

УДК 539.3

РАССЛОЕНИЕ В БАЛКЕ, СВОЙСТВА МАТЕРИАЛА КОТОРОЙ НЕПРЕРЫВНО ИЗМЕНЯЮТСЯ В ДВУХ НАПРАВЛЕНИЯХ

В. И. Ризов

Университет архитектуры, гражданского строительства и геодезии,
1046 София, Болгария
E-mail: v_rizov_fhe@uacg.bg

Проводится аналитическое исследование задачи о расслоении материала балки с трещиной сдвига внахлест в предположении, что его свойства непрерывно изменяются по ширине и толщине балки (балка из функционально-градиентного материала). При постановке задачи используются понятие скорости высвобождения энергии деформации и методы линейной механики разрушения. Скорость полной энергии высвобождения энергии представляется в виде суммы скоростей высвобождения энергии в поперечных сечениях балки, расположенных перед фронтом ее распространения и за ним. Исследуется влияние на процесс расслоения положения трещины в балке и закона изменения свойств материала балки по ее поперечному сечению.

Ключевые слова: балка, функционально-градиентный материал, линейная механика разрушения, аналитическое решение.

DOI: 10.15372/PMTF20180118

Введение. В последнее время широко используются конструкции, изготовленные из функционально-градиентных материалов (материалов, свойства которых непрерывно изменяются по одной или нескольким пространственным координатам) [1]. В отличие от слоистых материалов в таких материалах отсутствует межслойная концентрация напряжений [2]. Исследованию расслоения в конструкциях из функционально-градиентных материалов уделяется большое внимание (см., например, [3, 4]). Однако работ, посвященных изучению расслоения материалов, свойства которых изменяются по двум пространственным координатам, сравнительно немного. В данной работе выполнено аналитическое исследование задачи о расслоении в балке с трещиной сдвига внахлест в предположении, что свойства материала балки непрерывно изменяются по ее ширине и толщине.

1. Постановка задачи. Геометрия балки, изготовленной из функционально-градиентного материала, расслоение которого исследуется в настоящей работе, представлена на рис. 1. Для моделирования условий, которые могут привести к расслоению материала, в среднем сечении балки выполнен вертикальный надрез глубиной h_2 . В балке имеется трещина расслоения, расположенная симметрично относительно среднего сечения балки. Следует отметить, что функционально-градиентные материалы могут быть изготовлены путем последовательного наложения одного слоя на другой [1]. При эксплуатации конструкции это может привести к расслоению материала. Трещина расслоения расположена на расстоянии h_1 от нижней лицевой поверхности балки и на расстоянии h_2

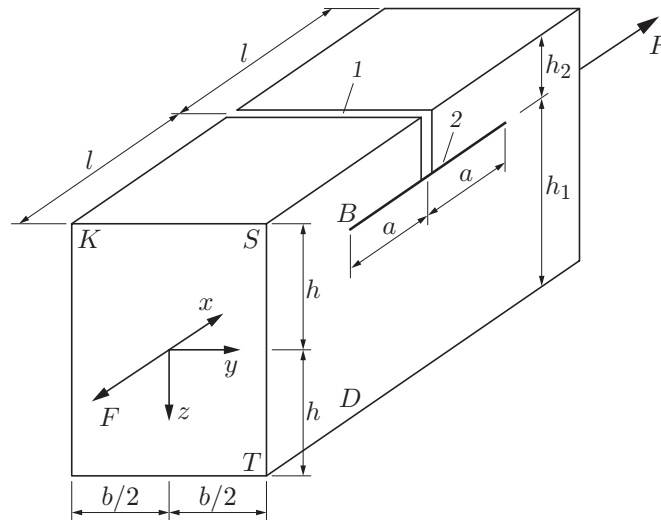


Рис. 1. Геометрия балки и схема нагружения:
1 — надрез, 2 — трещина

от верхней лицевой поверхности. Поперечное сечение балки представляет собой прямоугольник шириной b и высотой $2h$. Длина балки равна $2l$. В центре торцевых свободных сечений балки приложены продольные силы F (см. рис. 1). Предполагается, что материал балки является линейно-упругим и подчиняется закону Гука. Модули упругости изменяются по ширине и толщине поперечного сечения балки по линейному закону. Принимаются гипотезы Бернулли и предполагается, что отношение длины балки к ее толщине велико. Следует отметить, что гипотезы Бернулли часто используются при исследовании разрушения в балках из функционально-градиентных материалов [3, 4]. Поскольку принимаются гипотезы Бернулли и балка нагружена только растягивающими продольными силами, единственной отличной от нуля деформацией является продольная деформация ε . Таким образом, согласно условию совместности при малых деформациях продольная деформация ε изменяется по поперечному сечению балки по линейному закону.

2. Скорость высвобождения энергии деформации. Расслоение материала балки исследуется с использованием понятия скорости высвобождения энергии деформации. Для балки из линейно-упругого материала выражение для скорости высвобождения энергии деформации G записывается в виде [5]

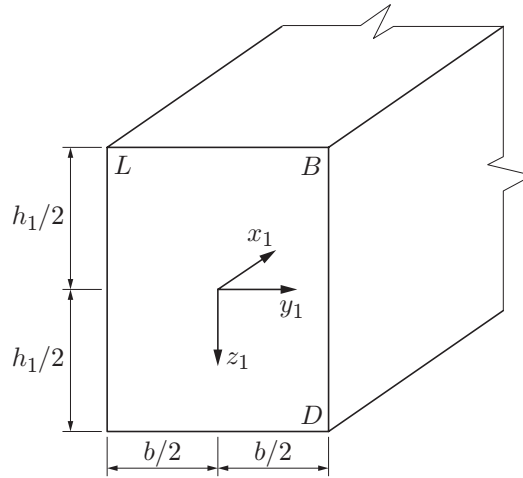
$$G = \frac{1}{b} \frac{dU}{da}, \quad (1)$$

где U — энергия деформации; da — бесконечно малое приращение длины трещины.

В силу геометрической симметрии (см. рис. 1) задача о расслоении решается только для левой половины балки $0 \leq x \leq l$. Часть балки, расположенная выше трещины, свободна от напряжений (см. рис. 1), поэтому энергия деформации равна сумме энергий деформации в объеме материала балки, свободном от трещины, и в объеме материала балки, расположенном под трещиной:

$$U = \int_{-h}^h \left[\int_{-b/2}^{b/2} \left(\int_0^{l-a} u_{0U} dx \right) dy \right] dz + \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left[\int_{-b/2}^{b/2} \left(\int_0^a u_{0L} dx_1 \right) dy_1 \right] dz_1. \quad (2)$$

Здесь x_1, y_1, z_1 — пространственные координаты (рис. 2); u_{0U}, u_{0L} — плотности энергии деформации в объеме материала балки, свободном от трещины, и в объеме материала балки, расположенном под трещиной, соответственно.

Рис. 2. Часть поперечного сечения балки, находящаяся за фронтом LB трещины

Плотность энергии деформации u_{0U} определяется по формуле

$$u_{0U} = \sigma^2 / (2E), \quad (3)$$

где напряжение σ вычисляется в соответствии с законом Гука.

3. Основные уравнения задачи. Обозначим через E_K , E_S , E_T значения модуля упругости в точках K , S , T поперечного сечения балки (см. рис. 1). Распределение модуля упругости по поперечному сечению балки зависит от модулей упругости E_K , E_S , E_T и вычисляется с использованием уравнения плоскости, проходящей через точки с координатами (E_K, y_K, z_K) , (E_S, y_S, z_S) и (E_T, y_T, z_T) [6]:

$$\begin{vmatrix} E & y & z & 1 \\ E_K & y_K & z_K & 1 \\ E_S & y_S & z_S & 1 \\ E_T & y_T & z_T & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Здесь

$$y_K = -b/2, \quad z_K = -h, \quad y_S = b/2, \quad z_S = -h, \quad y_T = b/2, \quad z_T = h. \quad (5)$$

Из (4), (5) получаем выражение для распределения модуля упругости по поперечному сечению балки

$$E = q_1 y + q_2 z + q_3, \quad (6)$$

где

$$q_1 = \frac{1}{b} (E_S - E_K), \quad q_2 = \frac{1}{2h} (E_T - E_S), \quad q_3 = \frac{1}{2} (E_T + E_K). \quad (7)$$

Распределение деформации ε по поперечному сечению балки получаем с использованием уравнения плоскости, проходящей через точки $(\varepsilon_K, y_K, z_K)$, $(\varepsilon_S, y_S, z_S)$, $(\varepsilon_T, y_T, z_T)$:

$$\varepsilon = r_1 y + r_2 z + r_3. \quad (8)$$

Здесь

$$r_1 = \frac{1}{b} (\varepsilon_S - \varepsilon_K), \quad r_2 = \frac{1}{2h} (\varepsilon_T - \varepsilon_S), \quad r_3 = \frac{1}{2} (\varepsilon_T + \varepsilon_S), \quad (9)$$

ε_K , ε_S , ε_T — деформации в точках K , S , T соответственно.

Величины r_1, r_2, r_3 определяются из уравнений равновесия поперечного сечения балки

$$N = \int_{-h}^h \left(\int_{-b/2}^{b/2} \sigma dy \right) dz, \quad M_y = \int_{-h}^h \left(\int_{-b/2}^{b/2} \sigma z dy \right) dz, \quad M_z = \int_{-h}^h \left(\int_{-b/2}^{b/2} \sigma y dy \right) dz \quad (10)$$

(N, M_y, M_z — осевая сила и изгибающие моменты относительно осей y, z соответственно). Очевидно, что

$$N = F, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0. \quad (11)$$

Подставляя (6), (9), (11) в (10), получаем уравнение, из которого определяются величины

$$r_1 = -\beta q_1, \quad r_2 = -\beta q_2, \quad r_3 = \beta q_3, \quad (12)$$

где

$$\beta = \frac{6F}{12q_3^2bh - q_1^2b^3h - 4q_2^2h^3b}. \quad (13)$$

Из (9), (12), (13) находим

$$\varepsilon = -\beta q_1 y - \beta q_2 z + \beta q_3. \quad (14)$$

Распределение деформации в сечениях балки $0 \leq x \leq l - a$ и $l + a \leq x \leq 2l$, свободных от трещины (см. рис. 1), вычисляется по формуле (14).

При $E_K = E_S = E_T = E$ выражение (14) принимает вид

$$\varepsilon = F/(2bhE).$$

По этой формуле вычисляются распределение деформации в прямоугольном поперечном сечении балки, выполненной из однородного материала и находящейся под действием растягивающей продольной силы F [7].

Плотность энергии деформации в материале балки, расположенном под трещиной, вычисляется по формуле

$$u_{0L} = \sigma^2/(2E),$$

где напряжение σ определяется в соответствии с законом Гука. Распределение напряжений в материале балки, расположенном под трещиной, вычисляется в системе координат (x_1, y_1, z_1) (см. рис. 2). Поэтому запишем формулы (6), (7) в этой системе координат:

$$E = q_{1r}y_1 + q_{2r}z_1 + q_{3r}. \quad (15)$$

Здесь

$$q_{1r} = \frac{1}{b}(E_B - E_L), \quad q_{2r} = \frac{1}{h_1}(E_D - E_B), \quad q_{3r} = \frac{1}{2}(E_D + E_L), \quad (16)$$

модуль упругости E_D в точке D равен модулю упругости E_T в точке T (см. рис. 1, 2):

$$E_D = E_T.$$

В (16) учтено, что толщина части балки, расположенной под трещиной, равна h_1 . С использованием формулы (6) вычисляются модули упругости E_L, E_B в точках L, B (см. рис. 1, 2):

$$E_L = -q_1b/2 + q_2(h - h_1) + q_3, \quad E_B = q_1b/2 + q_2(h - h_1) + q_3.$$

Выражение для распределения деформации (8) в системе координат (x_1, y_1, z_1) принимает следующий вид:

$$\varepsilon = r_{1L}y_1 + r_{2L}z_1 + r_{3L}. \quad (17)$$

Величины r_{1L} , r_{2L} , r_{3L} определяются из уравнений равновесия части балки, находящейся под трещиной (см. рис. 2):

$$N = \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(\int_{-b/2}^{b/2} \sigma dy_1 \right) dz_1, \quad (18)$$

$$M_{y_1} = \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(\int_{-b/2}^{b/2} \sigma z_1 dy_1 \right) dz_1, \quad M_{z_1} = \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(\int_{-b/2}^{b/2} \sigma y_1 dy_1 \right) dz_1.$$

Здесь

$$N = F, \quad M_{y_1} = -F(h - h_1/2), \quad M_{z_1} = 0. \quad (19)$$

Подставляя (15), (17), (19) в (18) и разрешая полученные уравнения относительно r_{1L} , r_{2L} , r_{3L} , находим

$$r_{1L} = -\frac{12q_{1r}q_{3r}F - 12q_{1r}q_{2r}M_{y_1}}{\psi}, \quad (20)$$

$$r_{2L} = \frac{12M_{y_1}}{h_1^3 b q_{3r}} - \frac{12q_{2r}q_{3r}F - 12q_{2r}^2 M_{y_1}}{\psi}, \quad r_{3L} = \frac{12q_{3r}F - 12q_{2r}M_{y_1}}{12q_{3r}^2 b h_1 - q_{1r}^2 b^3 h_1 - q_{2r}^2 h_1^3 b},$$

где $\psi = 12bh_1q_{3r}^2 - b^3h_1q_{1r}^2q_{3r} - bh_1^3q_{2r}^2q_{3r}$.

Выражение для распределения деформаций в части балки, расположенной под трещиной, получаем путем подстановки (20) в (17). При $E_L = E_B = E_D = E$ из формул (17), (20) следует выражение

$$\varepsilon = \frac{F}{bh_1E} + \frac{12M_{y_1}}{bh_1^3E} z_1,$$

которое совпадает с выражением для распределения деформации в балке с прямоугольным поперечным сечением размером $b \times h_1$, изготовленной из однородного материала и нагруженной продольной силой F [7].

Формула для скорости высвобождения энергии деформации при продвижении трещины в функционально-градиентном материале получается в результате умножения на два (в силу симметрии) выражения, найденного в результате подстановки (2), (3), (6), (12), (15), (17) в (1):

$$G = -\frac{1}{3} r_{1r}r_{3q_1}b^2h - \frac{4}{3} r_{1r}r_{3q_2}h^3 - \frac{1}{6} r_{1r}^2q_3b^2h - \frac{2}{3} r_{2r}^2q_3h^3 - 2r_{3r}^2q_3h +$$

$$+ \frac{1}{6} r_{1L}r_{3L}q_{1r}b^2h_1 + \frac{1}{6} r_{1L}r_{3L}q_{2r}h_1^3 + \frac{1}{12} r_{1L}^2q_{3r}b^2h_1 + \frac{1}{12} r_{2L}^2q_{3r}h_1^3 + r_{3L}^2q_{3r}h_1. \quad (21)$$

При $E_K = E_S = E_T = E$, $h_1 = h$ формула (21) переходит в формулу для скорости высвобождения энергии деформации в балке с трещиной, изготовленной из однородного материала [8]:

$$G = \frac{7F^2}{2Eb^2h}.$$

Выражение для скорости высвобождения энергии в результате продвижения трещины можно получить с использованием определения [9]

$$G = \frac{1}{b} \frac{U_a - U_b}{\Delta a}, \quad (22)$$

где U_b , U_a — энергия деформации до и после увеличения площади трещины соответственно; Δa — малое приращение длины трещины. Энергия деформации до увеличения трещины вычисляется путем интегрирования плотности энергии u_{0U} :

$$U_b = \Delta a \int_{-h}^h \left(\int_{-b/2}^{b/2} u_{0U} dy \right) dz, \quad (23)$$

после увеличения трещины — путем интегрирования плотности энергии u_{0L} :

$$U_a = \Delta a \int_{-h_1/2}^{h_1/2} \left(\int_{-b/2}^{b/2} u_{0L} dy_1 \right) dz_1. \quad (24)$$

Подставляя (2), (3), (6), (12), (15), (17), (23), (24) в (22) и умножая на два (в силу симметрии задачи) найденное выражение, получаем формулу для определения скорости высвобождения энергии, которое совпадает с выражением (21), что подтверждает правильность предложенного в данной работе метода анализа процесса расслоения в балке из функционально-градиентного материала.

4. Параметрическое исследование. Ниже приводятся результаты исследования влияния закона распределения свойств материала балки по ее поперечному сечению и расположения трещины по высоте балки на скорость высвобождения энергии деформации при продвижении трещины.

Вычисление безразмерной скорости высвобождения энергии деформации $G_N = G/(E_K b)$ с использованием формулы (21) проводилось при следующих значениях параметров: $b = 0,02$ м, $h = 0,003$ м, $F = 100$ Н. Градиент модуля упругости материала балки по ее ширине определяется отношением E_S/E_K . Вычисления проводились при различных значениях E_S и постоянном значении E_K . Расположение трещины по высоте балки определяется отношением $h_1/(2h)$.

На рис. 3 приведена зависимость скорости высвобождения энергии деформации от отношения E_S/E_K при $E_T/E_K = 2$ и различных значениях отношения $h_1/(2h)$. Скорость высвобождения энергии деформации уменьшается с увеличением отношения E_S/E_K , что свидетельствует об увеличении жесткости балки, а также с увеличением отношения $h_1/(2h)$ (при этом увеличиваются расстояние от нижней лицевой поверхности балки до трещины и эксцентриситет приложения силы F). Скорость изменения модуля упругости материала балки по ее высоте определяется отношением E_T/E_K . На рис. 4 приведена зависимость скорости высвобождения энергии деформации от отношения E_T/E_K при $h_1/(2h) = 0,3$, $E_S/E_K = 0,5$. Видно, что с увеличением отношения E_T/E_K скорость высвобождения энергии деформации уменьшается.

Заключение. Предложен аналитический метод исследования расслоения в балках, изготовленных из функционально-градиентного материала. Модули упругости материала балки изменяются как по ширине, так и по высоте поперечного сечения балки по линейному закону. Получено выражение для скорости высвобождения энергии деформации.

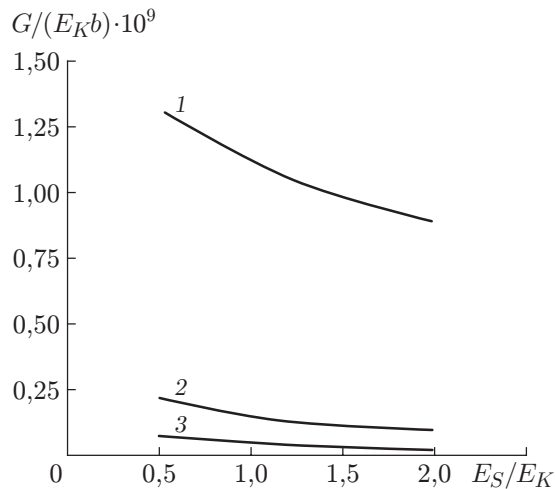


Рис. 3

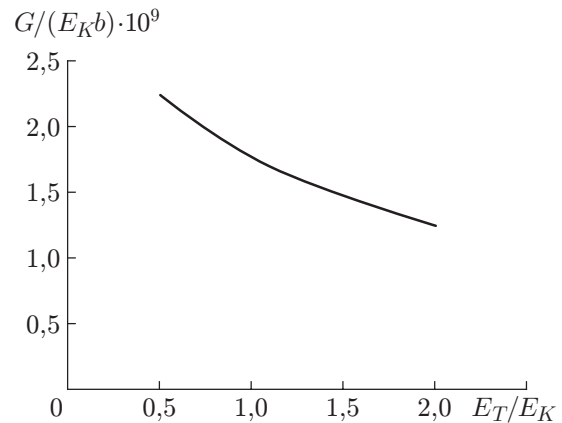


Рис. 4

Рис. 3. Зависимость безразмерной скорости высвобождения энергии деформации от отношения E_S/E_K при различных значениях отношения $h_1/(2h)$:
 1 — $h_1/(2h) = 0,3$, 2 — $h_1/(2h) = 0,5$, 3 — $h_1/(2h) = 0,7$

Рис. 4. Зависимость безразмерной скорости высвобождения энергии деформации от отношения E_T/E_K

Исследовано влияние закона распределения свойств материала балки по ее поперечному сечению и расположения трещины по высоте балки на скорость высвобождения энергии деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bohidar S. K., Sharma R., Mishra P. R.** Functionally graded materials: A critical review // Intern. J. Res. 2014. V. 1. P. 289–301.
2. **Szekrenyes A.** Semi-layerwise analysis of laminated plates with nonsingular delamination — The theorem of autocontinuity // Appl. Math. Modelling. 2016. V. 40, N 2. P. 1344–1371.
3. **Carpinteri A., Pugno N.** Cracks in re-entrant corners in functionally graded materials // Engng Fracture Mech. 2006. V. 73. P. 1279–1291.
4. **Upadhyay A. K., Simha K. R. Y.** Equivalent homogeneous variable depth beams for cracked FGM beams; compliance approach // Intern. J. Fracture. 2007. V. 144. P. 209–213.
5. **Parton V. Z.** Fracture mechanics. M.: Nauka, 1990.
6. **Korn G.** Mathematical handbook for scientists and engineers / G. Korn, T. Korn. M.: Nauka, 1970.
7. **Dowling N.** Mechanical behavior of materials. New Jersey: Pearson, 2007.
8. **Hutchinson J. W., Suo Z.** Mixed mode cracking in layered materials // Adv. Appl. Mech. 1992. V. 64. P. 804–810.
9. **Hsueh C. H., Tuan W. H., Wei W. C. J.** Analyses of steady-state interface fracture of elastic multilayered beams under four-point bending // Scripta Materialia. 2009. V. 60. P. 721–724.

Поступила в редакцию 5/XII 2016 г.,
 в окончательном варианте — 30/I 2017 г.