

УДК 539.42

DOI: 10.15372/PMTF202215101

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСТЯЖЕНИИ ПЛАСТИНЫ ПРИ НАЛИЧИИ В НЕЙ ПЯТИ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТРЕЩИН С УЧЕТОМ ОБРАЗОВАНИЯ ЗОН ПЛАСТИЧНОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИН ТРЕЩИН

Н. Ахтар, С. Хасан, С. Шехар

Национальный исламский университет, Нью-Дели, Индия

E-mails: naved.a86@gmail.com, shasan@jmi.ac.in, sudhanshubhu27@gmail.com

Предложена модифицированная модель несущей способности бесконечной изотропной пластины, содержащей пять коллинеарных прямолинейных трещин со слившимися зонами пластичности. Предполагается, что материал в зонах пластичности сжимается нормальными напряжениями, изменяющимися по линейному закону. При решении задачи использованы методы теории функции комплексной переменной. Получено численное решение задачи при различной длине трещин. Показано, что полученные результаты хорошо согласуются с известными данными.

**Ключевые слова:** множественные трещины, несущая способность, коэффициент интенсивности напряжений, модель Дагдейла, раскрытие в вершине трещины

**Введение.** При наличии трещин в материалах и конструкциях их остаточная прочность в условиях нагружения быстро уменьшается [1]. Поэтому исследование остаточной прочности материалов и конструкций, ослабленных трещинами или трещиноподобными дефектами, является актуальной задачей. В работе [2] предложена модель остаточной прочности пластины при наличии в ней одиночной трещины. В этой модели длина зоны текучести вычисляется при общих условиях текучести. В работе [3] изучено влияние линейно изменяющегося напряжения, действующего на бесконечности, в работе [4] при оценке несущей способности пластины при наличии в ней одиночной трещины учитывается переменное напряжение текучести.

В случае если конструкция повреждена многочисленными трещинами, задача обеспечения ее безопасности усложняется. При распространении таких трещин под действием механических нагрузок риск катастрофического разрушения конструкции увеличивается. В работе [5] предложена модель несущей способности бесконечной пластины при наличии в ней двух коллинеарных прямолинейных трещин неодинаковой (одинаковой) длины. При построении модели в [5] использовалась модель трещины Дагдейла. Изменение длины зоны пластичности в окрестностях внутренней и внешней вершин двух прямолинейных коллинеарных трещин исследовано в работе [6]. При общих условиях текучести несущая способность бесконечной пластины с тремя коллинеарными трещинами изучалась в [7]. В работе [8] учитывается линейное распределение напряжений. В [9] исследована остаточная прочность фюзеляжа самолета, в котором имеются множественные трещины. В работе [10]

для оценки остаточной прочности алюминиевой панели при наличии в ней множественных повреждений предложено использовать модифицированный критерий текучести.

Взаимодействие множественных коллинеарных прямолинейных трещин можно рассматривать как процесс непрерывного изменения локальных внутренних напряжений и зон текучести, возникающих при распространении трещин. Зоны текучести, появляющиеся в окрестности вершин внутренних трещин, сливаются при увеличении нагрузки, приложенной на границе пластины [11]. В работе [12] изучены условия, при которых происходит слияние зон текучести в случае наличия множественных трещин.

В данной работе получено аналитическое решение задачи о растяжении бесконечной пластины из упругого идеально пластического материала при наличии в ней пяти коллинеарных прямолинейных трещин со слившимися зонами текучести. Поскольку некоторые конструкции разрушаются при напряжениях, значительно меньших предела текучести материала [13], предполагается, что на границах зон пластичности действуют сжимающие линейно изменяющиеся напряжения, предотвращающие дальнейшее раскрытие трещин. С использованием функции комплексной переменной получены аналитические выражения для коэффициента интенсивности напряжений и для величины раскрытия трещины в вершине в виде эллиптических интегралов.

**1. Сведение плоской задачи теории упругости к краевой задаче теории функции комплексной переменной.** В плоской задаче теории упругости компоненты напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  и компоненты вектора перемещений  $u$ ,  $v$  могут быть выражены через две комплексные функции  $\Phi(z)$ ,  $\Omega(z)$ :

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}; \quad (1)$$

$$2\mu(u + iv) = \int \Phi(z) dz - \int \Omega(\bar{z}) dz - (z - \bar{z})\overline{\Phi(z)} \quad (2)$$

(черта над функцией или переменной обозначает ее комплексное сопряжение;  $\mu$  — модуль сдвига).

Рассмотрим бесконечную пластину из изотропного материала (изотропную пластину), ослабленную  $n$  прямыми разрезами (трещинами)  $L_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ), расположенными на вещественной оси. Напряжения, действующие на берегах этих трещин, равны:  $\sigma_{xy}^+ = \sigma_{xy}^-$ ,  $\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^-$  (верхние индексы “+” и “-” соответствуют значениям напряжений на верхнем и нижнем берегах трещины).

Уравнения (1) могут быть сведены к двум уравнениям

$$\Phi^+(t) + \Omega^-(t) = \sigma_{yy}^+ - i\sigma_{xy}^+, \quad \Phi^-(t) + \Omega^+(t) = \sigma_{yy}^- - i\sigma_{xy}^- \quad (3)$$

при условии  $\lim_{y \rightarrow 0} y\Phi'(t + iy) = 0$ .

Общее решение краевых задач (3) можно записать с использованием формул Племяля в виде

$$\Phi(z) + \Omega(z) = \frac{1}{\pi i \chi(z)} \int_L \frac{\chi(t)p(t)}{t - z} dt + \frac{2P_n(z)}{\chi(z)}, \quad \Phi(z) - \Omega(z) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{q(t)}{t - z} dt - \overline{\Gamma'},$$

где  $p(t)$ ,  $q(t)$  — напряжения, приложенные в зонах текучести:

$$p(t) = \frac{1}{2}(\sigma_{yy}^+ + \sigma_{yy}^-) - \frac{i}{2}(\sigma_{xy}^+ + \sigma_{xy}^-), \quad q(t) = \frac{1}{2}(\sigma_{yy}^+ - \sigma_{yy}^-) - \frac{i}{2}(\sigma_{xy}^+ - \sigma_{xy}^-),$$

$$\chi(z) = \prod_{k=1}^n \sqrt{z - a_k} \sqrt{z - b_k}, \quad P_n(z) = D_0 z^n + D_1 z^{n-1} + D_2 z^{n-2} + \dots,$$

$a_k, b_k$  — координаты вершин  $k$ -й трещины;  $\Gamma' = -((N_1 - N_2)/2) e^{-2i\alpha}$ ;  $N_1, N_2$  — значения главных напряжений на бесконечности;  $\alpha$  — угол между направлением главного напряжения  $N_1$  и осью  $Ox$ .

Постоянные  $D_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) в полиномах  $P_n(z)$  определяются с использованием условий нагружения пластины на бесконечности и условия однозначного определения перемещений на берегах трещин:

$$2(\varkappa + 1) \int_{L_i} \frac{P_n(z)}{\chi(z)} dz + \varkappa \int_{L_i} [\Phi_0^+(z) - \Phi_0^-(z)] dz + \int_{L_i} [\Omega_0^+(z) - \Omega_0^-(z)] dz = 0, \quad (4)$$

где

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i \chi(z)} \int_{\bigcup_{i=1}^n L_i} \frac{\chi^+(t)p(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\bigcup_{i=1}^n L_i} \frac{q(t)}{t-z} dt,$$

$$\Omega_0(z) = \frac{1}{2\pi i \chi(z)} \int_{\bigcup_{i=1}^n L_i} \frac{\chi^+(t)p(t)}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\bigcup_{i=1}^n L_i} \frac{q(t)}{t-z} dt,$$

$\varkappa = (3 - \gamma)/(1 + \gamma)$  в случае плоского напряженного состояния,  $\varkappa = 3 - 4\gamma$  в случае плоской деформации;  $\gamma$  — коэффициент Пуассона.

Для определения напряженного состояния вблизи вершины трещины  $z = z_1$  используется коэффициент интенсивности напряжений [6]:

$$K_I = 2\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow z_1} \sqrt{z - z_1} \Phi(z). \quad (5)$$

**2. Постановка задачи.** На рис. 1 представлена схема решаемой задачи.

Рассматривается бесконечная пластина из изотропного идеально упругопластического материала, в которой имеется пять прямолинейных трещин  $L_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ), расположенных на вещественной оси. Здесь  $L_1 = (-a_1, -d_2)$ ;  $L_2 = (-d_1, -b_1)$ ;  $L_3 = (-c_1, c_1)$ ;  $L_4 = (b_1, d_1)$ ;  $L_5 = (d_2, a_1)$ . На бесконечности пластина растягивается равномерно распределенным напряжением  $\sigma_{yy} = \sigma_\infty$ , действующим перпендикулярно краям трещин.

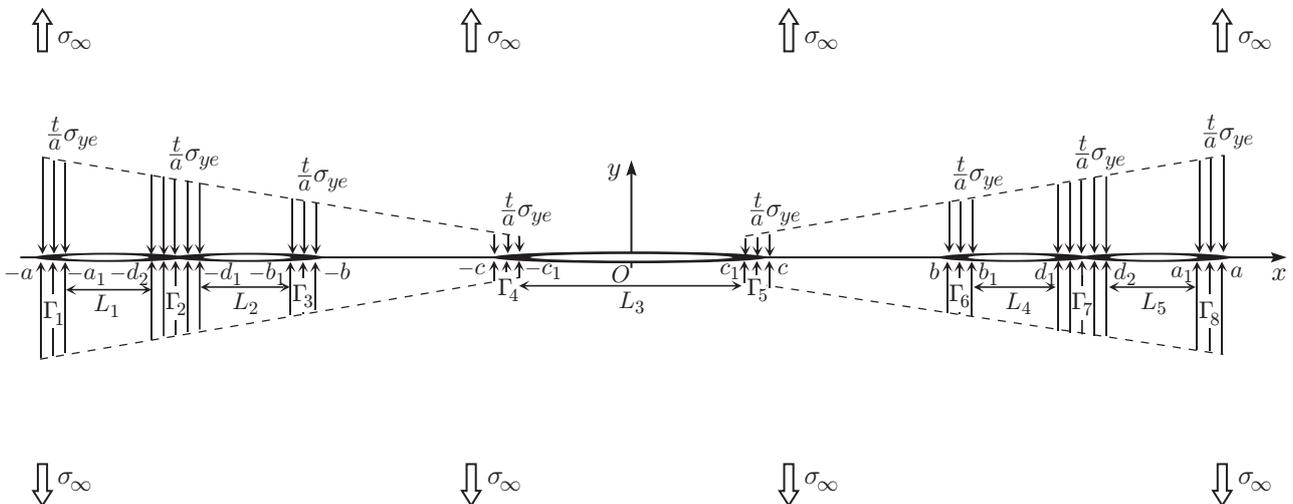


Рис. 1. Схема задачи

В результате образуются трещины отрыва (трещины первого типа), а в их вершинах появляются зоны пластичности. При увеличении напряжения, действующего на границе пластины, зоны пластичности увеличиваются, а затем сливаются. Зоны пластичности обозначаются  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) и занимают на вещественной оси интервалы  $(-a, -a_1)$ ,  $(-d_2, -d_1)$ ,  $(-b_1, -b)$ ,  $(-c, -c_1)$ ,  $(c_1, c)$ ,  $(b, b_1)$ ,  $(d_1, d_2)$ ,  $(a_1, a)$ . Предполагается, что для прекращения распространения трещин зоны пластичности должны сжиматься напряжением  $\sigma_{yy} = (t/a)\sigma_{ye}$  ( $\sigma_{ye}$  — предел текучести материала пластины).

Для того чтобы упростить решение задачи, она разделяется на две задачи, далее называемые задачей А и задачей Б. Эти задачи решаются по отдельности, решение исходной задачи получается наложением решений задач А и Б. Решение задачи А (задачи о трех трещинах) получено ранее [7, 14]. Ниже приводится это решение. Используемые в данной работе математические выражения приведены в п. 5.

2.1. *Задача А (случай растягивающих напряжений)*. Рассматривается задача о трех коллинеарных прямолинейных трещинах одинаковой длины, находящихся в бесконечной изотропной пластине, растягиваемой на бесконечности напряжением  $\sigma_\infty$ . Эти трещины обозначаются  $R_1 = (-a, -b)$ ,  $R_2 = (-c, c)$ ,  $R_3 = (b, a)$ .

Задача решается при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = \sigma_\infty, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad y \rightarrow \pm\infty, \quad -\infty < x < \infty, \\ \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0, \quad y = 0, \quad x \in \bigcup_{i=1}^3 R_i. \end{aligned} \quad (6)$$

Искомая комплексная функция  $\Phi_A(z)$  находится с использованием алгоритма, изложенного в п. 1, и граничных условий (6):

$$\Phi_A(z) = \frac{\sigma_\infty}{2} \left( \frac{1}{\chi(z)} [z^3 - z(c^2 + (a^2 - c^2)\lambda_k^2)] - \frac{1}{2} \right) \quad (7)$$

(нижний индекс “А” соответствует задаче А;  $\lambda_k = E(k)/F(k)$ ;  $E(k)$ ,  $F(k)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода;  $k = (a^2 - b^2)/(a^2 - c^2)$ ).

Коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах  $z = a, b, c$  трещин отрыва  $K_A(z)$  определяются путем подстановки выражения для  $\Phi_A(z)$  (7) в уравнение (5) и подстановки в полученное выражение координат вершин трещин  $a, b, c$ :

$$K_A(a) = \sigma_\infty (1 - \lambda_k^2) \sqrt{\frac{\pi a}{k}}; \quad (8)$$

$$K_A(b) = \sigma_\infty \left( \frac{\lambda_k^2}{1 - k^2} - 1 \right) \frac{\sqrt{\pi b(1 - k^2)}}{k}; \quad (9)$$

$$K_A(c) = \sigma_\infty \frac{\sqrt{\pi c}}{\sqrt{1 - k^2}} \lambda_k^2. \quad (10)$$

Компоненты вектора смещения  $v_A^\pm(t)$  в вершинах трещин  $t = \pm a_1, \pm b_1, \pm c_1$  определяются с использованием уравнений (7), (2):

$$\begin{aligned} v_A^\pm(a_1) &= \pm \frac{2am\sigma_\infty}{kE} [E(\varphi(a_1), k) - \lambda_k^2 F(\varphi(a_1), k)], \\ v_A^\pm(b_1) &= \pm \frac{2am\sigma_\infty}{kE} [E(\varphi(b_1), k) - \lambda_k^2 F(\varphi(b_1), k)], \\ v_A^\pm(c_1) &= \mp \frac{2am\sigma_\infty}{kE} [\rho_1(\psi(c_1), k) - \lambda_k^2 F(\psi(c_1), k)] \end{aligned} \quad (11)$$

(верхние индексы “+”, “-” соответствуют значениям величин на верхнем и нижнем берегах трещин;  $E$  — модуль Юнга).

2.2. *Задача Б (наличие зон пластичности)*. Рассматривается бесконечная изотропная упругая идеально пластическая пластина с пятью прямолинейными трещинами  $L_1, L_2, \dots, L_5$  со слившимися между трещинами  $L_1, L_2$  и  $L_4, L_5$  зонами пластичности. Трещины находятся на вещественной оси и занимают интервалы  $(-a_1, -d_2)$ ,  $(-d_1, -b_1)$ ,  $(-c_1, c_1)$ ,  $(b_1, d_1)$ ,  $(d_2, a_1)$  соответственно. Напряжения на бесконечно удаленных границах пластины равны нулю. Предполагается, что материал в зоне пластичности сжимается напряжениями  $(t/a)\sigma_{ye}$ .

В задаче Б ставятся следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad y \rightarrow \pm\infty, \quad -\infty < x < \infty, \\ \sigma_{yy} = \frac{t}{a}\sigma_{ye}, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad y \rightarrow 0, \quad x \in \bigcup_{n=1}^8 \Gamma_n. \end{aligned} \quad (12)$$

С использованием алгоритма, приведенного в п. 1, и граничных условий (12) можно получить выражение для комплексной функции  $\Phi(z)$  в данной задаче:

$$\Phi_B(z) = \frac{\sigma_{ye}}{2\pi i \chi(z)} \left( \int_{L'} \frac{t\chi(t)}{a(t-z)} dt + i(D_1 z^2 + D_2 z + D_3) \right). \quad (13)$$

Здесь

$$L' = [-a, -a_1] \cup [-d_2, -d_1] \cup [-b_1, -b] \cup [-c, -c_1] \cup [c_1, c] \cup [b, b_1] \cup [d_1, d_2] \cup [a_1, a],$$

нижний индекс “Б” соответствует задаче Б.

В силу симметрии нагрузки константы  $D_1, D_3$  равны нулю, а константа  $D_2$  вычисляется с использованием уравнения (4):

$$D_2 = -\frac{2m}{k} \left( a^2 m^2 (J_1 - \lambda_k^2 J_2) + a^2 W_1(m) + \frac{1}{2} [c_1^2 \tau(\psi(c_1), k) - b^2 W_2(k_2) + c^2 \lambda_k^2 W_3(m_2)] \right). \quad (14)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \chi(t) = \chi(-t) = i\sqrt{a^2 - t^2} \sqrt{t^2 - b^2} \sqrt{t^2 - c^2}, \quad -a < t < -b \quad \text{или} \quad b < t < a, \\ \chi(t) = \chi(-t) = -i\sqrt{a^2 - t^2} \sqrt{b^2 - t^2} \sqrt{c^2 - t^2}, \quad -c < t < c, \end{aligned}$$

интеграл в уравнении (13) можно записать в простой форме

$$\begin{aligned} \int_{L'} \frac{t\chi(t)}{a(t-z)} dt &= \frac{2z}{a} \left( \int_{a_1}^a \frac{t\chi(t)}{t^2 - z^2} dt + \int_b^{b_1} \frac{t\chi(t)}{t^2 - z^2} dt + \int_{d_1}^{d_2} \frac{t\chi(t)}{t^2 - z^2} dt + \int_{c_1}^c \frac{t\chi(t)}{t^2 - z^2} dt \right) = \\ &= 2iza^2 \left\{ \frac{m^3}{k} \left[ I_{11} + \left( 1 - \frac{1}{n^2(z)} \right) H_{11}(z) \right] - \frac{m_2^2}{k_2} \left[ I_{22} + \left( 1 - \frac{1}{n_2^2(z)} \right) H_{22}(z) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

После подстановки уравнений (14), (15) в уравнение (13) и ряда вычислений можно получить следующее выражение для комплексной функции  $\Phi_B(z)$ :

$$\begin{aligned} \Phi_B(z) = \frac{za^2\sigma_{ye}}{\pi\chi(z)} \left\{ \frac{m^3}{k} \left[ I_{11} + \left( 1 - \frac{1}{n^2(z)} \right) H_{11}(z) \right] - \right. \\ \left. - \frac{m_2^2}{k_2} \left[ I_{22} + \left( 1 - \frac{1}{n_2^2(z)} \right) H_{22}(z) \right] + \frac{D_2}{2a^2} \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах  $z = a, b, c$  трещин отрыва вычисляются в результате подстановки выражения для  $\Phi_B(z)$  (16) в уравнение (5):

$$K_B(a) = \frac{2a^3 \sigma_{ye}}{\sqrt{a\pi} \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{a^2 - c^2}} \left\{ \frac{m^3}{k} (I_{11} + H_{11}(a)) - \frac{m_2^2}{k_2} \left[ I_{22} + \left(1 - \frac{1}{m_2^2}\right) H_{22}(a) \right] + \frac{D_2}{2a^2} \right\}; \quad (17)$$

$$K_B(b) = \frac{-2a^2 b \sigma_{ye}}{\sqrt{b\pi} \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{b^2 - c^2}} \left\{ \frac{m^3}{k} I_{11} - \frac{m_2^2}{k_2} \left[ I_{22} + \left(1 - \frac{1}{k_2^2}\right) H_{22}(b) \right] + \frac{D_2}{2a^2} \right\}; \quad (18)$$

$$K_B(c) = \frac{-2a^2 c \sigma_{ye}}{\sqrt{c\pi} \sqrt{b^2 - c^2} \sqrt{a^2 - c^2}} \left\{ \frac{m^3}{k} \left[ I_{11} + \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) H_{11}(c) \right] - \frac{m_2^2}{k_2} I_{22} + \frac{D_2}{2a^2} \right\}. \quad (19)$$

Затем с использованием уравнений (2), (16) можно получить выражения для смещений в вершинах трещин:

$$v_B^\pm(a_1) = \mp \frac{2\sigma_{ye}}{\pi E} [A_1(\varphi(a_1)) + A_2(\varphi(a_1))],$$

$$v_B^\pm(b_1) = \pm \frac{2\sigma_{ye}}{\pi E} [B_1(\varphi(b_1)) + B_2(\varphi(b_1))], \quad v_B^\pm(c_1) = \mp \frac{2\sigma_{ye}}{\pi E} [C_1(\psi(c_1)) + C_2(\psi(c_1))].$$

**3. Результаты исследования.** Ниже с использованием коэффициента интенсивности напряжений определяется прочность пластины при наличии в ней трещин, а также исследуется влияние линейного распределения предела текучести на длину зоны текучести.

3.1. *Длина зоны пластичности.* Согласно модели Дагдейла [2] напряжения остаются конечными в каждой вершине трещины. Следовательно, в каждой вершине трещины коэффициенты интенсивности напряжений обращаются в нуль:

$$K_A(z) + K_B(z) = 0. \quad (20)$$

После подстановки коэффициентов интенсивности напряжений  $K_A(a)$  и  $K_B(a)$  из уравнений (8), (17) в уравнение (20) получаем нелинейное уравнение

$$\frac{m^2}{k^2} (1 - \lambda_k^2) \left( \frac{\sigma_\infty}{\sigma_{ye}} \right)_a + \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{m^3}{k} (I_{11} + H_{11}(a)) - \frac{m_2^2}{k_2} \left[ I_{22} + \left(1 - \frac{1}{m_2^2}\right) H_{22}(a) \right] + \frac{D_2}{2a^2} \right\} = 0. \quad (21)$$

Аналогично с использованием уравнений (9), (18), (20) находим уравнение для вершины трещины  $z = b$ :

$$\frac{m^2}{k^2} (1 - k^2 - \lambda_k^2) \left( \frac{\sigma_\infty}{\sigma_{ye}} \right)_b + \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{m^3}{k} I_{11} - \frac{m_2^2}{k_2} \left[ I_{22} + \left(1 - \frac{1}{k_2^2}\right) H_{22}(b) \right] + \frac{D_2}{2a^2} \right\} = 0. \quad (22)$$

С помощью уравнений (10), (19), (20) получаем уравнение для вершины трещины  $z = c$ :

$$\frac{m^2}{k^2} \lambda_k^2 \left( \frac{\sigma_\infty}{\sigma_{ye}} \right)_c - \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{m^3}{k} \left[ I_{11} + \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) H_{11}(c) \right] - \frac{m_2^2}{k_2} I_{22} + \frac{D_2}{2a^2} \right\} = 0. \quad (23)$$

3.2. *Раскрытие трещины в вершине.* Раскрытие трещин в вершинах  $t = a_1, b_1, c_1$  определяется по формуле [15]

$$\delta(t) = (v_A^+(t) + v_B^+(t)) - (v_A^-(t) + v_B^-(t)). \quad (24)$$

Выражения для раскрытия трещин в вершинах  $x = \pm a_1, \pm b_1, \pm c_1$  получаются путем подстановки в уравнение (24) соответствующих значений компонент смещения  $v_A^\pm(t)$  из уравнений (11) для задачи А и  $v_B^\pm(t)$  из уравнений (21)–(23) для задачи Б. В результате после ряда вычислений получаются аналитические выражения для раскрытия трещин в вершинах:

$$\begin{aligned}\delta(a_1) &= \frac{4\sigma_{ye}}{E} \left[ \frac{am}{k} \left( \frac{\sigma_\infty}{\sigma_{ye}} \right)_a \tau(\varphi(a_1), k) - \frac{1}{\pi} [A_1(\varphi(a_1)) + A_2(\varphi(a_1))] \right], \\ \delta(b_1) &= \frac{4\sigma_{ye}}{E} \left[ \frac{am}{k} \left( \frac{\sigma_\infty}{\sigma_{ye}} \right)_b \tau(\varphi(b_1), k) + \frac{1}{\pi} [B_1(\varphi(b_1)) + B_2(\varphi(b_1))] \right], \\ \delta(c_1) &= \frac{4\sigma_{ye}}{E} \left[ \frac{am}{k} \left( \frac{\sigma_\infty}{\sigma_{ye}} \right)_c [\lambda_k^2 F(\psi(c_1), k) - \rho_1(\psi(c_1), k)] - \frac{1}{\pi} [C_1(\psi(c_1)) + C_2(\psi(c_1))] \right].\end{aligned}\quad (25)$$

Справедливость выражений, полученных в данной работе, подтверждена в ранее опубликованных работах. Выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещин  $a, b, c$  (соотношения (8)–(10)) подтверждаются выражениями, приведенными в работе [14]. Уравнения (21)–(23), (25) подтверждаются выражениями, полученными в работе [8] для предельного случая  $d_1 = d_2$ .

**4. Обсуждение результатов.** Получить решения нелинейных уравнений (21)–(23) для длины зоны пластичности в явном виде практически невозможно. Ниже приводятся результаты численного решения, исследуется влияние линейного распределения напряжения на длину зоны пластичности и величину раскрытия трещины в вершине, определяется остаточная прочность пластины.

**4.1. Оценка длины зоны пластичности.** На рис. 2 приведена зависимость нормированной длины зоны пластичности  $\Gamma_8/L_5$  от нормированной приложенной нагрузки  $\sigma_\infty/\sigma_{ye}$  при различных значениях параметра  $G = 2c_1/(b_1 + c_1)$ , характеризующего расстояние между трещинами. Небольшое значение  $G$  ( $G = 0,5$ ) свидетельствует о том, что трещины  $R_1, R_2, R_3$  расположены на большом расстоянии друг от друга, в то время как большое значение  $G$  ( $G = 0,9$ ) означает, что трещины расположены в непосредственной близости друг от друга. Длина зоны пластичности  $|\Gamma_8|$  увеличивается по мере увеличения нагрузки, приложенной на границе пластины. При  $G = 0,5$  несущая способность пластины существенно больше, чем при  $G = 0,9$ .

На рис. 3 представлена зависимость нормированной длины зоны пластичности  $\Gamma_6/L_4$ , образующейся в окрестности вершин трещины  $z = \pm b_1$ , при различных расстояниях между трещинами. Из приведенных зависимостей следует, что на длину зоны пластичности влияют как наличие соседних трещин (слившиеся зоны пластичности), так и приложенное напряжение. Таким образом, длина зоны пластичности  $\Gamma_6$  существенно зависит от приложенной нагрузки и предела текучести. Кроме того, длина зоны пластичности  $|\Gamma_6|$  больше длины зоны пластичности  $|\Gamma_8|$ .

На рис. 4 приведена зависимость нормированной длины зоны пластичности  $\Gamma_5/L_3$ , образующейся в вершинах трещины  $x = \pm c_1$ , от приложенной нагрузки  $(\sigma_\infty/\sigma_{ye})_c$  при различных значениях параметра  $G$ . Следует отметить, что в силу изменения предела текучести по линейному закону в вершине  $c$  возникает зона текучести большой длины  $|\Gamma_5|$ , что обуславливает низкую несущую способность пластины.

**4.2. Оценка величины раскрытия трещин в вершинах.** Величины раскрытия трещин в вершинах  $\delta(a_1), \delta(b_1), \delta(c_1)$  определены в формулах (25). Раскрытие трещины в вершине нормируется длиной этой трещины.

На рис. 5 показана зависимость величины раскрытия трещины  $\delta(a_1)/L_5$  в вершинах  $\pm a_1$  от приложенной нагрузки  $(\sigma_\infty/\sigma_{ye})_a$  при различных значениях параметра  $G$ , на

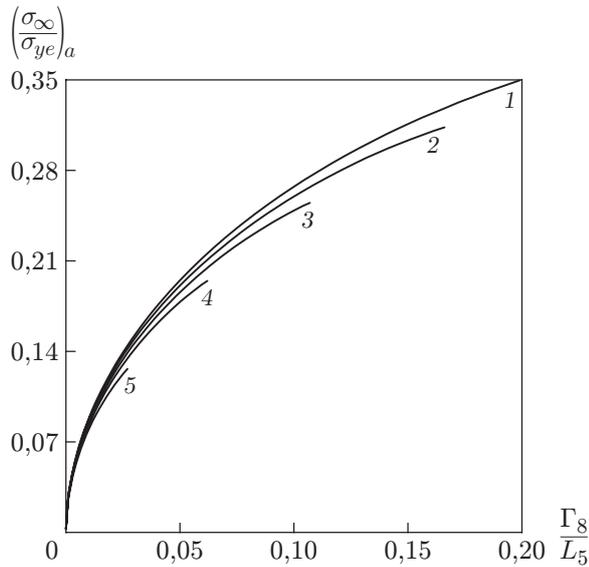


Рис. 2

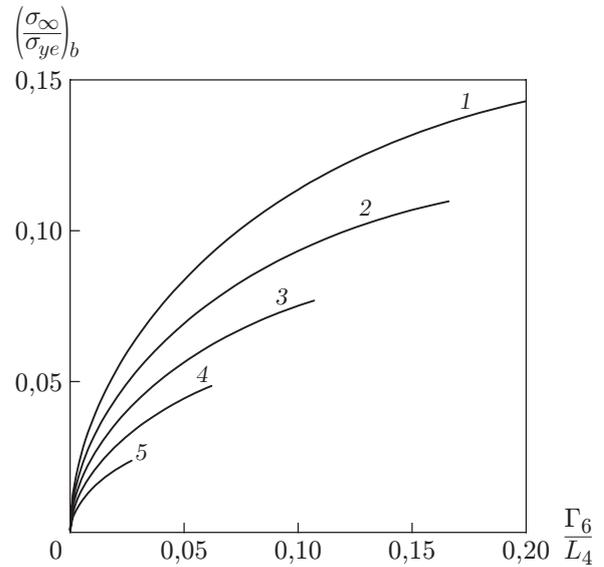


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость нормированной длины зоны пластичности  $\Gamma_8/L_5$  от нормированной приложенной нагрузки  $(\sigma_\infty/\sigma_{ye})_a$  при различных значениях параметра  $G$ :

1 —  $G = 0,5$ , 2 —  $G = 0,6$ , 3 —  $G = 0,7$ , 4 —  $G = 0,8$ , 5 —  $G = 0,9$

Рис. 3. Зависимость нормированной длины зоны пластичности  $\Gamma_6/L_4$  от приложенной нагрузки  $(\sigma_\infty/\sigma_{ye})_b$  при различных значениях  $G$ :

1 —  $G = 0,5$ , 2 —  $G = 0,6$ , 3 —  $G = 0,7$ , 4 —  $G = 0,8$ , 5 —  $G = 0,9$

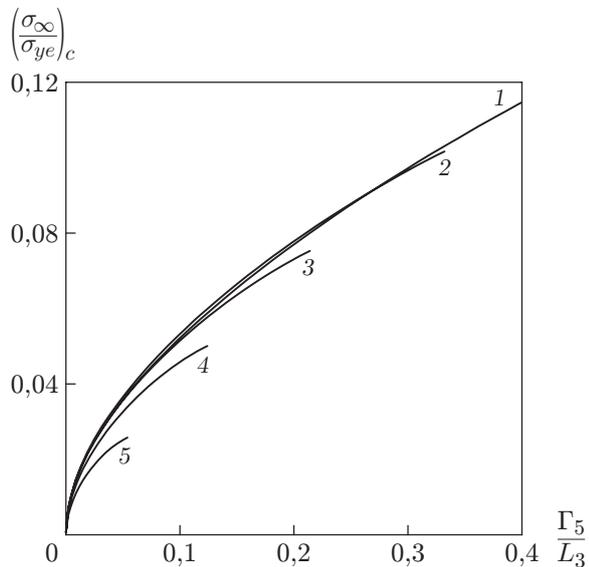


Рис. 4

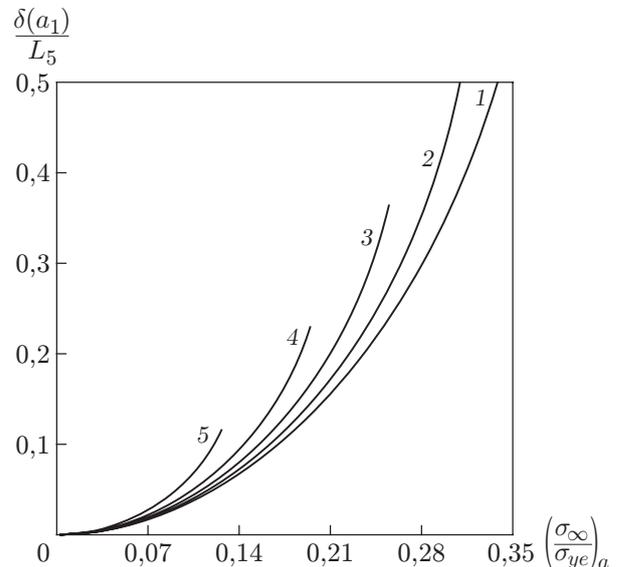


Рис. 5

Рис. 4. Зависимость нормированной длины зоны пластичности  $\Gamma_5/L_3$  от приложенной нагрузки  $(\sigma_\infty/\sigma_{ye})_c$  при различных значениях параметра  $G$ :

1 —  $G = 0,5$ , 2 —  $G = 0,6$ , 3 —  $G = 0,7$ , 4 —  $G = 0,8$ , 5 —  $G = 0,9$

Рис. 5. Зависимость величины раскрытия трещины  $\delta(a_1)/L_5$  в вершинах  $\pm a_1$  от приложенной нагрузки  $(\sigma_\infty/\sigma_{ye})_a$  при различных значениях параметра  $G$ :

1 —  $G = 0,5$ , 2 —  $G = 0,6$ , 3 —  $G = 0,7$ , 4 —  $G = 0,8$ , 5 —  $G = 0,9$

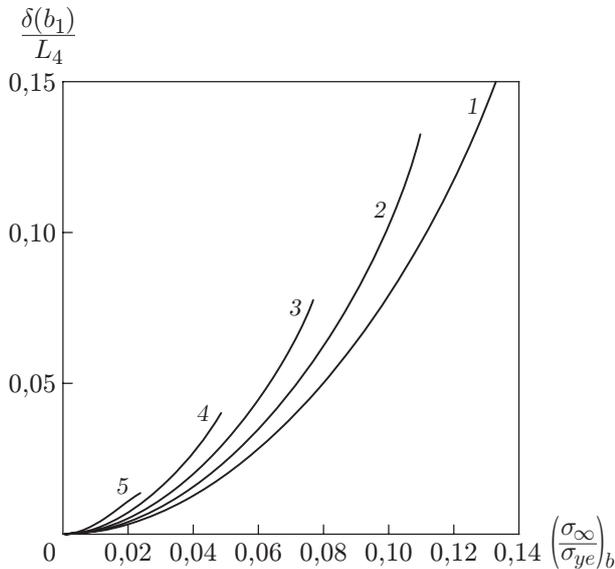


Рис. 6

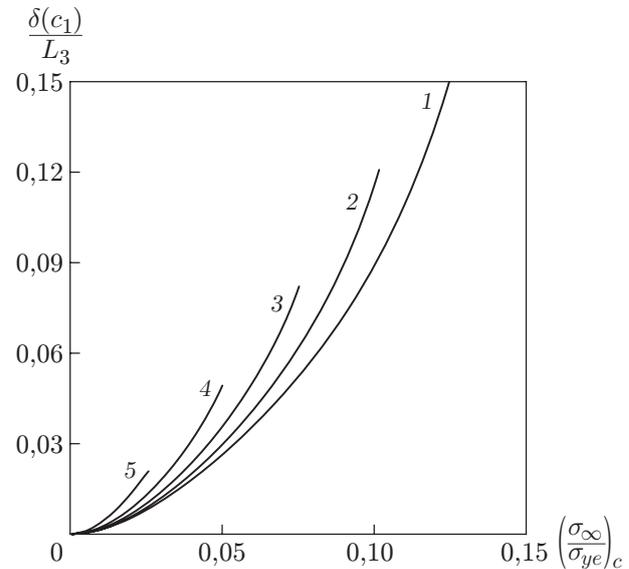


Рис. 7

Рис. 6. Зависимость величины раскрытия трещины  $\delta(b_1)/L_4$  в вершинах  $\pm b_1$  от приложенной нагрузки  $(\sigma_\infty/\sigma_{ye})_b$  при различных значениях параметра  $G$ :  
 1 —  $G = 0,5$ , 2 —  $G = 0,6$ , 3 —  $G = 0,7$ , 4 —  $G = 0,8$ , 5 —  $G = 0,9$

Рис. 7. Зависимость величины раскрытия трещины  $\delta(c_1)/L_3$  в вершинах  $\pm c_1$  от приложенной нагрузки  $(\sigma_\infty/\sigma_{ye})_c$  при различных значениях параметра  $G$ :  
 1 —  $G = 0,5$ , 2 —  $G = 0,6$ , 3 —  $G = 0,7$ , 4 —  $G = 0,8$ , 5 —  $G = 0,9$

рис. 6 — зависимость величины раскрытия трещины  $\delta(b_1)/L_4$  в вершинах  $\pm b_1$  от приложенной нагрузки  $(\sigma_\infty/\sigma_{ye})_b$  при различных значениях параметра  $G$ . Трещины раскрываются по мере увеличения нагрузки, приложенной на границе пластины. Из зависимостей, приведенных на рис. 5, 6, следует, что величина раскрытия в вершине внешней трещины больше, чем в вершине внутренней трещины. Это обусловлено небольшим пределом текучести  $(b/a)\sigma_{ye}$  в вершинах  $\pm b_1$ .

На рис. 7 приведена зависимость величины раскрытия трещины  $\delta(c_1)/L_3$  в вершинах  $\pm c_1$  от приложенной нагрузки  $(\sigma_\infty/\sigma_{ye})_c$  при различных значениях параметра  $G$ . Следует отметить, что в вершине  $c$  трещина раскрывается очень быстро при небольшом увеличении приложенной нагрузки, поскольку наличие крупных внешних трещин оказывает на нее большое влияние.

На рис. 8–10 приведены зависимости отношения величин раскрытия трещин в вершинах  $\delta(a_1)$ ,  $\delta(b_1)$  и  $\delta(c_1)$  к величине раскрытия одиночной трещины в вершине  $\delta_0$  от приложенной нагрузки.

Из зависимостей, приведенных на рис. 8, следует, что величина раскрытия трещины в наиболее удаленной вершине очень мала по сравнению с величиной раскрытия одиночной центральной трещины длиной  $2a_1$ , в случае когда трещины расположены на большом расстоянии друг от друга. Однако величина раскрытия трещины в наиболее удаленной вершине равна величине раскрытия одиночной трещины, в случае если трещины расположены на малом расстоянии друг от друга. В то же время на внутреннюю вершину внешней трещины оказывает влияние наличие центральной трещины, поскольку величина раскрытия этой трещины в вершине приблизительно в два раза превышает величину раскрытия одиночной центральной трещины, в случае если трещины расположены на небольшом расстоянии друг от друга.

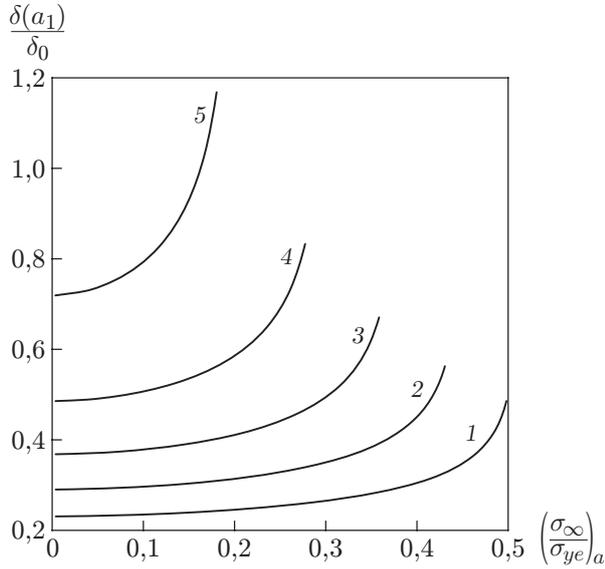


Рис. 8

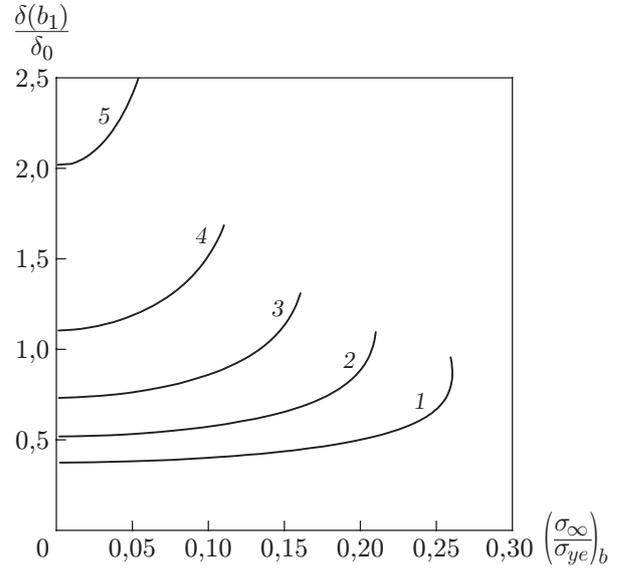


Рис. 9

Рис. 8. Зависимость величины раскрытия трещины  $\delta(a_1)/\delta_0$  от приложенной нагрузки  $(\sigma_\infty/\sigma_{ye})_a$  при различных значениях параметра  $G$ :  
 1 —  $G = 0,5$ , 2 —  $G = 0,6$ , 3 —  $G = 0,7$ , 4 —  $G = 0,8$ , 5 —  $G = 0,9$

Рис. 9. Зависимость величины раскрытия трещины  $\delta(b_1)/\delta_0$  от приложенной нагрузки  $(\sigma_\infty/\sigma_{ye})_b$  при различных значениях параметра  $G$ :  
 1 —  $G = 0,5$ , 2 —  $G = 0,6$ , 3 —  $G = 0,7$ , 4 —  $G = 0,8$ , 5 —  $G = 0,9$

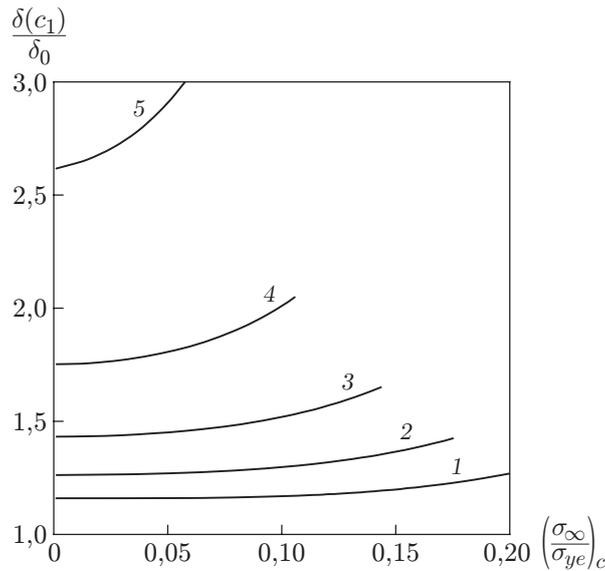


Рис. 10. Зависимость величины раскрытия трещины  $\delta(c_1)/\delta_0$  от приложенной нагрузки  $(\sigma_\infty/\sigma_{ye})_c$  при различных значениях параметра  $G$ :  
 1 —  $G = 0,5$ , 2 —  $G = 0,6$ , 3 —  $G = 0,7$ , 4 —  $G = 0,8$ , 5 —  $G = 0,9$

Из зависимостей, приведенных на рис. 10, следует, что влияние внешних больших трещин на малую центральную трещину очень существенно. Таким образом, при всех рассмотренных значениях параметра  $G$  величина раскрытия внутренней трещины в вершине  $c_1$  больше величины раскрытия одиночной центральной трещины той же длины.

**5. Используемые математические выражения.** Ниже приведены выражения, используемые в данной работе:

$$\begin{aligned}
 J_i &= j_i(\varphi(a_1), k) - j_i(\varphi(b_1), k) + j_i(\varphi(b), k) + j_i(\varphi(d_1), k) - j_i(\varphi(d_2), k), \\
 I_{2i} &= l_i(\vartheta(c_1), m_2, k_2) - l_i(\vartheta(c), m_2, k_2), \\
 I_{1i} &= l_i(\varphi(a_1), m, k) - l_i(\varphi(b_1), m, k) + l_i(\varphi(b), m, k) + l_i(\varphi(d_1), m, k) - l_i(\varphi(d_2), m, k), \\
 H_{1i}(x) &= h_i(\varphi(a_1), m, k, n(x)) - h_i(\varphi(b_1), m, k, n(x)) + \\
 &\quad + h_i(\varphi(b), m, k, n(x)) + h_i(\varphi(d_1), m, k, n(x)) - h_i(\varphi(d_2), m, k, n(x)), \\
 H_{2i}(x) &= h_i(\vartheta(c_1), m_2, k_2, n_2(x)) - h_i(\vartheta(c), m_2, k_2, n_2(x)), \\
 F_1 &= F(\varphi(a_1), k) - F(\varphi(b_1), k) + F(\varphi(b), k) + F(\varphi(d_1), k) - F(\varphi(d_2), k), \\
 E_1 &= E(\varphi(a_1), k) - E(\varphi(b_1), k) + E(\varphi(b), k) + E(\varphi(d_1), k) - E(\varphi(d_2), k), \\
 F_2 &= F(\Theta_2(\vartheta(c_1), m_2), k) - F(\Theta_2(\vartheta(c), m_2), k), \\
 E_2 &= E(\Theta_2(\vartheta(c_1), m_2), k) - E(\Theta_2(\vartheta(c), m_2), k), \\
 \Theta_1(\theta, p) &= \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{p \cos \theta}{\sqrt{1-p^2}} \right), \quad \Theta_2(\theta, p) = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-p^2}}{p \cos \theta} \right), \\
 \tau(\theta, p) &= E(\theta, p) - \lambda_p^2 F(\theta, p), \quad \lambda_p^2 = E(p)/F(p), \\
 M(\theta, p, q) &= \frac{1-q^2}{q^2 \sqrt{1-p^2}} \Pi(\theta_1(\theta, p), q^2, q_1) + \frac{1}{pq} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{pq \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1-p^2 \sin^2 \theta} \sqrt{1-q^2 \sin^2 \theta}} \right), \\
 \rho_1(\theta, p) &= E(\theta, p) - \operatorname{tg} \theta \sqrt{1-p^2 \sin^2 \theta}, \quad \rho_2(z, p) = E(z, p) - \operatorname{tg} z \sqrt{1-p^2 \sin^2 z}, \\
 S(\theta, p, q) &= \frac{p^2 \sin 2z \sqrt{1-q^2 \sin^2 \theta}}{2(1-p^2 \sin^2 \theta)}, \quad \Lambda(\theta, p, q) = \frac{\sin 2z \sqrt{1-q^2 \sin^2 \theta}}{4\sqrt{1-p^2 \sin^2 \theta}}, \\
 \sin \psi(t) &= \sqrt{\frac{c^2-t^2}{b^2-t^2}}, \quad \sin \varphi(t) = \frac{1}{k \sin \psi(t)}, \quad \sin \xi(t) = \frac{\sin \psi(t)}{k_2}, \quad \sin \vartheta(t) = \frac{t}{c}, \\
 \sin \varphi(t) &= \sqrt{\frac{a^2-t^2}{a^2-b^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \quad m = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}, \quad n(t) = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-t^2}}, \\
 k_1 &= k k_2, \quad k_2 = \frac{c}{b}, \quad m_2 = \frac{c}{a}, \quad n_2(t) = \frac{c}{t}, \quad q_1 = \sqrt{\frac{q^2-p^2}{1-p^2}}, \quad q_2 = \frac{q_1}{q}, \\
 r_1 &= \sqrt{\frac{r^2-p^2}{1-p^2}}, \quad r_2 = \frac{r_1}{r}, \\
 A_1(\theta) &= a \left\{ E(\theta, k) [I_{13} - m_2^2 W_3(m_2)] - F(\theta, k) \left( E_1 - m^2 I_{11} + \frac{k D_2}{a^2 m} - \rho_1(\psi(c_1), k) - W_1(m) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2\Lambda(\theta, 0, k) \left[ n^2(a_1) H_{13}(a_1) + m^2 \left( F(\psi(c_1), k) - \frac{a_1^2}{a_1^2 - c^2} W_7(N_3(a)) \right) \right] \right\},
 \end{aligned}$$

$$A_2(\theta) = \frac{ik}{a^2m} \left( \frac{a_1^2\chi(a_1)}{a^2 - a_1^2} \Pi(\theta, n^2(a_1), k) - \frac{b_1^2\chi(b_1)}{a^2 - b_1^2} \Pi(\theta, n^2(b_1), k) + \frac{d_1^2\chi(d_1)}{a^2 - d_1^2} \Pi(\theta, n^2(d_1), k) - \right. \\ \left. - \frac{d_2^2\chi(d_2)}{a^2 - d_2^2} \Pi(\theta, n^2(d_2), k) + \frac{c_1^2\chi(c_1)}{a^2 - c_1^2} \Pi(\theta, n^2(c_1), k) \right),$$

$$B_1(\theta) = -a \left( 2E_1S_1(m) + F_1(\rho_2(\theta, k) - S_4(m) - 2S_2(m)) - \right. \\ \left. - \frac{m_2^2}{k^2} (E_1 + E_2)S_3(k_2) + F_2(\rho_1(\theta, k) + S_1(m)) \right),$$

$$B_2(\theta) = T_1F(\theta, k) + T_2(b_1) + T_3(a_1) - T_3(b_1) + \\ + \frac{2am^2}{k^2} \left( F_2 - E_2 - \frac{2km_2^2\Lambda(\vartheta(c_1), m_2, k_2)}{mk_2 \sin \vartheta(c_1)} \right) \rho_2(\theta, k) - \\ - \frac{2(a^2 - c_1^2)}{a(a^2 - c^2)} \Lambda(\Theta_2(\vartheta(c_1), m_2), 0, k) \left( a^2S_5(m) + \frac{c_1^2(a^2 - c_1^2)}{b^2 - c_1^2} S_6(n_4(c_1)) - c_1^2F(\theta, k) \right),$$

$$C_1(\theta) = -a[2E_1W_4(m) - F_1(\rho_1(\theta, k) + W_1(m) + 2W_5(m)) + m_2^2(E_1 + E_2)W_3(k_2) - \\ - F_2(\rho_2(\theta, k) + W_4(m))],$$

$$C_2(\theta) = -T_1F(\theta, k) + T_2(c_1) - T_4(a_1) + T_4(b_1) - \\ - \frac{2am^2}{k^2} \left( F_2 - E_2 - \frac{2km_2^2\Lambda(\vartheta(c_1), m_2, k_2)}{mk_2 \sin \vartheta(c_1)} \right) \rho_1(\theta, k) + \\ + \frac{2(a^2 - c_1^2)}{a(a^2 - c^2)} \Lambda(\Theta_2(\vartheta(c_1), m_2), 0, k) \left( a^2W_6(m) + \frac{c_1^2(a^2 - c_1^2)}{c^2 - c_1^2} W_7(n_3(c_1)) - c_1^2F(\theta, k) \right),$$

$$T_1 = 2am^2I_{11} - \frac{2bckI_{22}}{am} + \frac{D_2k}{am},$$

$$T_2(z) = \frac{z^2\sqrt{z^2 - b^2}\sqrt{z^2 - c^2}}{a\sqrt{a^2 - c^2}\sqrt{a^2 - z^2}} \left[ \Pi(\varphi(a), n^2(z), k) - \Pi(\varphi(b), n^2(z), k) - \right. \\ \left. - \Pi\left(\Theta_2(\vartheta(c_1), m_2), \frac{n_2^2(z) - m_2^2}{n_2^2(z)(1 - m_2^2)}, k\right) \right],$$

$$T_3(z) = 2am^2\Lambda(\varphi(x), 0, k) \left( F(\varphi(b_1), k) + \frac{z^2S_6(n_4(z))}{b^2 - z^2} \right),$$

$$T_4(z) = 2am^2\Lambda(\varphi(x), 0, k) \left( F(\psi(c_1), k) + \frac{z^2W_7(n_3(z))}{c^2 - z^2} \right),$$

$$j_1(\theta, q) = \frac{\Lambda(\theta, 0, q)}{3} - \frac{1 - q^2}{6q^2} F(\theta, q) + \left( \frac{2 - q^2}{3q^2} - \frac{1 - q^2 \sin^2 z}{2q^2} \right) E(\theta, q),$$

$$j_2(\theta, q) = \frac{E(\theta, q)}{2q^2} - \frac{1 - q^2 \sin^2 z}{2q^2} F(\theta, q),$$

$$W_1(p) = \frac{p^2}{3k^2} \left( (1 - 2k^2)\rho_1(\psi(c_1), k) + (k^2 - 1)F(\psi(c_1), k) + \frac{2(1 - k^2)}{\cos^4 \psi(c_1)} \Lambda(\psi(c_1), 0, k) \right),$$

$$W_2(p) = E(\psi(c_1), k) - (1 - p^2)(F(\psi(c_1), k) - \rho_1(\psi(c_1), k)),$$

$$W_3(p) = F(\psi(c_1), k) + \left( \frac{1}{p^2} - 1 \right) \rho_1(\psi(c_1), k),$$

$$\begin{aligned}
W_4(p) &= \frac{p^2}{k^2} [(1 - k^2)F(\psi(c_1), k) - \rho_1(\psi(c_1), k)], \\
W_5(p) &= \frac{p^2}{3k^2} \left( 2(1 - k^2)F(\psi(c_1), k) + (k^2 - 2)\rho_1(\psi(c_1), k) + \frac{2(1 - k^2)}{\cos^4 \psi(c_1)} \Lambda(\psi(c_1), 0, k) \right), \\
W_6(p) &= \frac{p^2}{k^2} [F(\psi(c_1), k) - \rho_1(\psi(c_1), k)], \\
W_7(p) &= \frac{1}{p^2} [F(\psi(c_1), k) + (p^2 - 1)\Pi(\psi(c_1), p^2, k)], \\
S_1(p) &= \frac{p^2}{k^2} [\rho_2(\varphi(b_1), k) - (1 - k^2)F(\varphi(b_1), k)], \\
S_2(p) &= \frac{p^2}{3k^2} \left( (2 - k^2)\rho_2(\varphi(b_1), k) - 2(1 - k^2)F(\varphi(b_1), k) + \frac{1 - k^2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi(b_1)}} S(\varphi(b_1), k, 0) \right), \\
S_3(p) &= (1 - p^2)\Pi(\varphi(b_1), k^2, k) + p^2 F(\varphi(b_1), k), \\
S_4(p) &= \frac{p^2}{3k^2} \left( (2k^2 - 1)\rho_2(\varphi(b_1), k) + (1 - k^2)F(\varphi(b_1), k) + \frac{1 - k^2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi(b_1)}} S(\varphi(b_1), k, 0) \right), \\
S_5(p) &= \frac{p^2}{k^2} [F(\varphi(b_1), k) - \rho_2(\varphi(b_1), k)], \\
S_6(p) &= \frac{1}{p^2} [(p^2 - k^2)\Pi(\varphi(b_1), p^2, k) + k^2 F(\varphi(b_1), k)], \\
l_1(\theta, p, q) &= \frac{1}{3q^2} [(1 - q^2)F(\theta, q) + (2q^2 - 1)E(\theta, q) - 2q^2 \Lambda(\theta, 0, q)], \\
l_2(\theta, p, q) &= \frac{(p^2 + q^2 - 2p^2 q^2) \sqrt{1 - p^2}}{3p^2 q} E(\Theta_1(\theta, q), q_2) - \\
&\quad - \frac{2p^2(1 - q^2) + q^2(1 - p^2 \sin^2 \theta)}{3p^2} \frac{2\Lambda(\theta, q, p)}{\sin \theta} - \frac{2(1 - q^2) \sqrt{1 - p^2}}{3q} F(\Theta_1(\theta, q), q_2), \\
l_3(\theta, p, q) &= \frac{1}{q^2} ((q^2 - p^2)F(\theta, q) + p^2 E(\theta, q)), \\
h_1(\theta, p, q, r) &= \frac{q^2}{r^2} F(\theta, q) - E(\theta, q) + \left( 1 - \frac{q^2}{r^2} \right) \Pi(\theta, r^2, q), \\
h_2(\theta, p, q, r) &= -\frac{2p^2}{\sin \theta} \Lambda(\theta, p, q) - q \sqrt{1 - p^2} [E(\Theta_2(\theta, p), q_2) - F(\Theta_2(\theta, p), q_2)] + \\
&\quad + \frac{p^2(r^2 - q^2)}{qr^2 \sqrt{1 - p^2}} \Pi(\Theta_2(\theta, p), r_2^2, q_2), \\
h_3(\theta, p, q, r) &= \frac{1}{r^2} ((r^2 - p^2)\Pi(\theta, r^2, q) + p^2 F(\theta, q)).
\end{aligned}$$

**Заключение.** На основе численного исследования задачи о растяжении пластины при наличии в ней пяти коллинеарных прямолинейных трещин со сливающимися зонами пластичности можно сделать следующие выводы.

Несущая способность пластины в вершинах внешних трещин значительно больше несущей способности в вершинах внутренних трещин.

Вершины внутренних трещин имеют меньшую несущую способность по сравнению с несущей способностью пластины.

Величина раскрытия трещин в вершинах  $\pm a_1$  равна величине раскрытия одиночных центральных трещин, в случае если трещины расположены в непосредственной близости друг от друга.

В случае пяти коллинеарных прямых трещин со сливающимися зонами текучести величина раскрытия внутренних трещин в вершинах больше величины раскрытия одиночной трещины.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Blandford G. E., Ingraffea A. R., Liggett J. A.** Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method // Intern. J. Numer. Methods Engng. 1981. V. 17, N 3. P. 387–404.
2. **Dugdale D. S.** Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8, N 2. P. 100–104.
3. **Kanninen M.** A solution for a Dugdale crack subjected to a linearly varying tensile loading // Intern. J. Engng Sci. 1970. V. 8, N 1. P. 85–95.
4. **Harrop L. P.** Application of a modified Dugdale model to the k vs cod relation // Engng Fracture Mech. 1978. V 10, N 4. P. 807–816.
5. **Theocaris P. S.** Dugdale models for two collinear unequal cracks // Engng Fracture Mech. 1983. V. 18, N 3. P. 545–559.
6. **Collins R. A., Cartwright D. J.** An analytical solution for two equal-length collinear strip yield cracks // Engng Fracture Mech. 2001. V. 68, N 7. P. 915–924.
7. **Hasan S., Akhtar N.** Dugdale model for three equal collinear straight cracks: An analytical approach // Theor. Appl. Fracture Mech. 2015. V. 78. P. 40–50.
8. **Hasan S., Akhtar N.** Mathematical model for three equal collinear straight cracks: A modified Dugdale approach // Strength, Fracture Complexity. 2015. V. 9, N 3. P. 211–232.
9. **Elangovan R., Ramamurthy T. S., Dattaguru B., Selladurai V.** Analytical determination of residual strength and linkup strength for flat panels with multiple site damage // Arab. J. Sci. Engng. 2014. V. 39, N 3. P. 2271–2276.
10. **Xu Z., Xie W.** A modified residual strength prediction method for aluminum alloy plates with msd // Mech. Res. Comm. 2020. V. 109. P. 1–5.
11. **Akhtar N., Hasan S.** Assessment of the interaction between three collinear unequal straight cracks with unified yield zones // AIMS Materials Sci. 2017. V. 4, N 2. P. 302–316.
12. **Nishimura T.** Strip yield analysis on coalescence of plastic zones for multiple cracks in a riveted stiffened sheet // J. Engng Materials Technol. 1999. V. 121, N 3. P. 352–359.
13. **Gdoutos E. E.** Fracture mechanics: An introduction. Dordrecht: Springer Intern. Publ., 2005.
14. **Tada H.** The stress analysis of cracks handbook / H. Tada, P. C. Paris, G. R. Erwin. N. Y.: ASME Press, 2000.
15. **Feng X.-Q., Gross D.** On the coalescence of collinear cracks in quasi-brittle materials // Engng Fracture Mech. 2000. V. 65, N 5. P. 511–524.

*Поступила в редакцию 28/III 2022 г.,  
после доработки — 28/III 2022 г.  
Принята к публикации 26/V 2022 г.*