

УДК 532.59+539.3

ГИДРОУПРУГОЕ ПОВЕДЕНИЕ СЛОЖНОЙ КОНСТРУКЦИИ, ПЛАВАЮЩЕЙ НА ВОЛНАХ

Е. А. Батяев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mail: john@hydro.nsc.ru

Разработан численный метод решения плоской задачи о гидроупругом поведении сложной конструкции, плавающей на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины. Движение конструкции, описываемое функцией прогиба, считается установившимся под воздействием набегающих волн. С помощью предложенного подхода, основанного на методе нормальных мод для однородных пластин, определяется решение гидродинамической части задачи. С использованием матрицы перехода между представлениями искомого прогиба в виде разложений по собственным функциям колебаний конструкции и пластины задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Показано, что результаты проведенного расчета хорошо согласуются с известными результатами расчетов для двусоставной шарнирной конструкции при длинах волн, сравнимых с длиной конструкции.

Ключевые слова: гидроупругость, плавающая конструкция, упругая неоднородная балка, собственные функции, гидродинамическое давление, метод нормальных мод.

Исследование гидроупругого поведения тел, плавающих на поверхности жидкости, представляет значительный практический интерес, что обусловлено применением таких объектов в качестве плавучих платформ, танкеров, понтонных сооружений. Особенность данных конструкций состоит в том, что их длина существенно превышает поперечные размеры, поэтому при проектировании таких тел в качестве модели рассматривается тонкая упругая пластина. Вследствие сложности механизма взаимодействия жидкости и конструкции значительная часть исследований поведения плавающих упругих пластин выполнена в предположении, что пластина однородна. Однако в реальности подобные сооружения являются неоднородными и многослойными. В этих условиях большое значение приобретают математическое моделирование сложных конструкций и развитие методов исследования их гидроупругого поведения на волнах.

В настоящей работе рассматривается плоская линейная задача о поведении произвольной конструкции на волнах. Слой жидкости конечной глубины ограничен снизу непроницаемым дном. Толщина конструкции значительно меньше ее длины. Осадкой конструкции пренебрегается. Движение конструкции, обусловленное взаимодействием с плоской поверхностью волной малой амплитуды, считается установившимся. Предполагается, что периодические колебания конструкции происходят с частотой, равной частоте набегающей волны.

Внешние нагрузки на конструкцию действуют только со стороны жидкости. Упругое поведение конструкции под действием распределенной нагрузки описывается с помощью

системы дифференциальных уравнений в зависимости от используемой модели упругого тела. В то же время распределение гидродинамического давления по смоченной части конструкции зависит от ее прогиба и определяется из решения задачи о дифракции плоской поверхностной волны на плавающем упругом теле. Таким образом, гидродинамическая и упругая части задачи являются взаимосвязанными и должны решаться одновременно.

Решение задачи о дифракции поверхностной волны на изотропной упругой пластине построено в работе [1]. С использованием метода нормальных мод решаются задачи для однородных тонких конструкций. При этом прогиб однородной пластины представляется в виде суперпозиции форм ее свободных колебаний в воздухе. Для однородной балки со свободными концами формы ее свободных колебаний известны и представляются в аналитическом виде, причем эти собственные формы не зависят от упругих свойств пластины. В результате решения гидродинамической части задачи с указанными функциями прогиба пластины определяются гидродинамические коэффициенты, также не зависящие от параметров пластины и используемые для определения гидродинамического давления на пластину. Поскольку с жидкостью контактирует только смоченная часть плавающей сложной конструкции (так же как и пластины), гидродинамическая часть общей задачи остается без изменений, а упругая часть задачи зависит от рассматриваемой математической модели упругого тела.

В настоящей работе произвольная плавающая конструкция моделируется неоднородной балкой Эйлера с коэффициентами, зависящими от продольной координаты. Концы балки свободны от напряжений. Искомой функцией является вертикальный прогиб балки. Целью данной работы является обобщение метода нормальных мод на случай плавающих неоднородных конструкций.

Постановка задачи. Гидроупругое поведение плавающей неоднородной конструкции исследуется в рамках линейной теории. Осадка и толщина конструкции предполагаются малыми по сравнению с ее длиной $2a$ и глубиной H . Периодические во времени колебания конструкции вызваны воздействием набегающей справа поверхностной волны малой амплитуды A с частотой ω (рис. 1). Начало декартовой прямоугольной системы координат xy расположено в середине конструкции. Жидкость полагается идеальной, весомой и несжимаемой, а ее течение — плоским и безвихревым. Слой жидкости ($-H \leq y \leq 0$) ограничен снизу горизонтальным непроницаемым дном ($y = -H$). Участки верхней границы жидкости $x > a$, $x < -a$ соответствуют свободной поверхности слоя жидкости, а участок $-a < x < a$ — области контакта конструкции с жидкостью. Функции $\eta(x, t)$ и $w(x, t)$ описывают поведение свободной поверхности и нормальный прогиб нижней поверхности конструкции соответственно:

$$y = \begin{cases} \eta(x, t), & |x| > a, \\ w(x, t), & |x| < a \end{cases}$$

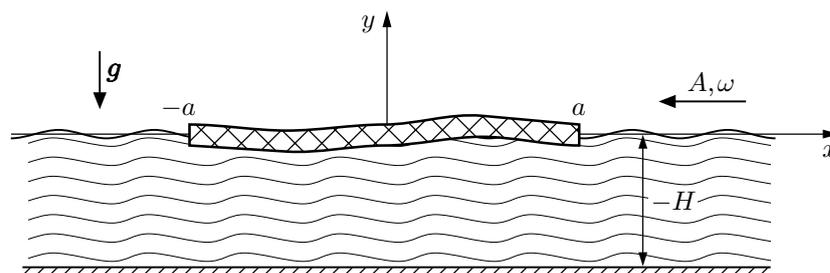


Рис. 1. Схема движения конструкции и жидкости

(t — время). В линейной постановке течение жидкости описывается потенциалом скоростей $\varphi(x, y, t)$. Далее используются безразмерные величины: в качестве масштаба длины принимается полудлина пластины a , масштаба времени — $1/\omega$, масштаба гидродинамического давления — $\rho g A$ (ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения), масштаба потенциала скоростей — $A\omega a$, масштаба деформаций конструкции и возвышения свободной поверхности — A ($x = ax'$, $y = ay'$, $t = t'/\omega$, $\eta = A\eta'$, $w = Aw'$, $\varphi = A\omega a\varphi'$, $p = \rho g A p'$). Уравнения движения жидкости и граничные условия в безразмерных переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} + \varphi_{yy} &= 0 & (-\infty < x < \infty, \quad -H_0 < y < 0), \\ \varphi_y &= 0 & (-\infty < x < \infty, \quad y = -H_0), \\ \varphi_y &= \begin{cases} \eta_t, & y = 0, |x| > 1, \\ w_t, & y = 0, |x| < 1, \end{cases} & \gamma\varphi_t = \begin{cases} -\eta, & y = 0, |x| > 1, \\ -p - w, & y = 0, |x| < 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

где $H_0 = H/a$; $\gamma = a\omega^2/g$; штрихи везде опущены. Заметим, что в безразмерных переменных частота набегающей на конструкцию волны и ее амплитуда равны единице.

Решение задачи будем искать при условиях излучения, налагаемых на поведение свободной поверхности жидкости при $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\begin{aligned} \eta(x, 0, t) &\sim \cos(kx + t) + A^+ \cos(kx - t + \delta^+) & (x \rightarrow +\infty), \\ \eta(x, 0, t) &\sim \cos(kx + t) + A^- \cos(kx + t + \delta^-) & (x \rightarrow -\infty). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь A^+ , A^- — амплитуды отраженной и прошедшей волн соответственно; δ^+ , δ^- — соответствующие сдвиги фаз; k — безразмерное волновое число, являющееся положительным решением уравнения $k \operatorname{th} kH_0 = \gamma$. Величины A^+ , A^- , δ^+ , δ^- заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения полной задачи.

В предположении периодичности колебаний конструкции потенциал скоростей $\varphi(x, y, t)$, соответствующий установившемуся движению, нормальный прогиб нижней поверхности конструкции $w(x, t)$ и гидродинамическое давление $p(x, y, t)$ представляются в виде [1]

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t) &= \varphi_{\Pi}(x, y, t) + \operatorname{Re}(i e^{it} \Phi(x, y)), & w(t, x) &= \operatorname{Re}(e^{it} W(x)), \\ \varphi_{\Pi}(x, y, t) &= -\frac{1}{\gamma} \frac{\operatorname{ch}(k[y + H_0])}{\operatorname{ch}(kH_0)} \sin(kx + t), & p(x, y, t) &= \operatorname{Re}(e^{it} P(x, y)), \end{aligned} \quad (3)$$

где φ_{Π} — потенциал скоростей падающей волны в отсутствие конструкции. Функции $\Phi(x, y)$, $W(x)$ и $P(x, y)$ являются комплексными. Тогда гидродинамическая часть исходной задачи (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi_{xx} + \Phi_{yy} &= 0 & (-\infty < x < \infty, \quad -H_0 < y < 0), & \Phi_y = 0 & (y = -H_0), \\ \Phi_y - \gamma\Phi &= \begin{cases} 0, & y = 0, |x| > 1, \\ -P(x, 0), & y = 0, |x| < 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Условия излучения (2) для функций (3) принимают вид

$$\Phi(x, 0) \sim B^+ e^{-ikx} \quad (x \rightarrow +\infty), \quad \Phi(x, 0) \sim B^- e^{ikx} \quad (x \rightarrow -\infty),$$

где B^+ , B^- — неизвестные коэффициенты. Следует отметить, что течение жидкости зависит только от прогиба $W(x)$ той части конструкции, которая находится в непосредственном контакте с жидкостью, и не зависит от деформаций остальных ее частей. Поведение

упругой конструкции под действием волн определяется распределением гидродинамического давления $P(x, 0)$, зависящим от прогиба $W(x)$, согласно интегралу Коши — Лагранжа:

$$P(x, 0) = \gamma\Phi(x, 0) - W(x) + e^{ikx}. \quad (5)$$

В качестве модели упругой конструкции рассмотрим неоднородную балку Эйлера, движение которой описывается уравнением

$$m(x) \frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{d^2}{dx^2} \left(D(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = p(x, 0, t) \quad (|x| < a),$$

где $m(x)$ — масса балки на единицу длины; $D(x) = E(x)J(x)$ — распределение изгибной жесткости вдоль балки; $E(x)$ — модуль Юнга; $J(x)$ — осевой момент инерции сечения балки относительно ее средней линии. В случае однородной пластины данные величины постоянны. Такое приближение оправдано в условиях предположения о малости поперечных размеров балки по сравнению с ее длиной. Воздействие на балку распределенной нагрузки $p(x, 0, t)$ определяется гидродинамическим давлением со стороны жидкости. Краевые условия свободных концов балки имеют вид

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^3 w}{dx^3} = 0 \quad \text{при } x = \pm a.$$

В новых функциях (3) упругая часть задачи принимает вид

$$-\alpha(x)\omega^2 W(x) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\beta(x) \frac{d^2 W(x)}{dx^2} \right) = P(x, 0), \quad W''(\pm 1) = W'''(\pm 1) = 0, \quad (6)$$

где $\alpha(x) = m(x)/(\rho g)$; $\beta(x) = D(x)/(\rho g a^4)$; штрих означает дифференцирование по координате x .

Метод решения. Для нахождения зависимости между $P(x, 0)$ и $W(x)$ используются нетривиальные решения $\psi_n(x)$ ($n \geq 1$) спектральной задачи

$$\frac{d^4 \psi_n(x)}{dx^4} = \lambda_n^4 \psi_n(x), \quad \psi_n''(\pm 1) = \psi_n'''(\pm 1) = 0,$$

где λ_n — собственные числа. Функции $\psi_n(x)$ являются ортонормированными:

$$\int_{-1}^1 \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \delta_{nm}$$

(δ_{nm} — символ Кронекера). Собственные числа λ_n определяются из дисперсионного соотношения $\operatorname{tg} \lambda_n = (-1)^{n+1} \operatorname{th} \lambda_n$, $n \geq 3$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Функции $\psi_n(x)$ приведены в [1] и, по сути, являются собственными формами однородной балки со свободными концами.

Функции $W(x)$ и $P(x, 0)$ можно представить в виде разложений по полной системе ортонормированных функций $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(x), \quad P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \psi_n(x) \quad (7)$$

(A_n, P_n — комплексные коэффициенты). В работе [1] получено представление решения задачи (4) (потенциала скоростей $\Phi(x, y)$) вдоль смоченной части конструкции $y = 0$, $|x| < 1$ в виде

$$\Phi(x, 0) = - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} P_n C_{nm} \right) \psi_m(x), \quad (8)$$

где C_{nm} — комплексные гидродинамические коэффициенты, найденные в аналитическом виде и не зависящие от упругих характеристик конструкции. С помощью разложений (7), (8) и формулы (5) получаем

$$P_n + \gamma \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} P_m = -A_n + q_n, \quad (9)$$

где

$$q_n = \int_{-1}^1 \psi_n(x) e^{ikx} dx, \quad n \geq 1.$$

Система алгебраических уравнений (9) позволяет вычислить коэффициенты P_n в разложении гидродинамического давления (7), если известны коэффициенты A_n в разложении прогиба конструкции. Коэффициенты C_{nm} и q_n не зависят от типа конструкции.

Для определения неизвестных коэффициентов A_n рассмотрим представление прогиба конструкции $W(x)$ в виде

$$W(x) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m W_m(x), \quad (10)$$

где $W_m(x)$ — нетривиальные вещественные решения спектральной задачи

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\beta(x) \frac{d^2 W_m(x)}{dx^2} \right) = \alpha(x) \omega_m^2 W_m(x), \quad W_m''(\pm 1) = W_m'''(\pm 1) = 0,$$

т. е. собственные формы колебаний конструкции со свободными от напряжений концами в вакууме; ω_n — соответствующие им собственные частоты колебаний. Нетрудно заметить, что система функций $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ обобщенно-ортогональна и предполагается нормированной:

$$\int_{-1}^1 \alpha(x) W_n(x) W_m(x) dx = 0 \quad (n \neq m), \quad \int_{-1}^1 \alpha(x) W_n^2(x) dx = 1.$$

Если собственные формы $W_m(x)$ и собственные частоты ω_n конструкции известны, то, подставив в уравнение упругой линии (6) прогиб (10) и гидродинамическое давление (7), умножив это уравнение на $W_m(x)$ и проинтегрировав по x на интервале $[-1, 1]$, получим

$$(\omega_m^2 - \omega^2) E_m = \sum_{n=1}^{\infty} P_n S_{mn} \quad (m \geq 1), \quad (11)$$

где

$$S_{mn} = \int_{-1}^1 W_m(x) \psi_n(x) dx. \quad (12)$$

Далее, умножив на $\psi_n(x)$ два альтернативных выражения для прогиба $W(x)$ (7), (10) и проинтегрировав по x от -1 до 1 с учетом (11), находим выражение для A_n :

$$A_n = \sum_{k=1}^{\infty} U_{nk} P_k, \quad U_{nk} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S_{mk} S_{mn}}{\omega_m^2 - \omega^2} \quad (n \geq 1). \quad (13)$$

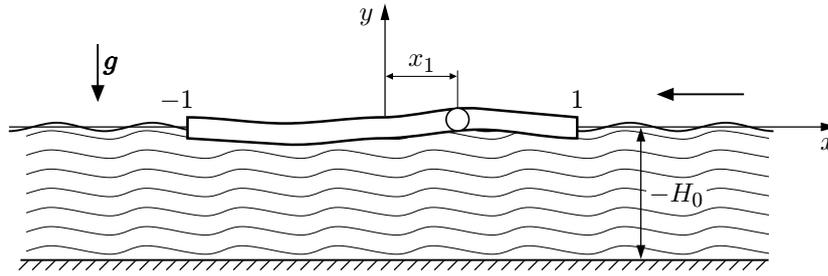


Рис. 2. Двусоставная пластина с простым шарниром

Подставляя представление (13) в (9), получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов P_n :

$$P_n + \sum_{m=1}^{\infty} [\gamma C_{nm} + U_{nm}] P_m = q_n \quad (n \geq 1). \quad (14)$$

В случае если какая-либо собственная частота с номером l совпадет с частотой набегающей волны: $\omega_l = \omega$, для коэффициентов A_n справедливо выражение

$$A_n = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{\infty} U_{nk} P_k + E_l S_{ln},$$

а вместо (14) необходимо решать систему уравнений

$$P_n + \gamma \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} P_m + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{\infty} U_{nk} P_k + E_l S_{ln} = q_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} P_n S_{mn} = 0.$$

Решив симметрическую систему уравнений (14), коэффициенты E_m можно определить по формуле (11), а прогиб балки — по формуле (10). Распределение гидродинамического давления $P(x, 0)$ на смоченной части конструкции вычисляется по формуле (7).

Тестовый пример расчета. Для определения границ области применимости изложенного метода при исследовании гидроупругого поведения плавающих конструкций в качестве последней была выбрана двусоставная балка с простым шарнирным соединением (рис. 2). Обе части конструкции представляют собой однородные пластины различной длины с одинаковыми постоянными инерционными и упругими характеристиками: $m(x) = m$, $D(x) = D$. Скрепляющий пластины шарнир расположен в точке с безразмерной координатой x_1 , суммарная длина пластин равна двум. Выбор такой конструкции обусловлен возможностью аналитического представления ее собственных форм колебаний $W_n(x)$ и собственных частот ω_n . Кроме того, в работе [2] приведены результаты расчетов прогиба конструкции данного типа при различной длине набегающих волн, полученные с использованием других представлений искомых функций $W(x)$ и $P(x, 0)$.

Соответствующая рассматриваемой конструкции спектральная задача определения собственных форм колебаний имеет вид

$$\frac{d^4 W_n(x)}{dx^4} = \lambda_n^4 W_n(x), \quad W_n = \begin{cases} W_n^-, & -1 < x < x_1, \\ W_n^+, & x_1 < x < 1, \end{cases}$$

$$(W_n^-)''(-1) = (W_n^-)'''(-1) = 0, \quad (W_n^+)''(1) = (W_n^+)'''(1) = 0,$$

$$W_n^- = W_n^+, \quad (W_n^-)'' = (W_n^+)'' = 0, \quad (W_n^-)''' = (W_n^+)''' \quad \text{при } x = x_1.$$

Решения этой задачи имеют вид

$$W_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad W_1 = \begin{cases} 0, & -1 < x < x_1, \\ \sqrt{3/(1-x_1)^3}(x_1-x), & x_1 < x < 1, \end{cases}$$

$$W_2 = \begin{cases} \sqrt{3/(1+x_1)^3}(x_1-x), & -1 < x < x_1, \\ 0, & x_1 < x < 1, \end{cases}$$

$$W_n^-(x) = B_n \{ \sin z_n(x) + \operatorname{sh} z_n(x) - D_n [\cos z_n(x) + \operatorname{ch} z_n(x)] \},$$

$$W_n^+(x) = B_n C_n \{ \sin v_n(x) + \operatorname{sh} v_n(x) - F_n [\cos v_n(x) + \operatorname{ch} v_n(x)] \},$$

$$D_n = \frac{\sin z_n^* - \operatorname{sh} z_n^*}{\cos z_n^* - \operatorname{ch} z_n^*}, \quad F_n = \frac{\sin v_n^* - \operatorname{sh} v_n^*}{\cos v_n^* - \operatorname{ch} v_n^*},$$

$$C_n = \frac{\operatorname{ch} v_n^* - \cos v_n^*}{\operatorname{ch} z_n^* - \cos z_n^*} \frac{1 - \operatorname{ch} z_n^* \cos z_n^*}{1 - \operatorname{ch} v_n^* \cos v_n^*}, \quad B_n = \sqrt{\frac{\lambda_n}{D_n^2 z_n^* - F_n^2 C_n^2 v_n^*}},$$

$$z_n(x) = \lambda_n(x+1), \quad v_n(x) = \lambda_n(x-1), \quad z_n^* = z_n(x_1), \quad v_n^* = v_n(x_1).$$

Собственные значения λ_n , $n \geq 3$ ($\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$) определяются из уравнения

$$(\operatorname{sh} z_n^* \cos z_n^* - \operatorname{ch} z_n^* \sin z_n^*)(1 - \operatorname{ch} v_n^* \cos v_n^*) =$$

$$= (\operatorname{sh} v_n^* \cos v_n^* - \operatorname{ch} v_n^* \sin v_n^*)(1 - \operatorname{ch} z_n^* \cos z_n^*).$$

Нетрудно убедиться, что функции $\{W_n\}_{n=1}^\infty$ представляют собой обобщенно-ортогональную систему. Соответствующие этим функциям собственные частоты определяются по формуле

$$\omega_n = \frac{\lambda_n^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Численные расчеты проводились с использованием данных, приведенных в [2] для трех значений длины набегающих волн. Половина длины конструкции a принималась равной 5 м, использовались следующие значения длины волн: 0,765 м (короткие волны), 3,1 м (средние), 8,6 м (длинные волны). На рис. 3 в безразмерных переменных представлены результаты расчета прогиба шарнирной двусоставной пластины в зависимости от продольной координаты. Шарнир находился на расстоянии от середины балки $x_1 = 0,5$. При решении бесконечной системы (14) использовался метод редукции. Видно, что в случае коротких волн расчетная кривая существенно отличается от тестовой кривой по всей длине конструкции (см. рис. 3, а, б). При увеличении числа удерживаемых мод это различие несколько уменьшается (см. рис. 3, б). Следует отметить, что в случае коротких волн в литературе приводятся разные результаты расчетов даже для однородных пластин. В случае средних и длинных волн расчетная кривая, полученная с использованием предлагаемого метода, хорошо согласуется с тестовыми кривыми при небольшом количестве удерживаемых мод (см. рис. 3, в, д). Отклонение расчетных кривых от тестовых с ростом числа мод (см. рис. 3, з, е) обусловлено неточным вычислением коэффициентов S_{mn} по формуле (12) при интегрировании высших, быстроосциллирующих мод. Данное обстоятельство является основным ограничением при использовании вычислительного алгоритма, созданного на основе предложенного метода. Однако рассматриваемая шарнирная конструкция в определенном смысле является экстремальной, поскольку кривая прогиба имеет четко выраженный излом в точке расположения шарнира. Для реальных конструкций указанное

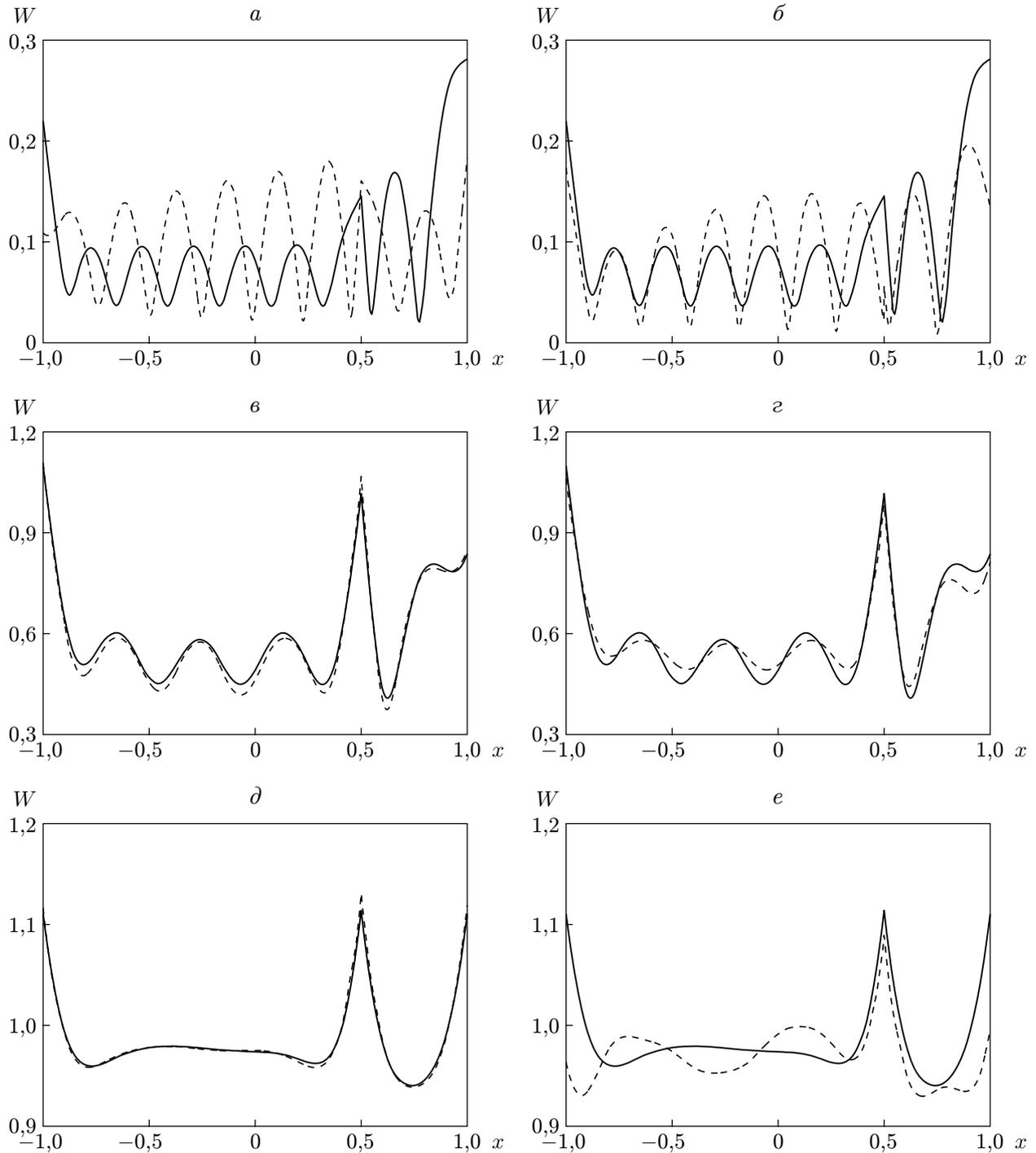


Рис. 3. Зависимость прогиба шарнирной двусоставной пластины от продольной координаты:

a, в, д — результаты расчетов для 10 удерживаемых мод, *б, г, е* — результаты расчета для 100 удерживаемых мод; *a, б* — короткие набегающие волны, *в, г* — средние, *д, е* — длинные набегающие волны; сплошные линии — результаты расчетов, полученные в работе [2], штриховые — результаты расчета с использованием предложенного метода

ограничение не имеет большого значения, поскольку их собственные функции являются более гладкими, что обеспечивает необходимую точность расчетов при использовании минимального количества мод.

Результаты настоящей работы показывают, что предлагаемый обобщенный метод нормальных мод может применяться для расчета гидроупругого поведения сложных плавающих конструкций при длинах волн, сравнимых с длиной конструкции, даже при небольшом количестве удерживаемых собственных форм конструкции.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Коробкин А. А.** Численное и асимптотическое исследование плоской задачи о гидроупругом поведении плавающей пластины на волнах // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 2. С. 90–96.
2. **Khabakhpasheva T. I., Korobkin A. A.** Hydroelastic behaviour of compound floating plate in waves // J. Engng Math. 2002. V. 44. P. 21–40.

Поступила в редакцию 8/XII 2008 г.
