

О РАЗРЫВНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА

М. Я. Леонов, Н. Ю. Швайко

(Львов)

Твердое тело, деформируемое за пределами упругости, представляется как тело, деформируемое упруго всюду, кроме некоторых поверхностей. В частности, рассматривается задача о возникновении полос скольжения при кручении стержня с поперечным сечением в виде вытянутого прямоугольника.

§ 1. Общие положения. Пластическая деформация реальных твердых тел сопровождается системой относительно больших сдвигов и образованием микропустот. Следовательно, при изучении пластических деформаций, вообще говоря, необходимо использование нелинейной теории больших деформаций. Эта задача в ряде важных случаев может быть сведена к некоторой разрывной задаче линейной теории упругости следующим образом.

Твердое тело, деформируемое за пределами упругости, во многих случаях представляется как тело, деформируемое упруго¹ всюду, кроме некоторых прослоек «плохого» материала (полосы скольжения, трещины). «Плохой» материал можно мысленно вырезать, заменив его действие соответствующими силами. Таким образом, задача о деформации за пределами упругости сводится к задаче о деформации некоторого упругого тела, имеющего условные щели. Силы, действующие по поверхностям этих щелей, называются силами ослабленных связей, а области, в которых они появляются, дефектными областями или областями ослабленных связей.

Будем считать, что деформация тела подчиняется закону Гука, если удовлетворяются следующие условия: а) нормальные напряжения не превосходят сопротивления отрыву σ_0 ; б) касательные напряжения не превосходят некоторого предела τ_m , называемого верхним пределом текучести. В случае, если невозможно решение задачи линейной теории упругости, удовлетворяющей указанным условиям ($\sigma_{\max} \leq \sigma_0$, $\tau_{\max} \leq \tau_m$), будем предполагать, что в теле образуются дефектные поверхности, на которых происходят разрывные деформации — сдвиги или образование трещин.

§ 2. Физическая сущность элементарных пластических деформаций. Твердое тело состоит из элементарных частиц (атомов, ионов), расположенных в определенном порядке или с определенными нарушениями в этом порядке (дислокации, вакансии и т. д.). Упругая деформация представляет собой изменение в расстояниях между элементарными частицами без изменения порядка их расположения, в то время как пластическая деформация сопровождается изменением относительного расположения атомов за счет сдвигов одного слоя атомов относительно другого (элементарные пластически деформации).

При слабо неоднородном поле напряжений указанные сдвиги могут более или менее равномерно распределяться по объему тела. Такая тенденция становится законом при развитой пластической деформации с

¹ Ради краткости в дальнейшем условиями упругости называются условия применимости закона Гука для изотропной среды. Частицы тела, деформируемые за пределами упругости, относятся к материалу, называемому «плохим».

упрочнением. Если же с ростом деформации сопротивление сдвигу уменьшается (например, наличие зуба напряжений), то в этом случае однородная пластическая деформация является неустойчивой. При этом появляются полосы скольжения. Полосы скольжения появляются также при неоднородном поле напряжений.

§ 3. Простейшие разрывные деформации. Рассмотрим деформацию пространства, характеризуемую перемещениями $w(x, y)$, происходящими параллельно оси z ($u = v = 0$). Функция $w(x, y)$ предполагается непрерывной всюду, за исключением простых гладких поверхностей $F_k(x, y) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, N$). На линии L пересечения $F_k(x, y) = 0$ с плоскостью $z = \text{const}$ удовлетворяется условие

$$w^+(t) = -w^-(t) = \frac{i}{2} \delta(s) \quad (s = s(t)) \quad (3.1)$$

где $w^+(t)$ и $w^-(t)$ — граничные значения функции w при подходе слева и справа к точке t контура L соответственно, $\delta(s)$ — функция дуги s контура L , равная нулю на его концах и удовлетворяющая вместе со своей производной $\mu(s) = d\delta'(s)/ds$ условию Гельдера.

Напряженное состояние при указанных перемещениях характеризуется компонентами

$$\tau_{xz} = G \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = G \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0) \quad (3.2)$$

Из условия равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

следует, что функция $w(x, y)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (3.4)$$

В случае, когда контур L состоит из отрезков, расположенных вдоль оси y , гармоническая функция $w(x, y)$, равная нулю на бесконечности, определяется [1] по своему значению (3.1) формулой

$$w(x, y) = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\delta(s) dt}{t - \zeta} \right\} \quad (t = is, \zeta = x + iy) \quad (3.5)$$

Для касательных напряжений, учитывая (3.2), (3.5) и условие $\delta(s) = 0$ на концах L , можно найти

$$T(\zeta) = \tau_{xz} - i\tau_{yz} = \frac{G}{2\pi} \int_L \frac{\mu(s) dt}{\zeta - t} \quad (3.6)$$

При стремлении точки ζ слева (справа) к точке t_0 ($t_0 = iy$) контура L по формуле Сохоцкого — Племеля из (3.6) получим

$$\tau_{xz}(0, y) - i\tau_{yz}(\pm 0, y) = \frac{G}{2\pi} \int_L \frac{\mu(s) ds}{y - s} \pm i \frac{G}{2} \mu(y) \quad (3.7)$$

Положительным на L считается направление, совпадающее с положительным направлением оси y .

Рассмотрим случай, когда концы (α_k, b_k) линии L имеют координаты

$$\alpha_k = i(kH - h), \quad b_k = i(kH + h) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 2n)$$

а функция $\mu(s)$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \mu(2kH + \sigma) &= -\mu(2kH - \sigma) = \mu[(2k + 1)H - \sigma] = \\ &= -\mu[(2k + 1)H + \sigma] = \mu(\sigma) \quad (-h \leq \sigma \leq h) \end{aligned} \quad (38)$$

При указанных предположениях формулу (3.6) можно переписать так:

$$T(\xi) = \frac{Gi}{2\pi} \left\{ \sum_{-n}^n \int_0^h \left[\frac{1}{\xi - i(2kH + \sigma)} - \frac{1}{\xi - i(2kH - \sigma)} \right] \mu(\sigma) d\sigma - \right. \\ \left. - \sum_{-n}^{n-1} \int_0^h \left[\frac{1}{\xi - i[(2k+1)H + \sigma]} - \frac{1}{\xi - i[(2k+1)H - \sigma]} \right] \mu(\sigma) d\sigma \right\} \quad (3.9)$$

Заметим, что при ограниченном $\text{Im } \xi$ ряды

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\xi - i(2kH + \sigma)} - \frac{1}{\xi - i(2kH - \sigma)} \right] \\ \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\xi - i[(2k+1)H + \sigma]} - \frac{1}{\xi - i[(2k+1)H - \sigma]} \right]$$

если выделить из них конечное число членов, имеющих полюса в заданной области изменения ξ , сходятся абсолютно и равномерно. Следовательно, в формуле (3.9) можно изменить порядок суммирования и интегрирования и перейти к пределу $n \rightarrow \infty$. При этом получаем

$$T(\xi) = \frac{G}{4H} \int_{-h}^h \left\{ \text{ctg} \frac{\pi(\xi - i\sigma)}{2iH} - \text{ctg} \frac{\pi[\xi - i(H + \sigma)]}{2iH} \right\} \mu(\sigma) d\sigma = \\ = \frac{G}{2H} \int_{-h}^h \frac{\mu(\sigma) d\sigma}{\sin[\pi(\xi - i\sigma)/iH]} \quad (3.10)$$

Из последней формулы, учитывая нечетность функции $\mu(\sigma)$, имеем $\tau_{yz}(x, 0) = \tau_{yz}(x, H) = 0$, т. е. боковая поверхность слоя, мысленно вырезанного из пространства плоскостями $y = 0$ и $y = H$, свободна от напряжений. Таким образом, формула (3.10) может быть использована для определения напряженного состояния, вызванного простейшими разрывными перемещениями, заданными в полосах ($x = 0, 0 \leq y \leq h$) и ($x = 0, H - h \leq y \leq H$) неограниченного слоя.

§ 4. Элементарные пластические сдвиги при кручении. Предполагаем, что сопротивление отрыву превосходит сопротивление сдвигу ($\sigma_0 > \tau_m$). В этом случае при кручении за пределами упругости происходят пластические сдвиги. Считаем, что на поверхностях скольжения касательные напряжения направлены против направления сдвига и равны по величине постоянной τ_c , которую будем называть нижним пределом текучести. Вне полосы скольжения напряжения не превышают величины τ_m , причем $\tau_m > \tau_c$. Такой материал, имеющий зуб на диаграмме напряжений, называется разупрочняющимся [2].

Рассмотрим пластические сдвиги при кручении стержня с поперечным сечением в виде вытянутого прямоугольника. До возникновения сдвигов наибольшие касательные напряжения действуют в точках, расположенных посредине длинных сторон поперечного сечения. Когда $\tau_{\max}$ достигает предельного значения τ_m , по нормали к контуру через указанные точки произойдут пластические сдвиги. Глубина пластических сдвигов h предполагается малой по сравнению с длиной l поперечного сечения, которое поэтому рассматривается как неограниченная полоса (фиг. 1).

Обозначим через $w^0(x, y)$, τ_{xz}^0 , τ_{yz}^0 деформацию и касательные напряжения, определенные без учета пластической деформации, а через $w^{(1)}(x, y)$, $\tau_{xz}^{(1)}$, $\tau_{yz}^{(1)}$ — деформацию и напряжения, вызванные пластическим сдвигом.

Очевидно, что в рассматриваемой задаче направление сдвига в нижней (фиг. 1) полосе скольжения ($0 \leq y \leq h$) противоположно направле-

нию сдвига в верхней полосе скольжения ($H - h \leq y \leq H$), т. е. имеет место равенство

$$w^{(1)}(\pm 0, H - y) = w^{(1)}(\mp 0, y) \quad (4.1)$$

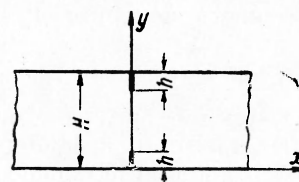
При этом для $\delta(y)$ получаем $\delta(H - y) = -\delta(y)$; таким образом, функция $\mu(y) = \delta'(y)$ удовлетворяет условию

$$\mu(H - y) = \mu(y) \quad (4.2)$$

Напряженное состояние, вызванное в неограниченном слое пластическими сдвигами, при выполнении условия (4.2) определяется формулой (3.10), в которой функцию $\mu(\delta)$ следует считать нечетной.

На поверхностях скольжения касательные напряжения направлены противоположно сдвигу и равны по величине постоянной τ_c , т. е. имеет место условие

$$\tau_{xz}^o(0, y) + \tau_{xz}^{(i)}(0, y) = \begin{cases} \tau_c & \text{при } 0 \leq y \leq h \\ -\tau_c & \text{при } H - h \leq y \leq H \end{cases} \quad (4.3)$$



Фиг. 1

Легко доказать, что второе равенство этой системы эквивалентно первому.

В формуле (3.10) перейдем к новым переменным

$$\eta = \operatorname{tg} \frac{\pi \xi}{iH}, \quad \xi = \operatorname{tg} \frac{\pi s}{H} \quad (4.4)$$

Тогда будем иметь

$$\tau_{xz}^{(1)} - i\tau_{yz}^{(1)} = \frac{G}{2\pi} \sqrt{1 + \eta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu^*(\xi) d\xi}{\eta - \xi} \quad (4.5)$$

Здесь

$$\omega = \operatorname{tg} \frac{\pi h}{H}, \quad \mu^*(\xi) = \frac{\mu[(H/\pi) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \xi]}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad (4.6)$$

и переменная η рассматривается в дальнейшем как параметр.

Если напряжение $\tau_{xz}^{(1)}(0, y)$, определяемое формулой (4.5), подставить в (4.3), то получим следующее интегральное уравнение для определения функции $\mu^*(\xi)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu^*(\xi) d\xi}{\xi - \xi_1} = f_1(\xi_1) \quad (4.7)$$

Здесь

$$\xi_1 = \operatorname{tg} \frac{\pi y}{H}, \quad f_1(\xi_1) = \frac{2}{G\sqrt{1 + \xi_1^2}} \left[\tau_{xz}^o\left(0, \frac{H}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \xi_1\right) - \tau_c \right] \quad (0 \leq \xi_1 \leq \omega) \quad (4.8)$$

Полное исследование и решение уравнения (4.7) дано в монографии [1] Н. И. Мусхелишвили.

На основании формулы Сохоцкого—Племеля из условия ограниченности напряжений следует ограниченность функции $\mu^*(\xi)$. Следовательно, в дальнейшем нас будет интересовать ограниченное решение уравнения (4.7), которое существует при условии

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(\xi) d\xi}{\sqrt{\omega^2 - \xi^2}} = 0 \quad (4.9)$$

и дается [1] формулой

$$\mu^*(\xi_1) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\omega^2 - \xi_1^2} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{f_1(\xi) d\xi}{\sqrt{\omega^2 - \xi^2} (\xi_1 - \xi)} \quad (4.10)$$

Условие (4.9) дает возможность определить глубину пластического сдвига h , которая выше рассматривалась как неопределенный параметр.

В формулах (4.9) и (4.10) интегрирование по переменной ξ осуществляется в промежутке $[-\omega, \omega]$, а функция $f_1(\xi)$, определяемая равенством (4.8), задана только на участке $0 \leq \xi \leq \omega$ этого промежутка. Для определения $f_1(\xi)$ при $\xi < 0$ используем уравнение (4.7). Из него, учитывая нечетность функции $\mu^*(\xi)$, получаем

$$f_1(-\xi) = f_1(\xi) \quad (4.11)$$

Последнее условие определяет $f_1(\xi)$ для $\xi < 0$.

При известной функции $\mu^*(\xi)$ формула (4.5) дает возможность определить дополнительное напряженное состояние, вызванное пластическими сдвигами при кручении. Чтобы получить формулу, непосредственно выражающую $\tau_{xz}^{(1)}$ и $\tau_{yz}^{(1)}$ через функцию $f_1(\xi)$, подставим выражение $\mu^*(\xi)$ из (4.10) в (4.5); тогда получим

$$\tau_{xz}^{(1)} - i\tau_{yz}^{(1)} = \frac{G}{2\pi} \sqrt{1 + \eta^2} \int_{-\omega}^{\omega} \left[\frac{\sqrt{\omega^2 - \xi^2}}{\pi} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{f_1(\vartheta) d\vartheta}{\sqrt{\omega^2 - \vartheta^2} (\xi - \vartheta)} \right] \frac{d\xi}{\eta - \xi}. \quad (4.12)$$

Можно доказать [1], что повторный интеграл (4.12) допускает перестановку порядка интегрирования. После перестановки и вычисления интегралов окончательно получаем

$$\tau_{xz}^{(1)} - i\tau_{yz}^{(1)} = \frac{G}{2\pi} \sqrt{(1 + \eta^2)(\eta^2 - \xi_1^2)} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{f_1(\xi) d\xi}{\sqrt{\omega^2 - \xi^2} (\xi - \eta)} \quad (4.13)$$

Если в формулах (4.9), (4.10) и (4.13) перейдем к старым переменным ζ и σ , то соответственно будем иметь

$$\int_{-h}^h \frac{f(\sigma) d\sigma}{\sqrt{\cos \frac{2\pi\sigma}{H} - \cos \frac{2\pi h}{H}}} = 0 \quad (4.14)$$

$$\mu(y) = \frac{1}{H} \frac{\sqrt{\cos \frac{2\pi y}{H} - \cos \frac{2\pi h}{H}}}{\cos \frac{\pi y}{H}} \int_{-h}^h \frac{\cos \frac{\pi\sigma}{H} f(\sigma) d\sigma}{\sqrt{\cos \frac{2\pi\sigma}{H} - \cos \frac{2\pi h}{H}} \sin \frac{\pi(y-\sigma)}{H}} \quad (4.15)$$

$$\tau_{xz}^{(1)} - i\tau_{yz}^{(1)} = \frac{\sqrt{\cos \frac{2\pi\zeta}{H} - \cos \frac{2\pi h}{H}}}{iH \cos \frac{\pi\zeta}{H}} \int_{-h}^h \frac{\cos \frac{\pi\sigma}{H} f(\sigma) d\sigma}{\sqrt{\cos \frac{2\pi\sigma}{H} - \cos \frac{2\pi h}{H}} \sin \frac{\pi(\zeta-i\sigma)}{iH}} \quad (4.16)$$

где положено

$$f(\sigma) = \frac{2}{G} [\tau_{xz}^{(1)}(0, \sigma) - \tau_c] \quad (0 \leq \sigma \leq h) \quad f(-\sigma) = f(\sigma) \quad (4.17)$$

§ 5. Случай полупространства. Предположим далее, что глубина пластического сдвига h мала по сравнению с размерами поперечного сечения, так что стержень можно рассматривать (фиг. 2) как полупространство. В этом случае, переходя в формулах (4.14)–(4.16) к пределу $H \rightarrow \infty$, соответственно получаем

$$\int_{-h}^h \frac{f(\sigma) d\sigma}{\sqrt{h^2 - \sigma^2}} = 0 \quad (5.1)$$

$$\mu(y) = \frac{1}{\pi} \sqrt{h^2 - y^2} \int_{-h}^h \frac{f(\sigma) d\sigma}{\sqrt{h^2 - \sigma^2} (y - \sigma)} \quad (5.2)$$

$$\tau_{xz}^{(1)} - i\tau_{yz}^{(1)} = \frac{G}{2\pi} \sqrt{\xi^2 + h^2} \int_{-h}^h \frac{f(\sigma) d\sigma}{\sqrt{h^2 - \sigma^2} (\xi - i\sigma)} \quad (5.3)$$

Напряжение $\tau_{xz}^{(0)}(0, y)$ при $0 \leq y \leq h$, когда h мало, с достаточной точностью может быть аппроксимировано линейной функцией. Следовательно, можем положить

$$\tau_{xz}^{(0)}(0, y) = \alpha\tau_m - by \quad (0 \leq y \leq h) \quad (5.4)$$

где α и b — некоторые постоянные, зависящие от величины крутящего момента и формы поперечного сечения стержня. Причем для возникновения пластической деформации параметр α должен превзойти значение, равное единице, так что будем считать $\alpha > 1$.

Исходя из выражения (5.4), для функции $f(y)$ из (4.17) получаем

$$f(y) = \begin{cases} 2G^{-1} [(\alpha\tau_m - \tau_c) - by] & \text{при } 0 \leq y \leq h \\ 2G^{-1} [(\alpha\tau_m - \tau_c) + by] & \text{при } -h \leq y \leq 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Подставляя (5.5) в формулы (5.1)–(5.3) и вычисляя интегралы, для глубины пластического сдвига h , функции $\mu(y)$ и касательных напряжений окончательно будем иметь

$$h = \pi \frac{\alpha\tau_m - \tau_c}{2b} \quad (5.6)$$

$$\mu(y) = \frac{4by}{\pi G} \ln \left| \frac{h + \sqrt{h^2 - y^2}}{y} \right| \quad (5.7)$$

$$\tau_{xz}^{(1)} - i\tau_{yz}^{(1)} = -(\alpha\tau_m - \tau_c) \left[1 - \frac{\xi}{2h} \ln \frac{\sqrt{\xi^2 + h^2} + h}{\sqrt{\xi^2 + h^2} - h} \right] \quad (5.8)$$

В последней формуле под логарифмом подразумеваем голоморфную в плоскости $\xi = x + iy$ с разрезом по отрезку $(-ih, ih)$ ветвь, принимающую на оси x действительные значения.

Из (5.8), в частности, можем получить

$$\tau_{xz}^{(1)}(x, 0) = -(\alpha\tau_m - \tau_c) \left[1 - \frac{|x|}{2h} \ln \frac{\sqrt{x^2 + h^2} + h}{\sqrt{x^2 + h^2} - h} \right] \quad (5.9)$$

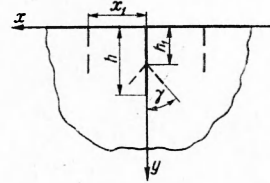
$$\tau_{xz}^{(1)}(0, y) = -(\alpha\tau_m - \tau_c) \left[1 - \frac{\pi y}{2h} \right] \quad (y \leq h) \quad (5.10)$$

$$\tau_{xz}^{(1)}(0, y) = -(\alpha\tau_m - \tau_c) \left[1 - \frac{y}{h} \operatorname{arctg} \frac{h}{\sqrt{y^2 - h^2}} \right] \quad (y > h) \quad (5.11)$$

$$\tau_{yz}^{(1)}(\pm 0, y) = \mp (\alpha\tau_m - \tau_c) \frac{y}{2h} \ln \frac{h + \sqrt{h^2 - y^2}}{h - \sqrt{h^2 - y^2}} \quad (y < h) \quad (5.12)$$

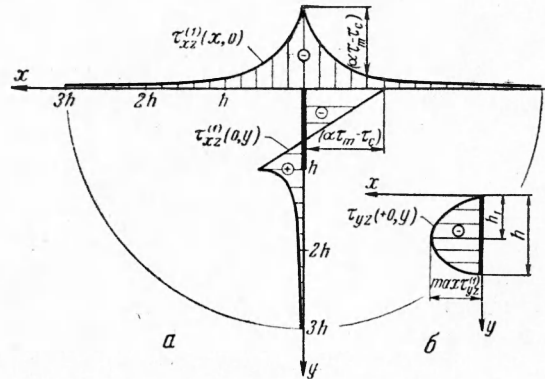
$$\tau_{yz}^{(1)}(0, y) = 0 \quad (y \geq h) \quad (5.13)$$

На основании формул (5.9)–(5.13) построены графики (фиг. 3) изменения напряжений $\tau_{xz}^{(1)}$ и $\tau_{yz}^{(1)}$ вдоль координатных осей. Максимальных значений $\tau_{xz}^{(1)}$ и $\tau_{yz}^{(1)}$ по модулю достигают соответственно в точках $[x=0, y=0]$ и $[x=0, y=(0.5524 \dots)h]$, причем $|\max \tau_{xz}^{(1)}| = \alpha\tau_m - \tau_c$ и $|\max \tau_{yz}^{(1)}| = (0.6627 \dots)(\alpha\tau_m - \tau_c)$.



Фиг. 2

Из графиков видно, что дополнительное напряженное состояние носит явно выраженный локальный характер. Численные подсчеты показывают, что напряжения в точках, расположенных вне полукругности радиуса $R = 3h$ (фиг. 3), являются пренебрежимо малыми. Следовательно,



Фиг. 3

но, указанные точки можно рассматривать как бесконечно удаленные от пластического сдвига.

В заключение отметим, что решение задачи для полупространства легко получить и в том случае, когда $\tau_{xz}^0(0, y)$ при $0 \leq y \leq h$ аппроксимируется полиномом любой степени. При этом формулы для напряжений и глубины пластического сдвига также записываются в замкнутом виде через элементарные функции.

§ 6. Возникновение новых полос скольжения. Напряженное состояние при наличии одной полосы пластического сдвига определяется формулой

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \tau_{xz}^0 - i\tau_{yz}^0 - (\alpha\tau_m - \tau_c) \left[1 - \frac{\xi}{2h} \ln \frac{\sqrt{\xi^2 + h^2} + h}{\sqrt{\xi^2 + h^2} - h} \right] \quad (6.1)$$

С увеличением параметра α касательные напряжения могут достигать предельного значения τ_m в новых точках поперечного сечения, т. е. осуществляется условие возникновения новых полос скольжения. Точки, через которые пройдут очередные пластические сдвиги, могут находиться или на берегах первой полосы скольжения, или на поверхности $y = 0$.

Предположим, что

$$\tau_{xz}^0(x, 0) = \alpha\tau_m - ax^2 \quad (6.2)$$

При этом напряжение $\tau_{xz}(x, 0)$ достигает значения τ_m в точках $x = \pm x_1$, когда

$$\alpha = \alpha_1 = \frac{\tau_c}{\tau_m} + \frac{2bx_1(\tau_m - \tau_c - ax_1^2)}{\tau_m \sqrt{4b^2 x_1^2 - \pi^2(\tau_m - \tau_c - ax_1^2)^2}} \quad (6.3)$$

Здесь x_1 определяется из уравнения

$$\ln \frac{2bx_1 + \pi(\tau_m - \tau_c - ax_1^2)}{2bx_1 - \pi(\tau_m - \tau_c - ax_1^2)} - \frac{\pi}{bx_1}(\tau_m - \tau_c + ax_1^2) = 0 \quad (6.4)$$

Если при заданном a и b величина

$$\alpha_1 > \alpha_2 = \frac{\tau_c}{\tau_m} + \frac{1}{k} \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_c}{\tau_m}\right)^2} \quad (6.5)$$

$$k = \max \left[\frac{y}{h} \ln \left| \frac{h + \sqrt{h^2 - y^2}}{y} \right| \right] = 0.6627 \dots \quad (6.6)$$

то напряжение τ_m достигается в первую очередь в точках $x = \pm 0, y = (0.5524 \dots) h$ по площадкам, наклоненным под углом $\gamma = \arccos \tau_c/\tau_m$ к оси y . Возможные очередные сдвиги на фиг. 2 показаны пунктиром.

§ 7. Определение депланации. Депланацию поперечного сечения стержня будем представлять в виде суммы

$$w(x, y) = w^*(x, y) + w^{(1)}(x, y) \quad (7.1)$$

где $w^*(x, y)$ — депланация, определяемая без учета пластической деформации, а $w^{(1)}(x, y)$ — приращение депланации, вызванное пластическим сдвигом.

Функция w^* определяется обычными методами теории упругости и в дальнейшем считается известной. Для определения $w^{(1)}(x, y)$ можно воспользоваться формулой (3.5).

Учитывая, что $\delta'(y) = \mu(y)$ и $\delta(h) = 0$, для функции $\delta(y)$ получаем

$$\delta(y) = \int_h^y \mu(\sigma) d\sigma$$

Если в последнюю формулу подставим выражение для $\mu(\sigma)$ из (5.7) и вычислим интеграл, то будем иметь

$$\delta(y) = \frac{2b}{\pi G} \left[y^2 \ln \left| \frac{h + \sqrt{h^2 - y^2}}{y} \right| - h \sqrt{h^2 - y^2} \right] \quad (7.2)$$

Учитывая выражение (7.2), из (3.5) для приращения депланации окончательно получаем

$$w^{(1)}(x, y) = \frac{b}{2\pi G} \operatorname{Re} \left\{ \xi^2 \ln \frac{\sqrt{\xi^2 + h^2} + h}{\sqrt{\xi^2 + h^2} - h} + 2h \sqrt{\xi^2 + h^2} - 4h\xi \right\} \quad (7.3)$$

Из последней формулы, в частности, имеем

$$w^{(1)}(x, 0) = \pm \frac{b}{2\pi G} \left[x^2 \ln \frac{\sqrt{x^2 + h^2} + h}{\sqrt{x^2 + h^2} - h} + 2h \sqrt{x^2 + h^2} - 4h|x| \right] \quad (7.4)$$

(знак плюс берется для $x > 0$, а минус — для $x < 0$)

$$w^{(1)}(\pm 0, y) = \begin{cases} \mp \frac{b}{2\pi G} \left[y^2 \ln \frac{h + \sqrt{h^2 - y^2}}{h - \sqrt{h^2 - y^2}} - 2 \sqrt{h^2 - y^2} \right] & (y < h) \\ 0 & (y \geq h) \end{cases} \quad (7.5)$$

Из (7.5) следует

$$w^{(1)}(\pm 0, h) = 0, \quad \frac{\partial w^{(1)}(\pm 0, y)}{\partial y} \Big|_{y=h} = 0 \quad (7.6)$$

Отметим, что условия (7.6) аналогичны условиям плавности смыкания трещин [3].

Институт машиноведения
и автоматики АН УССР

Поступила 5 III 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.—Л., ОГИЗ, Гостехиздат, 1946.
2. Леонов М. Я. Разупрочняющаяся модель упруго-пластического тела. Информационный бюллетень, № 1, ВИНТИ АН СССР, 1960.
3. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 3, 4, 5.