стационарное решение можно получить, если наложить условие $U = 1$ не на поршне ($\xi = 0$), а при $\xi = -\infty$. Такая постановка рассмотрена в [4].

Однако задача имеет в некотором смысле почти стационарное решение, в котором зависимость от времени существенна только при $U \approx 1$, т. е. вблизи поршня. Предположим, что выполняется равенство

$$(2.2) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\xi}^{\infty} U(U + \alpha) d\xi = BU(U + \alpha)/\tau$$

с точностью до малых $\sim \tau^{-2}$. Здесь B — неизвестный пока постоянный коэффициент. С учетом (2.2) уравнение (2.1) легко интегрируется:

$$\xi = \frac{\ln \left(\frac{B + \tau - U\tau}{B} \right)}{(1 + B/\tau)(1 + \alpha + B/\tau)} + \frac{\ln \left(\frac{U + \alpha}{1 + \alpha} \right)}{\alpha(1 + \alpha + B/\tau)} - \frac{\ln U}{\alpha(1 + B/\tau)}$$

При $\alpha = 0$ (чисто квадратичный закон сопротивления)

$$\xi = \ln \left(\frac{B + \tau - U\tau}{BU} \right) / \left((1 + B/\tau)^2 + (1/U - 1)/(1 + B/\tau) \right)$$

Используя эти решения, получим

$$\int_{\xi}^{\infty} U(U + \alpha) d\xi = \ln \left(\frac{B + \tau}{B + \tau - U\tau} \right)$$

Плотность выражается формулой

$$R = \frac{B + \tau}{B + \tau - U\tau}, \quad R(\xi = 0, \tau) = 1 + \tau/B.$$

Проверка выполнения предположения (2.2) на полученном решении дает

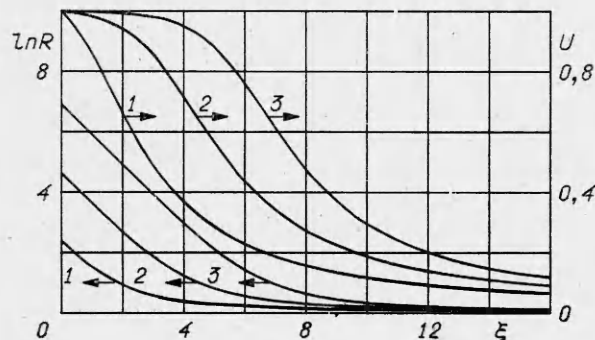
$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\xi}^{\infty} U(U + \alpha) d\xi = \frac{U(U + \alpha)}{\tau(1 + \alpha)} + O(\tau^{-2}),$$

откуда $B = 1/(1 + \alpha)$. Тот же результат получается из условия сохранения массы сгребаемого газа:

$$\int_0^{\infty} (R - 1) d\xi = \tau$$

с точностью до слагаемых $O(1)$.

На фигуре приведены профили U и R при $\alpha = 0,01$ (малый вклад линейного сопротивления) для моментов времени $\tau = 10; 10^2; 10^3$ (кривые



1—3 соответственно). С течением времени профиль скорости, сохраняя в основном свою форму, «логарифмически» сдвигается вперед, так что размер возмущенной области близок к $\ln \tau$. В этой области плотность падает экспоненциально с координатой и растет пропорционально времени.

Учет инерционных слагаемых в уравнении импульса приводит к появлению скачков, если скорость волны превышает c . Сохранение изотермичности при таких условиях сомнительно, и этот случай подробно не разбираем.

3. Нулевой теплоотвод. Для системы (1.1) ищем решение в виде волны, в которой $\rho = \text{const}$, $u = v$. Предполагаем, что пульсационные слагаемые — функции средних скорости u и плотности ρ , например, согласно (1.2). Первое уравнение выполняется автоматически, и система упрощается: $p_x = -\rho A v^2/d$, $p_t + \gamma v p_x = 0$.

Видно, что скорость фронта волны $D = \gamma v$, а зависимость $p(x)$ линейна. Плотность и давление в волне выражаются формулами

$$(3.1) \quad \rho = \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho_0, \quad p = \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho_0 A v^2 \frac{\gamma v t - x}{d} + p_0.$$

Решение существует в области между поршнем $x = vt$ и фронтом волны $x = \gamma v t$. Максимальное давление на поршне линейно растет со временем. Продолжение формул (3.1) до $x = 0$ дает решение задачи о вдуве газа в полупространство с постоянным расходом. Стационарное решение можно получить, если двигать со скоростью γv поршень, частично проникаемый для газа.

Решение (3.1) применимо для достаточно длинных волн ($vt \gg d$). Вблизи фронта существует переходная область шириной порядка диаметра частицы, в которой происходит перестройка течения от состояния покоя к установившемуся решению (3.1). При дозвуковой скорости фронта волны переход плавный, а при сверхзвуковой возникнет скачок. Подробное исследование этой ситуации нецелесообразно, пока не установлены зависимости для флуктуаций в зоне резких изменений течения. В этой же области вырабатывается постоянное слагаемое $p_0 \sim \rho v^2$, которым можно пренебречь для длинных волн.

Результаты этого пункта с очевидными изменениями сохраняются для любого закона сопротивления вида $f(\rho, u)$.

4. Применимость полученных решений. Изотермическая задача может представлять интерес для классических приложений фильтрации (вытеснение газа жидкостью).

Пренебречь теплоотводом из газа можно при условии $p_t \gg (\gamma - 1)q/\Phi$.

Используя (3.1), можно показать, что время процесса t должно быть много меньше наибольшего из двух характерных времен:

$$t_1 = (\text{Re Pr}/\text{Nu})(d/v), \quad t_2 = (\rho C/\rho_s C_s)^2 (d^2/\chi_s),$$

где Nu — число Нуссельта; ρ_s , C_s , χ_s — плотность, теплоемкость и температуропроводность частиц. Оценки показывают, что при $d = 1$ мм, $v = 1$ км/с t_1 и t_2 равны примерно 30 мкс, т. е. теплообмен становится существенным, когда волна пройдет несколько десятков зерен. Таким образом, «адиабатическое» решение (3.1) ограничено по времени как снизу (временем обтекания частицы), так и сверху (временем теплообмена).

В эксперименте [6] наблюдался «предвестник» с линейным ростом давления при низкоскоростной ($D \approx 1$ км/с) двухфазной детонации. Возможно, что эта зона представляет собой воздушную пробку, которую толкает «поршень» продуктов реакции. Такое объяснение хорошо согласуется с экспериментом, если коэффициент трения A близок к единице.

Поступила 22 XII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР/Под ред. П. Я. Полубариновой-Кочиной. М.: Наука, 1969.
2. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде.— ПММ, 1952, т. 16, вып. 1.
3. Баренблатт Г. И. Об автомодельных движениях жидкости в пористой среде.— ПММ, 1952, т. 16, вып. 6.
4. Баренблатт Г. И. Об одном классе точных решений плоской одномерной задачи нестационарной фильтрации газа в пористой среде.— ПММ, 1953, т. 17, вып. 6.
5. Ермолаев Б. С., Сулимов А. А. и др. Природа и закономерности квазистационарного пульсирующего конвективного горения.— ФГВ, 1980, т. 16, № 3.
6. Андреев В. В., Лукьянчиков Л. А. К механизму распространения детонации с малой скоростью в порошковом ТЭНе при искровом инициировании.— ФГВ, 1974, т. 10, № 6.
7. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
8. Kuo K. K., Vichnevetsky R., Summerfield M. Theory of flame front propagation in porous propellant charges under confinement.— AIAA J., 1973, vol. 11, N 4. Рус. пер. Ракетн. техника и космонавтика, 1973, т. 11, № 4.
9. Gough P. S., Zwarts F. J. Modeling heterogeneous two-phase reacting flow.— AIAA J., 1979, vol. 17, N 1. Рус. пер. Ракетн. техника и космонавтика, 1979, т. 17, № 1.

УДК 532.529.5

ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ ДВУХФАЗНЫМ ПОТОКОМ ТИПА ГАЗ — ТВЕРДЫЕ ЧАСТИЦЫ С УЧЕТОМ ЭРОЗИИ

А. П. Трунев, В. М. Фомин

(Новосибирск)

Течение смеси газа и твердых частиц часто сопровождается разрушением материала обтекаемых тел вследствие многочисленных соударений частиц с поверхностью. В процессе эрозии форма тела может значительно меняться, что влечет перестройку всей газодинамической картины течения. Поэтому необходимо включить описание процесса эрозии в известную схему расчета двухфазных потоков. С другой стороны, износ поверхности ослабляет прочностные характеристики конструкции, что является серьезной инженерной проблемой. Определению величин износа при эрозии в различных аэродинамических ситуациях посвящены работы [1—4], но в них не содержится корректной математической модели явления.

В данной работе сформулированы граничные условия для уравнений движения запыленного газа, непосредственно учитывающие разрушение поверхностей при выпадении частиц. В рамках предложенной модели исследованы проблема эрозии тонкого плоского профиля и начальная стадия разрушения клина в гиперзвуковом запыленном потоке.

1. Граничные условия, отвечающие эрозии. Процесс эрозии развивается в результате соударений многих мелких частиц с поверхностью твердой границы. В каждом акте соударения некоторый объем материала удаляется с поверхности и уносится течением. Эффект удара одной микроскопической частицы также является микроскопическим, но если число ударов велико, объем унесенного в результате эрозии материала становится большим. Пусть до начала эрозии поверхность твердой границы описывалась уравнением

$$z - h_0(x, y) = 0.$$

В процессе эрозии исходная поверхность заметно меняется, так что в каждый момент времени уравнение поверхности будет иметь вид

$$z - h(x, y, t) = 0.$$

Масса материала, унесенного в результате эрозии за время Δt с единичной площадки, есть

$$(1.1) \quad \Delta M = \rho_* [h(x, y, t) - h(x, y, t + \Delta t)],$$

где ρ_* — плотность эродируемого материала. Если пренебречь эффектами кратных соударений, что справедливо при малом объемном содержа-