

УДК 535.4

ФУРЬЕ-ОПТИКА ТРЁХМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ НА ОСНОВЕ ДИФРАКЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Ю. В. Чугуй

*Конструкторско-технологический институт научного приборостроения СО РАН,
630058, г. Новосибирск, ул. Русская, 41
Новосибирский государственный университет,
630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2
Новосибирский государственный технический университет,
630073, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20
E-mail: chugui@tdisie.nsc.ru*

Обобщены результаты исследований дифракционных явлений на 3D-объектах постоянной толщины с плоскими внутренними поверхностями (толстых пластинах) на основе разработанной нами конструктивной теории их расчёта применительно к размерному контролю. Она базируется на дифракционных моделях 3D-объектов с использованием эквивалентных диафрагм (распределений), что позволяет эффективно применять приближение Кирхгофа — Френеля. Данный подход в отличие от известных строгих и приближённых не требует громоздких вычислений, нагляден и достаточно точен для инженерных применений. Установлено, что фундаментальным дифракционным параметром для 3D-объектов постоянной толщины d является критический угол дифракции $\theta_{кр} = \sqrt{\lambda/d}$, при котором влияние объёмности на спектр 3D-объекта становится ощутимым. Приведены результаты расчёта дифракционных картин Фраунгофера (спектров) и изображений 3D-объектов постоянной толщины с абсолютно поглощающими, абсолютно отражающими и серыми внутренними гранями. Показано, что выбором конфигурации освещающей 3D-объект волны (плоские нормальные и наклонные, сферические) можно производить селекцию его фрагментов.

Ключевые слова: дифракция, интерференция света, фурье-оптика, спектры и изображения 3D-объектов.

DOI: 10.15372/AUT20170509

Введение. Прогресс в области оптического размерного контроля трёхмерных (3D) объектов с чёткой теневой проекцией в значительной степени определяется эффективностью теории формирования изображений и дифракционных картин (спектров) этих объектов в проходящем свете.

Для объёмных тел с чёткой теневой проекцией (в виде пластин постоянной толщины), которые составляют широкий класс объектов, теневая модель оказывается приближённой. Её применение может приводить к значительным погрешностям измерений.

Поскольку теория Кирхгофа — Френеля позволяет проводить анализ дифракционных явлений только на тонких объектах (нулевой толщины), а существующие строгие и приближённые решения дифракционных задач чрезвычайно сложны для инженерных применений [1–4], то возникает необходимость в создании так называемой конструктивной теории формирования изображений и фильтрации 3D-объектов и их дифракционных картин, сравнительно простой (в математическом отношении), физически наглядной и в то же время достаточно строгой и точной для инженерных применений.

Попытка построения такой теории с использованием оптико-геометрических подходов для 3D-объектов постоянной толщины предпринята в [5, 6]. В этих работах В. П. Коронкевич с соавторами предложили при оценке влияния задней грани такого объекта на

волну, дифрагированную на её передней грани, применять оптико-геометрические подходы, что позволило в первом приближении объяснить некоторые из наблюдаемых 3D-эффектов в дифракционном поле объекта. Более полного описания наблюдаемых явлений удалось достичь при использовании дифракционных моделей 3D-объектов [7, 8]. В этом случае объект заменялся транспарантами (объектами нулевой толщины), что позволило при расчётах привлекать стандартные методы фурье-оптики [9] на базе приближения Кирхгофа — Френеля. На основе предложенной теории были разработаны алгоритмы определения геометрических параметров 3D-объектов постоянной толщины [10], изучены дифракционные явления на 3D-объектах постоянной толщины с абсолютно отражающими и серыми гранями при нормальном их освещении, а также исследованы особенности формирования и оконтуривания их изображений [10]. Теория была обобщена на случай формирования изображений 3D-объектов указанного типа при освещении их плоскими наклонными и сферическими волнами [11], а также при использовании частично-когерентных (по пространству) волн [12, 13]. Конструктивный метод расчёта дифракционных явлений на 3D-структурах успешно использовался нами при исследовании полей в проекционной пространственно-неинвариантной системе [14].

В данной работе обобщены результаты исследований дифракционных явлений на 3D-объектах постоянной толщины с плоскими внутренними поверхностями с применением разработанного конструктивного метода их расчёта.

Конструктивный метод расчёта дифракционных картин 3D-объектов основан на дифракционной модели в виде эквивалентных диафрагм (распределений) для 3D-объектов постоянной толщины с плоскими внутренними поверхностями (рис. 1). Согласно данной модели передние и задние грани объекта вносят максимальный вклад в поле в дальней зоне [7, 8, 10]. При этом влияние внутренних поверхностей объекта на дифракционную компоненту поля предполагается пренебрежимо малым и носит фотометрический характер: поверхность либо полностью поглощает, либо отражает волны, дифрагированные на передней грани этого объекта. Существует промежуточный случай серых объектов, у которых внутренняя поверхность поглощает часть падающей волны, а другая её часть отражается от поверхности. В результате проблема дифракции света на объёмных телах сводится к анализу дифракционных явлений на плоских объектах (в общем случае на биполярных транспарантах), расположенных в пространстве вдоль оптической оси и описываемых бинарными (биполярными) граничными функциями $f(x)$ и $g(x_1)$. Это позволяет при расчётах полей использовать приближение Кирхгофа — Френеля, которое широко применяется в фурье-оптике.

Исследовались случаи освещения объекта плоскими нормально падающими, плоскими наклонными, а также сферическими волнами. Следует особо подчеркнуть, что конфигура-

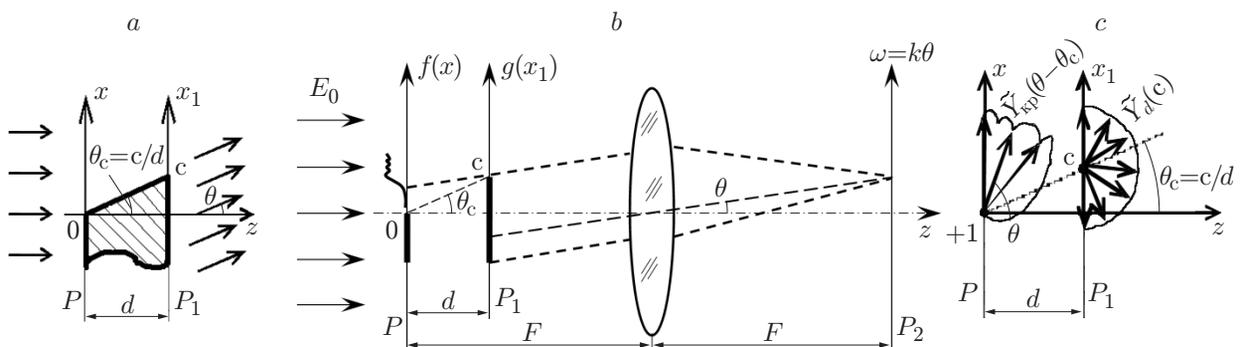


Рис. 1. Дифракция света на абсолютно поглощающем 3D-объекте постоянной толщины: *a* — сечение объекта; *b* — его дифракционная модель в виде эквивалентных диафрагм, размещённая на входе фурье-анализатора; *c* — точечная модель в виде обобщённых источников

ция освещающей волны в отличие от $1D$ - и $2D$ -объектов имеет принципиальное значение для трёхмерных тел — протяжённых (вдоль оси Z) объектов.

Здесь и далее будем считать, что объект (его модель) размещается на входе оптического фурье-анализатора [9], причём так, что его передняя грань находится на фокусном расстоянии от объектива (см. рис. 1). Объект освещается плоской монохроматической волной света с длиной волны λ и амплитудой E_0 .

Рассмотрим сначала случай нормального освещения $3D$ -объектов. При расчёте дифракционной картины Фраунгофера (спектра фурье-объекта) абсолютно поглощающего $3D$ -объекта, наблюдаемой в плоскости P_2 , воспользуемся полученными в [7, 8] результатами, согласно которым спектр Фурье $F(\theta)$ в приближении малых углов наблюдения ($\theta \ll 1$) описывается следующим выражением:

$$F(\theta) \sim E_0 \exp\left(\frac{jk\theta^2 d}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_d(x_1)g(x_1) e^{-jk\theta x_1} dx_1 = E_0 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\tilde{g}_d(x + \theta d) e^{-jk\theta x} dx, \quad (1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; $\tilde{f}_d(x)$ и $\tilde{g}_d(x)$ — френелевские образы граничных функций $3D$ -объектов, определяемые как

$$\tilde{f}_d(x) = \frac{e^{-j\pi/4}}{\sqrt{\lambda d}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp\left[j \frac{k}{2d} (x - \xi)^2\right] d\xi.$$

Нами были рассчитаны дифракционные картины Фраунгофера таких типичных элементов протяжённых тел, как объёмный край и $3D$ -щель с абсолютно поглощающими и абсолютно отражающими внутренними гранями, а также спектры $3D$ -объектов с так называемыми серыми плоскими (внутренними) поверхностями. Приведём результаты расчёта для некоторых из этих объектов.

Спектр абсолютно поглощающего $3D$ -края. Такой объект характеризуется двумя геометрическими параметрами: протяжённостью (d) и скосом (c) (рис. 1, *b*). Граничные функции согласно модели эквивалентных диафрагм имеют вид $f(x) = Y(x)$, $g(x_1) = Y(x_1 - c)$, где $Y(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда [9].

Вычисляя интеграл (1) с учётом граничных функций для спектра объёмного края, можно получить выражение [7, 8]

$$\tilde{F}(\theta) = \frac{F(\theta)}{E_0} = \pi\delta(k\theta) + \frac{1}{jk\theta} \tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta - \theta_c) + \tilde{Y}_d(c) \frac{e^{-jk\theta c} e^{jk\theta^2 d/2}}{jk\theta}. \quad (2)$$

Здесь $\theta_{кр} = \sqrt{\lambda/d}$ — так называемый критический угол дифракции; $\theta_c = c/d$ — угол скоса; $\tilde{Y}_d(x) = \frac{e^{-j\pi/4}}{\sqrt{\lambda d}} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\xi) \exp\left[j \frac{k}{2d} (x - \xi)^2\right] d\xi$ — френелевский образ ступенчатой функции $Y(x)$ (в линейных координатах), связанный со стандартной функцией Френеля

$F(t) = \int_0^t e^{j\pi\xi^2/2} d\xi$ следующим соотношением [15, 16]:

$$\tilde{Y}_d(\bar{x}) = \frac{e^{-j\pi/4}}{\sqrt{2}} \left[0,5 + F\left(\sqrt{\frac{k}{\pi d}} \bar{x}\right) \right].$$

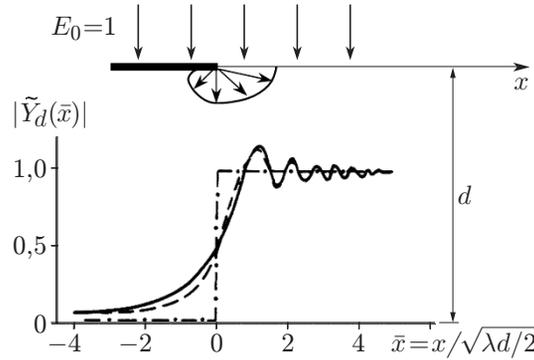


Рис. 2. Графики функций Хевисайда $Y(x)$ (штрихпунктирная кривая), её френелевского образа $\tilde{Y}_d(\bar{x})$ (сплошная) и аппроксимации образа элементарными функциями (штриховая)

Наряду с записью френелевской функции в линейных координатах далее будем использовать её представление в угловых координатах $\text{tg } \theta \approx \theta = \xi/d$:

$$\tilde{Y}_{\theta_{\text{кр}}}(\theta) = \frac{e^{-j\pi/4}}{\sqrt{\lambda/d}} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} Y(\theta - \alpha) e^{jk\alpha^2 d/2} d\alpha = \frac{e^{-j\pi/4}}{\theta_{\text{кр}}} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} Y(\theta - \alpha) e^{j\pi\alpha^2/\theta_{\text{кр}}^2} d\alpha.$$

На рис. 2 даны графики поведения амплитудной компоненты френелевского образа $|\tilde{Y}_d(\bar{x})|$, где $\bar{x} = x/\sqrt{\lambda d/2}$, и ступенчатой функции $Y(x)$. Для наглядности координаты x и $\bar{x} = x/\sqrt{\lambda d/2}$ приведены в разных единицах измерений.

Проанализируем полученный спектр объёмного края. Первый член в (2) описывает вклад в дифракционную картину прямой (проходящей) волны света, а второй — соответствует дифракции света от передней грани объекта с учётом последующего виньетирования дифрагированных волн задней гранью. Третий член представляет вторичную дифракцию света на задней грани. Его вклад определяется значением амплитуды поля $\tilde{Y}_d(x_1)$ в месте расположения границы задней грани объекта ($x_1 = c$). Дифракционная модель формирования поля (с точностью до множителя $k\theta$) может быть представлена в виде обобщённых дельта-источников с соответствующими амплитудами и диаграммами излучения в граничных точках $x = 0$ и $x_1 = c$ (рис. 1, c). Существенно, что диаграмма излучения первого источника в отличие от диаграммы излучения второго источника является анизотропной и задаётся френелевской функцией $\tilde{Y}_{\theta_{\text{кр}}}(\theta)$. В этом случае поведение дифракционной картины Фраунгофера асимметричного 3D-края полностью находится из особенностей интерференции волн двух обобщённых дельта-источников.

Частным случаем рассмотренного объёмного края является симметричный 3D-край, у которого $c = 0$. Спектр его согласно (2) имеет следующий вид:

$$\tilde{F}(\theta) = \pi\delta(k\theta) + \frac{\tilde{Y}_{\theta_{\text{кр}}}(\theta)}{jk\theta} + \frac{0,5 e^{jk\theta^2 d/2}}{jk\theta}.$$

Из анализа поведения этого спектра следует, что объёмные эффекты становятся значительными при углах наблюдения дифракции θ_0 больше критического угла, при котором дифракционные эффекты уже ощутимы: $\theta_0 \geq \theta_{\text{кр}} = \sqrt{\lambda/d}$. Если же $\theta_0 \ll \theta_{\text{кр}}$, то поле $F(\theta)$ приближается к спектру плоского объекта. Таким образом, влияние протяжённости d объёмного края на его спектр определяется параметром объёмности $N = \theta_{\text{кр}}/\theta_0 = D/\sqrt{\lambda d}$,

где $D = \lambda/\theta_0$ — размер исследуемой области. Иными словами, объёмные эффекты малы при $N \gg 1$ и, наоборот, их влияние существенно при $N \ll 1$.

Аппроксимация френелевского образа ступенчатой функции. Заметим, хотя выражение (2) легко приводится к виду, удобному для компьютерных расчётов, тем не менее очевидно, что для анализа и интерпретации дифракционных явлений на объёмных телах предпочтительнее иметь их аналитическое представление в классе элементарных функций. Для этих целей достаточно эффективной оказалась предложенная в [7, 8] аппроксимация функции

$$\tilde{Y}_d(x) \approx Y(x) - \frac{p}{2} e^{jkx^2/2d} \frac{\text{sgn}(x)}{|x| + p} = Y(x) - 0,5 \frac{e^{jkx^2/2d}}{x/p + \text{sgn} x}, \quad (3)$$

где параметр $p = \sqrt{\lambda d} e^{j\pi/4} / \alpha$, $2 \leq \alpha \leq \pi$; $\text{sgn}(x) = 2Y(x) - 1$ — знаковая функция. Значение коэффициента α выбирается в зависимости от исследуемого диапазона x . Так, при малых значениях x , когда $|x| \ll \sqrt{\lambda d}$, величина $\alpha = 2$, а при $|x| \gg \sqrt{\lambda d}$ параметр $\alpha = \pi$ ($\sqrt{\lambda d}$ — величина, пропорциональная первой зоне Френеля). Заметим, что приближение (3) для малых и больших значений аргумента x при указанных значениях α сводится к известным разложениям функции Френеля при малых и больших x [15, 16].

В промежуточной области оценка оказывается менее точной, но, как показывают численные расчёты, вполне достаточной для практических применений. Для подтверждения этого на рис. 2 для сравнения приведены графики зависимости $|\tilde{Y}_d(\bar{x})|$, вычисленные соответственно по точной (сплошная кривая) и приближённой (штриховая кривая) формулам.

Отметим, что формула (3) для френелевского образа $\tilde{Y}_d(x)$ ступенчатой функции $Y(x)$, описывающей полуплоскость, допускает наглядную физическую интерпретацию. Дифракционную картину Френеля можно рассматривать как результат интерференции двух волн: проходящей недифрагированной волны (первый член) с волной, дифрагированной на границе полуплоскости (второй член), причём дифрагированная волна соответствует полю от обобщённого точечного источника (размещённого в точке $x = 0$), амплитуда которого затухает обратно пропорционально координате x . Иными словами, этот эквивалентный источник имеет неизотропную диаграмму излучения, вид которой определяется спецификой дифракционных явлений Френеля.

Следует отметить, что предложенная нами аппроксимация функции Френеля успешно используется при расчёте дифракционных оптических элементов для преобразования волновых фронтов сложной конфигурации в системах размерного контроля 3D-объектов на основе метода структурного освещения.

Спектр абсолютно поглощающей асимметричной 3D-щели (рис. 3, а). В общем случае у такого объекта передний и задний раскрывы отверстия имеют различную ширину D и D_1 . При этом центры этих отверстий смещены относительно друг друга на величину b и граничные функции имеют следующий вид: $f(x) = \text{Rect}(x/D)$, $g(x_1) = \text{Rect}[(x_1 - b)/D_1]$, где прямоугольная функция $\text{Rect}(x/D) = Y(x + 0,5D) - Y(x - 0,5D)$.

Для спектра 3D-щели можно получить следующую формулу [10]:

$$\tilde{F}(\theta) = \frac{1}{jk\theta} \left\{ e^{jk\theta D/2} \cdot \widetilde{\text{Rect}}_{\theta_{\text{кр}}} \left[\frac{\theta - 0,5D/d - b/d}{D_1/d} \right] + e^{-jk\theta D/2} \cdot \widetilde{\text{Rect}}_{\theta_{\text{кр}}} \left[\frac{\theta + 0,5D/d - b/d}{D_1/d} \right] + \right. \\ \left. + e^{jkd\theta^2/2} \cdot e^{jk\theta(0,5D_1 - b)} \cdot \widetilde{\text{Rect}}_d \left(\frac{b - 0,5D_1}{D} \right) - e^{jkd\theta^2/2} \cdot e^{-jk\theta(0,5D_1 + b)} \cdot \widetilde{\text{Rect}}_d \left(\frac{b + 0,5D_1}{D} \right) \right\}, \quad (4)$$

где $\widetilde{\text{Rect}}_d(z)$ и $\widetilde{\text{Rect}}_{\theta_{\text{кр}}}(\theta)$ — френелевские образы (френелевские изображения) прямоугольной функции $\text{Rect}(z)$ в линейных и угловых координатах. Дифракционная точечная модель для 3D-щели включает четыре источника света с соответствующими диаграммами

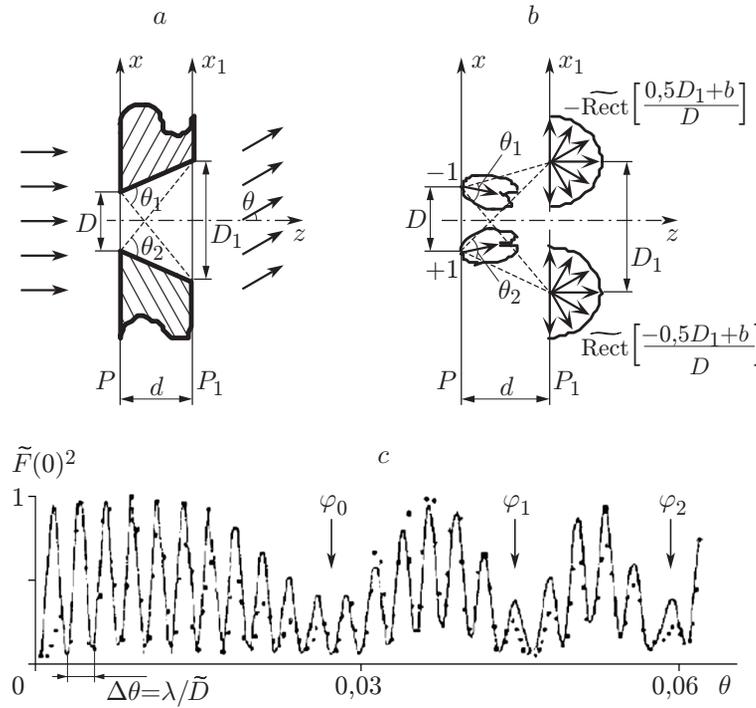


Рис. 3. Дифракция на объёмной абсолютно поглощающей асимметричной щели: *a* — исходный объект; *b* — его дифракционная точечная модель в виде обобщённых дельта-источников; *c* — спектр мощности симметричной поглощающей $3D$ -щели с $d = 1$ мм, $D = D_1 = 0,277$ мм ($b = 0$) (точки — экспериментальные данные, сплошная кривая — расчётные)

излучения (рис. 3, *b*). Интерференция полей этих источников определяет отличительные особенности, вводимые в спектр объекта протяжённостью d . Например, в случае дифракции света на симметричной $3D$ -щели ($D = D_1, b = 0$) объёмные эффекты проявляются в спектре объекта в виде низкочастотных колебаний (френелевского типа) с минимумами $\varphi_m = \sqrt{(2m + 1)\lambda/d}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), а также в увеличении периода высокочастотных колебаний (фраунгоферовского типа), характерный период которых $\Delta\theta = \lambda/\tilde{D}$, где параметр $\tilde{D} = D - 0,225\sqrt{\lambda d}$ (рис. 3, *c*). Видно, что при определении размера $3D$ -щели дифракционным методом он уменьшается на величину, пропорциональную зоне Френеля, что объясняется влиянием объёмности объекта [10]. На рис. 3, *c* приведены графики расчётных и экспериментальных данных для спектра мощности абсолютно поглощающей $3D$ -щели. Можно видеть хорошее совпадение теоретических и экспериментальных результатов.

Спектр симметричного абсолютно отражающего $3D$ -края. Расширим далее круг $3D$ -объектов, включив в него толстые металлические объекты с абсолютно отражающей внутренней поверхностью (рис. 4, *a*). В этом случае вследствие изменения фазы на π при отражении волн от внутренней поверхности объекта (при скользящем падении) граничные функции будут иметь вид $f(x) = \text{sgn}(x_1), g(x_1) = Y(x_1)$. Спектр такого $3D$ -края запишем как [10]

$$\tilde{F}(\theta) = \pi\delta(k\theta) + 2\tilde{Y}(\theta)/(jk\theta). \quad (5)$$

Из выражения (5) следует особо подчеркнуть, что для металлического абсолютно отражающего $3D$ -края симметричного типа вторичная дифракция света на его задней грани отсутствует.

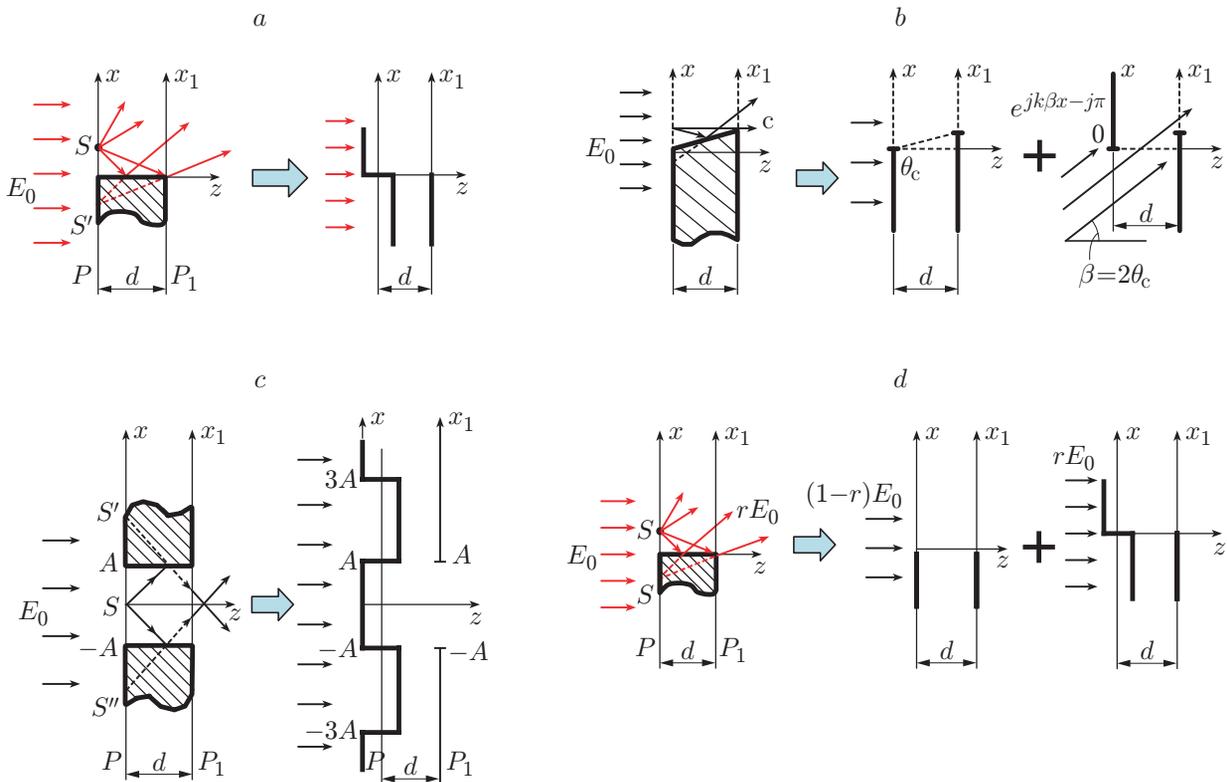


Рис. 4. Дифракционные модели в виде эквивалентных диафрагм (распределений) для 3D-объектов в случае их нормального освещения: *a* — абсолютно отражающий (металлический) край, *b* — абсолютно отражающий асимметричный край, *c* — абсолютно отражающая симметричная щель, *d* — серый симметричный край

Спектр абсолютно отражающего 3D-края несимметричного типа. У такого объекта внутренняя зеркально отражающая плоскость составляет с оптической осью угол $\theta_c = c/d$ (рис. 4, *b*). Для получения дифракционной модели объекта в виде эквивалентных диафрагм (распределений) примем во внимание особенности «работы» внутренней грани: она, как зеркало, отражает падающую на неё плоскую волну света, причём эта волна в поперечном направлении x ограничена передней гранью в виде осевой полуплоскости $f(x) = Y(x)$ и задней гранью в виде внеосевой полуплоскости $g(x_1)$, смещённой вдоль оси x_1 на величину c : т. е. $g(x_1) = Y(x_1 - c)$. Очевидно, что такая модель будет состоять из двух компонент, одна из которых соответствует случаю абсолютно поглощающего 3D-края, а другая учитывает отражение волн (дифрагированных на передней грани) от зеркальной внутренней поверхности. В результате это приводит к преобразованию нормальной падающей плоской волны в наклонную, причём согласно закону отражения света её угол наклона $\beta = 2\theta_c = 2c/d$. Граничные функции для такого 3D-объекта будут иметь вид $f(x) = Y(x) - Y(-x) e^{jk\beta x}$, $g(x_1) = Y(x_1 - c) - Y(x_1 - c) e^{jk\beta x_1}$. Для его спектра можно получить следующее выражение [17]:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\theta) = & \pi\delta(k\theta) + \frac{1}{jk\theta} [\tilde{Y}_{\text{кр}}(\theta - \theta_c) + e^{-jk\theta c} \cdot e^{jk\theta^2 d/2} \tilde{Y}_d(c)] - \\ & - \frac{1}{jk(\beta - \theta)} [\tilde{Y}_{\text{кр}}(\theta - \theta_c) - e^{-jk\theta c} \cdot e^{jk\theta^2 d/2} \tilde{Y}_d(c)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Видно, что спектр объекта в отличие от случая абсолютно отражающего симметричного края содержит кроме осевой (центральной) компоненты и внеосевую с центром в направлении угла $\beta = 2\theta_c = 2c/d$. Причём вклад последней в значительной степени определяется знаком угла скоса θ_c . При $\theta_c < 0$ (задняя грань затенена) её вклад значительно ниже, чем в случае $\theta_c > 0$ (задняя грань освещена).

Спектр абсолютно отражающей симметричной $3D$ -щели. Такой объект является композицией двух объёмных краёв с абсолютно отражающими гранями. Здесь могут иметь место многократные отражения волн от внутренних зеркальных граней объекта. Если ограничиться лишь однократным отражением волн от внутренних граней, то для граничных функций можно получить следующие выражения:

$$f(x) = \text{Rect}\left(\frac{x}{2A}\right) - \text{Rect}\left(\frac{x-A}{2A}\right) - \text{Rect}\left(\frac{x+A}{2A}\right), \quad g(x_1) = \text{Rect}\left(\frac{x_1}{2A}\right).$$

Соответственно для спектра такого $3D$ -объекта имеем [10]

$$\tilde{F}(\theta) = \frac{2}{jk\theta} \left[e^{jk\theta D/2} \cdot \widetilde{\text{Rect}}_{\theta_{\text{кр}}} \left(\frac{\theta - 0,5D/d}{D/d} \right) - e^{-jk\theta D/2} \cdot \widetilde{\text{Rect}}_{\theta_{\text{кр}}} \left(\frac{\theta + 0,5D/d}{D/d} \right) \right]. \quad (7)$$

Существенно, что при $N \gg 1$ дифракционное поле формируется «хвостами» френелевских изображений $\text{Rect}_{\theta_{\text{кр}}}(\theta)$. Таким образом, контраст фраунгоферовских колебаний будет падать по мере увеличения пространственной частоты спектра. Более того, для такого $3D$ -объекта наблюдается хорошее согласие экспериментальных и расчётных данных, что свидетельствует об эффективности предложенной нами конструктивной теории дифракционных явлений на $3D$ -телах [10].

Спектр серого симметричного $3D$ -края. Полученные результаты нами обобщены на серые объекты (рис. 4, d), у которых модуль коэффициента отражения света от внутренних поверхностей r занимает промежуточное положение между 0 и 1: $0 \leq r \leq 1$ (в общем случае r является комплексной величиной). Тогда граничные функции, например, для серого металлического объекта в виде симметричного $3D$ -края с учётом изменения фазы отражённой от металла волны на π будут иметь следующий вид: $f(x) = r \text{sgn}(x) + (1-r)Y(x) = (r+1)Y(x) - r$, $g(x_1) = Y(x_1)$. Эти функции являются, по сути, комбинацией граничных функций, полученных ранее для абсолютно поглощающего и абсолютно отражающего $3D$ -краёв с учётом коэффициента отражения света r от внутренней грани. Соответственно спектр такого серого $3D$ -объекта равен [10]

$$\tilde{F}(\theta) = \pi\delta(k\theta) + \frac{1+r}{jk\theta} \tilde{Y}_{\theta_{\text{кр}}}(\theta) + \frac{1-r}{2jk\theta} e^{jk\theta^2 d/2}. \quad (8)$$

Как и следовало ожидать, при $r = 0$ и $r = 1$ это выражение совпадает с выражениями (2) и (5), полученными для симметричных абсолютно поглощающего и абсолютно отражающего $3D$ -краёв.

Перейдём к рассмотрению особенностей формирования изображений $3D$ -объектов постоянной толщины при освещении их плоскими наклонными и сферическими волнами.

Дифракция света на $3D$ -объектах, освещённых плоскими наклонными волнами. Рассмотрим дифракцию Фраунгофера на объектах постоянной толщины с абсолютно поглощающей внутренней плоской поверхностью при освещении их плоскими наклонными волнами под малым углом γ к оптической оси (рис. 5). Следует особо отметить, что в отличие от $1D$ - и $2D$ -объектов спектры $3D$ -объектов в значительной степени зависят от конфигурации освещающей волны.

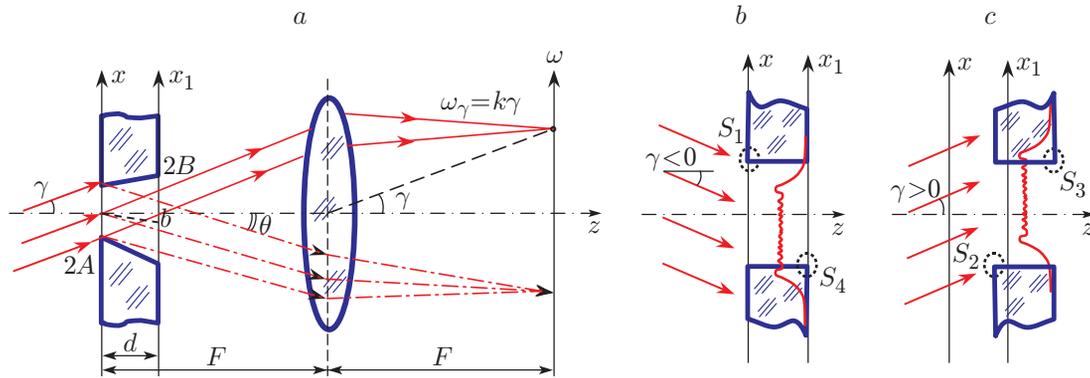


Рис. 5. Дифракция Фраунгофера на асимметричной поглощающей 3D-щели, освещённой плоской наклонной волной света: *a* — исходный объект; *b, c* — селекция фрагментов симметричной 3D-щели путём вариации угла наклона освещающего пучка $\gamma < 0$ и $\gamma > 0$ соответственно

В соответствии с ранее полученными результатами спектр Фурье для 3D-объекта с абсолютно поглощающей внутренней поверхностью в приближении малых углов наблюдения θ (плоскость P_2) с учётом наклона освещающей волны описывается выражением [11]

$$\tilde{F}(\theta, \gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \tilde{g}_d(x + \theta d) e^{-jk\theta x} \cdot e^{jk\gamma x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \tilde{g}_d\left(x + \frac{\omega d}{k}\right) e^{-j\omega x} \cdot e^{jk\gamma x} dx, \quad (9)$$

где $\omega = k\theta$.

Для асимметричного 3D-края (см. рис. 1) (протяжённостью d и со скосом c), освещённого наклонной волной, его спектр имеет вид

$$\tilde{F}(\theta, \gamma) = \pi \delta[k(\theta - \gamma)] + \frac{\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta - \theta_c)}{jk(\theta - \gamma)} + \frac{e^{-jk(\theta - \gamma)c} e^{jkd(\theta^2 - \gamma^2)/2}}{jk(\theta - \gamma)} \tilde{Y}_d(c - \gamma d). \quad (10)$$

Из этого выражения видно, что при наклонном освещении 3D-объекта вклады в дифракционную картину второго и третьего членов в значительной степени зависят не только от значения и знака скоса c , но и от значения и знака угла наклона γ . При этом мы фактически имеем дело с эффективным скосом ($c_{эф}$) объёмного края: $c_{эф} = (\theta_c - \gamma)d = c - \gamma d$.

Видно, что влияние задней грани можно заметно ослабить, если выбрать $\gamma \gg \theta_c + \theta_{кр}$. В этом случае имеет место селекция передней грани 3D-щели. Если же объёмный край освещается плоской волной с отрицательным наклоном γ , то при выборе $|\gamma| \gg |\theta_c| + \theta_{кр}$ можно заметно увеличить вклад в дифракционную картину задней грани, особенно при $\theta_c > 0$, и таким образом произвести селекцию задней грани 3D-объекта.

Воспользуемся предложенным выше подходом для вычисления спектра объёмной асимметричной щели с абсолютно поглощающими внутренними поверхностями (рис. 5, *a*).

Вычисляя интеграл (1) с учётом вида граничных функций, для спектра такого 3D-объекта можно получить следующее выражение [11]:

$$\tilde{F}(\theta, \gamma)[jk(\theta - \gamma)] = e^{jk(\theta - \gamma)A} \cdot \tilde{\text{Rect}}_{\theta_{кр}}\left(\frac{\theta - A/d - b/d}{2B/d}\right) -$$

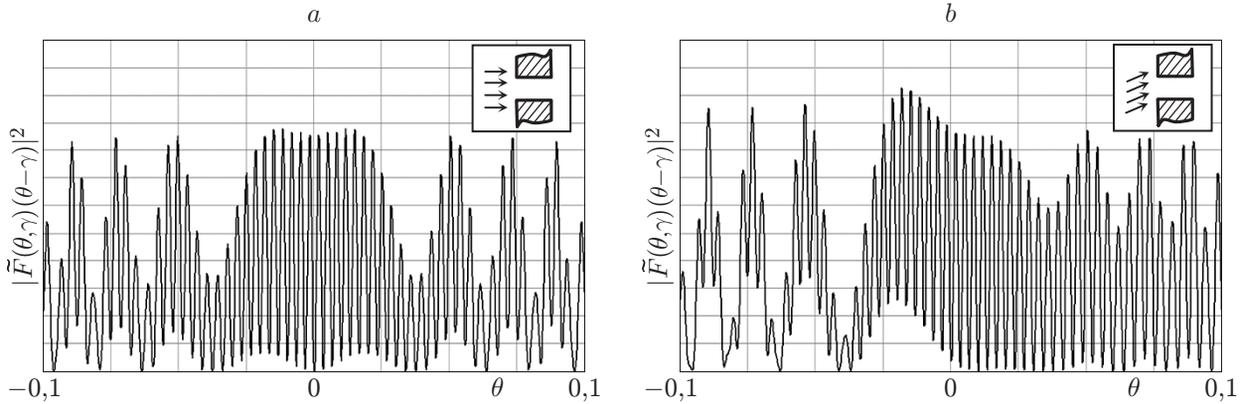


Рис. 6. Графики расчётных спектров мощностей для симметричной абсолютно поглощающей 3D-щели с параметрами $A = B = 0,1$ мм, $b = 0$, $d = 0,5$ мм при освещении плоской волной света: при нормальном (а) и наклонном (б) углах падения

$$\begin{aligned}
 & -e^{-jk(\theta-\gamma)A} \cdot \widetilde{\text{Rect}}_{\theta_{\text{кр}}} \left(\frac{\theta + A/d - b/d}{2B/d} \right) - e^{jkd(\theta^2 - \gamma^2)/2} \left[e^{-jk(\theta-\gamma)(B+b)} \cdot \widetilde{\text{Rect}}_d \left(\frac{b + B - \gamma d}{2A} \right) - \right. \\
 & \left. - e^{-jk(\theta-\gamma)(b-B)} \cdot \widetilde{\text{Rect}}_d \left(\frac{b - B - \gamma d}{2A} \right) \right]. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Из анализа спектра (11) следует, что, изменяя угол наклона освещения, можно усиливать или ослаблять влияние тех или иных фрагментов объекта, т. е. производить их селекцию. Например, в случае симметричной 3D-щели ($2A = 2B$, $b = 0$) при $\gamma \ll -\theta_{\text{кр}} = -\sqrt{\lambda/d}$ (рис. 5, б) основной вклад в формирование спектра $F(\theta, \gamma)$ дают граничные точки S_1 и S_4 (эквивалентные источники), а при $\gamma \gg \theta_{\text{кр}}$ — граничные точки S_2 и S_3 (рис. 5, в). Таким образом, имеет место перекрёстная селекция граней.

В качестве иллюстрации зависимости спектра от наклона освещающей волны на рис. 6 представлены графики расчётных спектров мощности симметричной 3D-щели шириной $2A = 0,2$ мм и протяжённостью $d = 0,5$ мм ($\theta_{\text{кр}} = \sqrt{\lambda/d} = 2^\circ$ при $\lambda = 0,5$ мкм). В первом случае щель освещается нормально падающей плоской волной (рис. 6, а), а во втором — наклонной плоской волной под углом $\gamma = 0,6^\circ$ (рис. 6, б), который составляет $0,3\theta_{\text{кр}}$. Видно, что даже в случае небольшого угла наклона γ падающей волны (по сравнению с $\theta_{\text{кр}}$) в спектре 3D-щели в области отрицательных углов θ начинает доминировать низкочастотная составляющая, а в области положительных углов θ — высокочастотная, что соответствует дифракционной картине, формируемой преимущественно «перекрёстными» источниками излучения S_2 и S_3 (см. рис. 5, в).

Дифракция света на 3D-объектах, освещённых сферическими волнами.

Кроме перекрёстной интерференции интересным представляется случай одновременной селекции краёв передней или задней грани объекта. Для этого рассмотрим дифракцию света на объёмной абсолютно поглощающей симметричной щели при освещении её сферической волной с радиусом кривизны R (рис. 7). Радиус сходящейся сферической волны $R < 0$ (рис. 7, а) и, наоборот, для расходящейся волны $R > 0$. Дифракционная картина Фраунгофера формируется в плоскости P_2 , сопряжённой с плоскостью точечного источника освещающего пучка (плоскость P_s для случая $R > 0$, рис. 7, б).

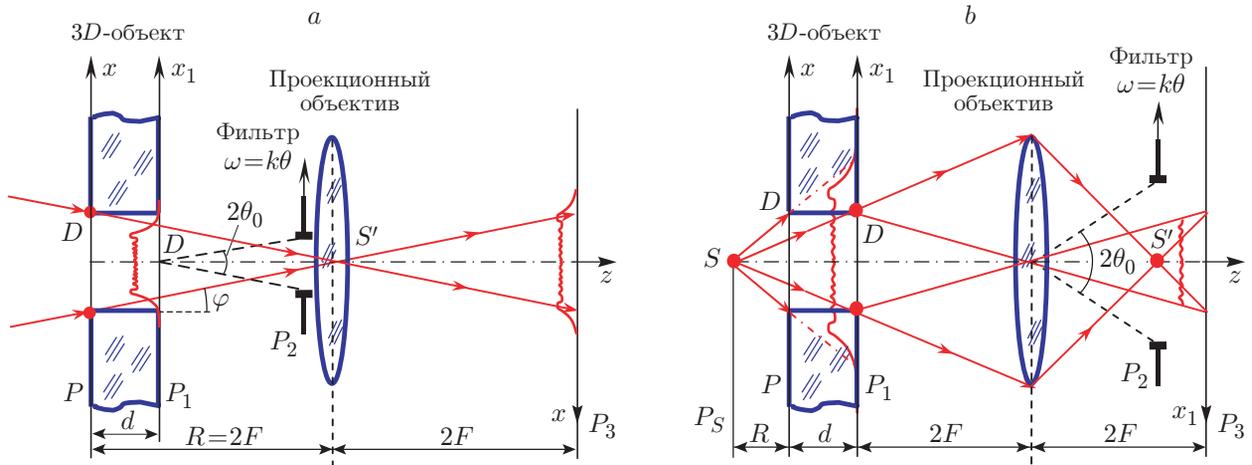


Рис. 7. Схема оптической системы формирования спектров и изображений 3D-щели с помощью освещающих сферических волн, обеспечивающих селекцию передней и задней граней объекта: сходящихся (а) и расходящихся (б)

Можно показать [11], что спектр симметричной абсолютно поглощающей 3D-щели при освещении её сферической волной в случае малых углов θ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\theta, m) = & \frac{e^{jkm\theta D/2}}{jk\theta} \widetilde{\text{Rect}}_{\theta_{\text{кр}}} \left(\frac{\theta - 0,5D/d}{D/md} \right) - \frac{e^{-jkm\theta D/2}}{jk\theta} \widetilde{\text{Rect}}_{\theta_{\text{кр}}} \left(\frac{\theta + 0,5D/d}{D/md} \right) - \\ & - \frac{e^{jkm d \theta^2 / 2}}{jk\theta} \left[e^{-jk\theta D/2} \cdot \widetilde{\text{Rect}}_{d_m} \left(\frac{1}{2m} \right) - e^{jk\theta D/2} \cdot \widetilde{\text{Rect}}_{d_m} \left(-\frac{1}{2m} \right) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где $m = 1 + d/R$ — масштабный коэффициент, а параметр $d_m = d/m$.

Существенно, что, изменяя конфигурацию сферической волны, можно подчеркнуть или ослабить влияние передней или задней грани объекта. Очевидно, что в первом случае выбором $R < 0$ выделяется передняя грань 3D-объекта, а во втором при $R > 0$ — задняя.

Согласованное освещение объекта представлено на рис. 8. Расстояние от источника S до 3D-объекта взято таким, чтобы скользящий угол $\gamma_{\text{согл}}$ был равен углу скоса: $\gamma_{\text{согл}} = \theta_c$.

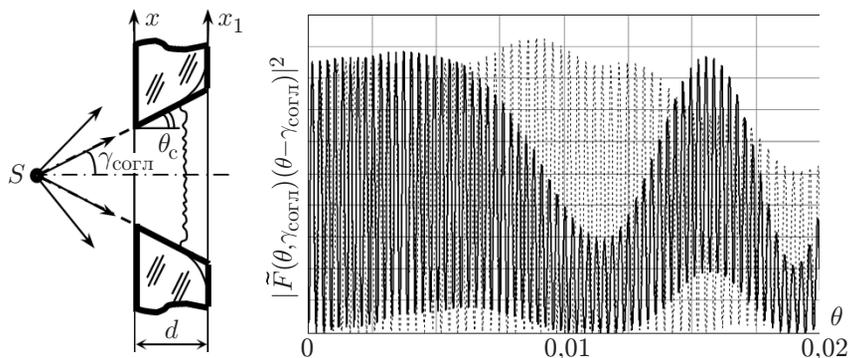


Рис. 8. Спектр 3D-щели ($A = 1$ мм, $B = 1,1$ мм, $d = 5$ мм, $b = 0$) при её согласованном освещении сферической волной с радиусом кривизны $R = 50$ мм.
Пунктиром показано нормальное освещение плоской волной

Здесь имеет место высокий уровень вторичной дифракции (в отличие от случая нормального освещения), что приводит к глубокой низкочастотной модуляции спектра с частотой, определяемой протяжённостью d .

Формирование изображения 3D-края при нормальном освещении. На практике для измерительных целей используют не только спектры 3D-объектов, но и их проекционные (теневые) и контурные изображения (рис. 9). Нами исследованы особенности формирования теневых и контурных изображений симметричных 3D-краёв с абсолютно поглощающими и отражающими внутренними поверхностями [10], а также асимметричного 3D-края с поглощающей внутренней поверхностью при нормальном и сферическом освещении [15, 17].

Рассмотрим сначала особенности формирования дифракционно-ограниченного изображения абсолютно поглощающего симметричного 3D-края при его нормальном освещении (рис. 9, *a*).

Изображения передней и задней граней объекта, описываемые граничными функциями $f(x) = Y(x)$ и $g(x_1) = Y(x_1)$, наблюдаются в плоскостях P_3 и P_4 . Исследовались предельные случаи, когда объёмные эффекты слабы и когда они сильно выражены. Эти эффекты соответствуют следующим условиям: $N = \theta_{кр}/\theta_0 \gg 1$ и $N \ll 1$, где $2\theta_0$ — угловой размер апертурной диафрагмы (фильтра). При слабых 3D-эффектах выходные поля $\tilde{f}_{\omega_0}(x)$ и $\tilde{g}_{\omega_0}(x_1)$ приближённо равны:

$$\tilde{f}_{\omega_0}(x) \approx \tilde{g}_{\omega_0}(x) = U_{\omega_0}(x) - e^{j\pi/4} \sqrt{\lambda d} \sin(\omega_0 x)/(2\pi^2 x), \quad (13)$$

где $\omega_0 = k\theta_0$; $U_{\omega_0}(x) = Y(x) \otimes h(x)$ — классическое выражение для дифракционно-ограниченного изображения полуплоскости, $h(x) = \sin(\omega_0 x)/(\pi x)$. На рис. 9, *a* приведены графики распределения интенсивностей света в дифракционно-ограниченном изображении абсолютно поглощающего 3D-края при слабых 3D-эффектах, а также в изображении полуплоскости. Если мы зафиксируем порог регистрации на уровне $0,25I(x) = 0,25|\tilde{f}_{\omega_0}(x)|^2$ (как для случая плоских объектов), то погрешность определения положения края ε будет зависеть только от размера зоны Френеля: $\varepsilon = \sqrt{\lambda d}/(2\sqrt{2}\pi) \approx 0,13\sqrt{\lambda d}$, и, например,

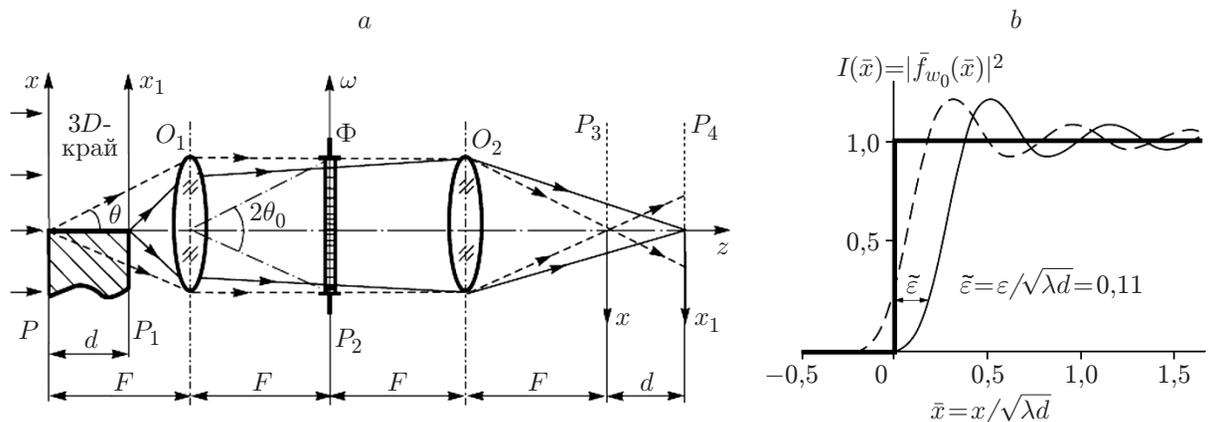


Рис. 9. Когерентно-оптическая система для проецирования и фильтрации изображений 3D-объектов: *a* — схема системы; *b* — распределение интенсивности света в дифракционно-ограниченном изображении симметричного абсолютно поглощающего 3D-края в случае слабых объёмных эффектов (сплошная тонкая линия), штриховой линией показано дифракционно-ограниченное изображение полуплоскости, а сплошной толстой линией — идеальное изображение полуплоскости

при $d = 100 \text{ }\mu\text{м}$ и $\lambda = 0,63 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$ величина ε будет составлять $0,9 \text{ }\mu\text{м}$. Аналогичные исследования нами выполнены для сильных объёмных эффектов ($N \ll 1$) [10].

Формирование и фильтрация изображений 3D-щели при освещении её сферической волной света. Распределение поля в плоскости изображения передней грани определяется исходя из спектра Фурье 3D-щели (12), формируемого в плоскости сходимости освещающего пучка, которая совпадает с плоскостью входной апертуры линзы (см. рис. 7, а). Распределение амплитуды поля в изображении передней грани $\tilde{f}_{\omega_0}(x)$ можно найти, если вычислить обратное преобразование Фурье от поля (13), промодулированного передаточной функцией апертурного фильтра с размерами $2\omega_0 = 2k\theta_0$:

$$\tilde{f}_{\omega_0}(x) = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} F(\omega, m) e^{j\omega x} d\omega. \quad (14)$$

Что касается поля $\tilde{g}_{\omega_0}(x_1)$ в изображении задней грани, то амплитудное распределение $\tilde{g}_{\omega_0}(x_1)$ можно определить путем свёртки поля $g(x_1)$ в плоскости P_1 с импульсным откликом системы $h(x_1) = \sin(\omega_0 x_1)/(\pi x_1)$, т. е.

$$\tilde{g}_{\omega_0}(x_1) = g(x_1) \otimes \frac{\sin \omega_0 x_1}{\pi x_1}. \quad (15)$$

Чтобы найти поле $g(x_1)$, обратимся к входной части этой оптической системы. Очевидно, что поле на выходе задней грани (плоскость P_1) является результатом модуляции френелевского изображения входной грани в виде щели шириной D (сформированного расходящейся волной света) задней гранью в виде щели того же размера:

$$g(x_1) \sim \left[\int_{-0,5D}^{0,5D} e^{jkx^2/(2R)} \cdot e^{jk(x_1-x)^2/(2d)} dx \right] \times \text{Rect} \left(\frac{x_1}{D} \right). \quad (16)$$

Из анализа выражений (15) и (16) следует, что при освещении 3D-объекта сходящейся волной света (см. рис. 7, а) соответствующим выбором радиуса её кривизны достигается селекция фрагментов передней грани объекта, а при освещении объекта расходящейся волной (см. рис. 7, б) выделяются фрагменты задней грани.

Интересно, что в предельном случае, когда плоскость фокусировки сходящейся волны совпадает с плоскостью задней грани, эффекты виньетирования волн отсутствуют: задняя грань выступает в роли фильтра пространственных частот.

В качестве примера, подтверждающего эффективность применения сферических волновых фронтов для выделения фрагментов 3D-объектов, нами выполнены расчёты поля в изображении передней и задней граней протяжённой щели шириной $D = 1 \text{ мм}$ при освещении её сходящейся сферической волной с радиусом R , равным протяжённости объекта d , причём $|R| = d = 100 \text{ мм}$ (рис. 10, а).

В этом случае в плоскости задней грани объекта формируется спектр щели передней грани. Существенно, что задняя грань при таком согласованном освещении действительно выступает в роли фильтра пространственных частот, влияние которого сводится к свёртке исходного объекта входной щели шириной D с импульсным откликом системы $h(x) = \sin(\omega_0 x)/(\pi x)$. Это приводит к размытию границ передней грани объекта на величину λ/θ_0 , где $\theta_0 = D/2R$ — половина углового размера фильтра. Как известно, положение геометрической границы объекта в его дифракционно-ограниченном изображении можно найти с высокой точностью (погрешность доли микрометров) и таким образом свести к минимуму влияние протяжённости 3D-объекта на изображение его передней грани.

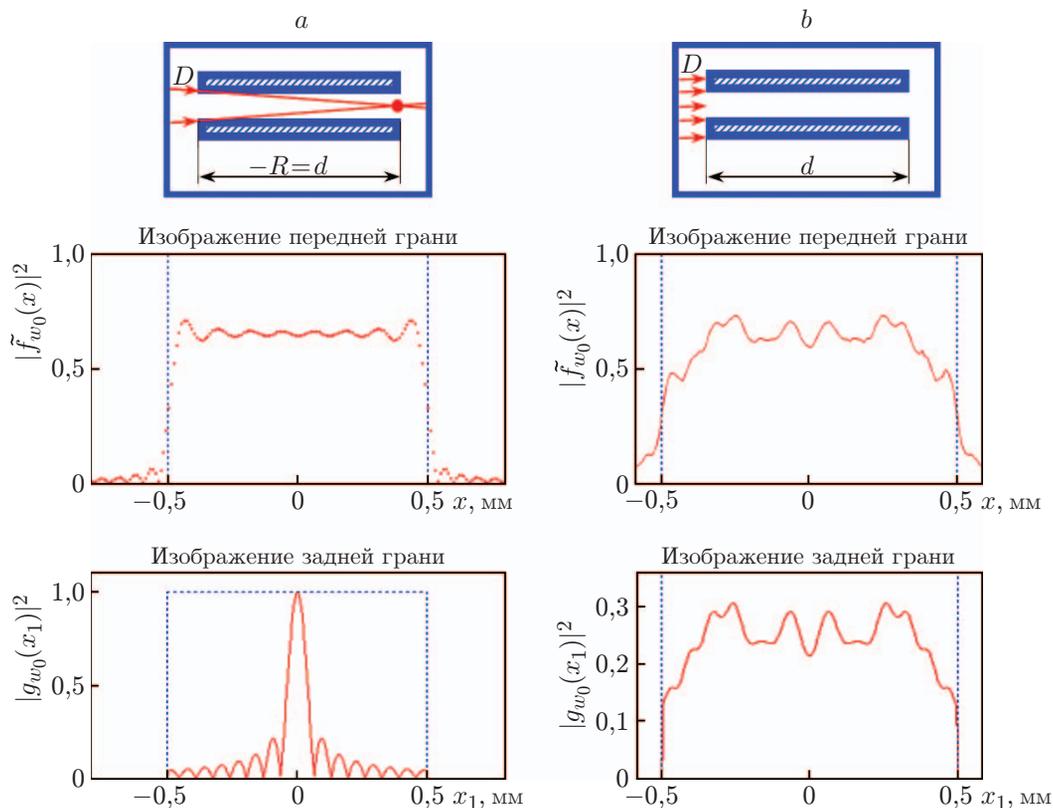


Рис. 10. Распределение интенсивности света в изображениях передней и задней граней 3D-щели: *a* — при освещении её сферической сходящейся волной с радиусом кривизны R , равным протяжённости d объекта; *b* — при освещении плоской нормально падающей волной

Для сравнения на рис. 10, *b* приведены результаты расчёта поля в изображениях передней и задней граней при освещении объекта плоской нормально падающей волной света. Видно, что в этом случае структура поля в изображении передней грани имеет более сложный вид, чем при освещении объекта сферической волной света, что может приводить к снижению точности определения положения границ 3D-щели.

Заключение. В предлагаемой работе обобщены результаты исследований дифракционных явлений на 3D-объектах постоянной толщины с плоскими внутренними границами (толстых пластин) на основе разработанной конструктивной теории их расчёта применительно к размерному контролю. Теория базируется на дифракционных моделях 3D-объектов с использованием эквивалентных диафрагм (распределений), расположенных вдоль оптической оси, что позволяет применять при расчётах полей стандартные методы фурье-оптики на базе приближения Кирхгофа — Френеля. Данный подход в отличие от известных строгих и приближённых не требует громоздких вычислений, физически прост и достаточно точен для инженерных применений.

Установлено, что влияние толщины абсолютно поглощающего 3D-объекта сводится, во-первых, к виньетированию пучков, дифрагированных на передней грани (первичная дифракция), а во-вторых, к появлению волн, дифрагированных на задней грани объекта (вторичная дифракция), причём их амплитуда зависит от положения задней грани в поперечном направлении. Дифракционное поле в дальней зоне можно интерпретировать как результат интерференции обобщённых точечных источников (расположенных в крайних точках объекта) с соответствующими амплитудами и диаграммами излучения френелевского и равномерного типов. Установлено, что фундаментальным дифракционным

параметром для $3D$ -объектов постоянной толщины является критический угол дифракции $\theta_{кр} = \sqrt{\lambda/d}$, при котором влияние объёмности на спектр $3D$ -объекта становится значительным. Показано, что при углах дифракции $\theta \gg \theta_{кр}$, когда влияние протяжённости на спектр симметричного $3D$ -края существенно, вклад в спектр вторичной дифракции оказывается значительным. При наблюдении спектра в области $\theta \ll \theta_{кр}$ влияние вторичной дифракции заметно ослабевает и основную роль играет первичная дифракция, учитывающая виньетирование волн задней гранью.

В результате расчёта влияния отражательной способности внутренней грани $3D$ -объекта на его спектр установлено, что амплитуда компоненты, соответствующей вторичной дифракции, существенно зависит от коэффициента отражения света от этой грани. Данная компонента даёт максимальный вклад в случае абсолютно поглощающего симметричного $3D$ -края и нулевой для абсолютно отражающих металлических тел. В случае серых тел амплитуда вторичной дифракции занимает промежуточное значение и находится в прямой зависимости от коэффициента отражения света от внутренней поверхности.

Отмечено, что структура изображений во многом определяется отношением критического угла дифракции $\theta_{кр}$ к половинному угловому размеру $2\theta_0$ апертуры системы (фильтра). Установлено, что при $N \gg 1$ объёмные свойства, например, симметричного $3D$ -края проявляются в смещении его изображения (в окрестности геометрического положения границы) на величину, пропорциональную размеру зоны Френеля.

Исследованы особенности формирования спектров и изображений $3D$ -объектов постоянной толщины при освещении их волнами различной конфигурации (отличной от нормального падения): плоскими наклонными и сферическими. Показано, что выбором угла наклона плоской волны, освещающей симметричную $3D$ -цель, достигается перекрёстная селекция фрагментов передней и задней граней объекта и это создаёт предпосылки для более достоверного восстановления его геометрических параметров. При освещении $3D$ -объекта сферическими волнами в зависимости от их конфигурации открывается возможность селекции либо его передней, либо задней грани.

Экспериментальные результаты хорошо согласуются с теоретическими и подтверждают эффективность предложенного конструктивного метода расчёта дифракции Фраунгофера на объёмных телах постоянной толщины с использованием модели эквивалентных диафрагм.

Полученные результаты были реализованы при разработке и создании оптико-электронной системы для $3D$ -контроля керамических пластин для предприятия ЗАО «НЭВЗ-Керамикс» (г. Новосибирск). Учёт влияния объёмности изделия в соответствии с предложенными нами алгоритмами позволил заметно улучшить метрологические характеристики системы.

Разработанная теория дифракционных явлений на $3D$ -телах постоянной толщины может быть использована при их расчёте для случая объёмных объектов более сложной конфигурации, в том числе с неплоскими внутренними гранями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Мир, 1970. 720 с.
2. Хенл Х., Мауэ М., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
3. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 247 с.
4. Keller J. V. Geometrical theory of diffraction // JOSA. 1962. 52, Is. 2. P. 116–130.
5. Коронкевич В. П., Кривенков Б. Е., Михляев С. В., Чугуй Ю. В. Оптико-геометрический метод расчета дифракции Фраунгофера на объёмных телах // Автометрия. 1980. № 2. С. 25–35.

6. **Chugui Yu. V., Koronkevich V. P., Krivenkov B. E., Mikhlyayev S. V.** Quasigeometrical method for Fraunhofer diffraction calculation for three-dimensional bodies // JOSA. 1981. **71**, N 4. P. 483–489.
7. **Кривенков Б. Е., Чугуй Ю. В.** Дифракция Фраунгофера на объемных телах постоянной толщины // Автометрия. 1987. № 3. С. 79–92.
8. **Chugui Yu. V., Krivenkov B. E.** Fraunhofer diffraction by volumetric bodies of constant thickness // JOSA. 1989. **6**, N 5. P. 617–626.
9. **Гудмен Дж.** Введение в фурье-оптику. М.: Мир, 1970. 364 с.
10. **Чугуй Ю. В.** Фурье-оптика 3D-объектов применительно к размерному контролю // Опτικο-информационные измерительные и лазерные технологии и системы: Юбил. сб. избр. тр. КТИ НП СО РАН. Новосибирск: Академическое изд-во «Гео», 2012. С. 15–42.
11. **Chugui Yu. V., Zebreva K. A.** 3D diffraction by volumetric bodies of constant thickness under varying illumination applied to optical inspection // Meas. Sci. Technol. 2007. **18**, N 6. P. 1729–1734.
12. **Senchenko E. S., Chugui Yu. V.** Shadow inspection of 3D objects in partially coherent light // Meas. Sci. Rev. 2011. **11**, N 4. P. 104–107.
13. **Чугуй Ю. В.** Расчёт положения границы объекта при его проецировании в пространственно-неинвариантной когерентно-оптической системе // Автометрия. 2016. **52**, № 6. С. 50–60.
14. **Чугуй Ю. В.** Трёхмерные опτικο-электронные измерительные системы и лазерные технологии для научных и промышленных применений // Автометрия. 2015. **51**, № 4. С. 76–91.
15. **Справочник** по специальным функциям /Под ред. М. Абрамова, И. Стишина. М.: Наука, 1979. 832 с.
16. **Папулис А.** Теория системы и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971. 495 с.
17. **Chugui Yu. V., Sokolov V. A.** Formation and filtering in coherent light the images of 3D asymmetric edges // Proc. of 6th ISMQC IMEKO Symp. Metrology for Quality Control in Production. Vienna, Austria, 8–10 Sept. 1998. P. 117–124.

Поступила в редакцию 12 мая 2017 г.