РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ
2007, том 43, № 1

УДК 519.234

О НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДАХ ПРИКЛАДНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

В. Г. Алексеев

Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН, г. Звенигород Московской обл.

Дан краткий обзор непараметрических методов прикладного спектрального анализа стационарных в широком смысле случайных процессов с дискретным временем. Подробно рассмотрены классическая периодограммная оценка спектральной плотности $f(\omega)$ исследуемого случайного процесса и оценка типа Уэлча. Даны практические рекомендации по выбору параметров обеих рассматриваемых статистических оценок.

Введение. Несмотря на широкое распространение вейвлетного анализа, проблема прикладного спектрального анализа стационарных случайных процессов (ССП) не теряет своей актуальности. В предлагаемой работе дан краткий обзор непараметрических методов прикладного спектрального анализа ССП с дискретным временем. Значительное внимание уделено практическим рекомендациям, вытекающим из работ [1–11].

1. Классическая периодограммная оценка. Итак, пусть $\{X(k),\ k = 0, \pm 1, \ldots\}$ – стационарный в широком смысле случайный процесс со средним (математическим ожиданием) $\langle X(k)\rangle \equiv 0$, корреляционной функцией $r(k) = \langle X(j)X(j+k)\rangle$ и спектральной плотностью

$$f(\omega) = (2\pi)^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ik\omega} r(k), \qquad \omega \in \Pi = [-\pi, \pi].$$

Пусть требуется по N последовательным отсчетам ССП $X(k)$ оценить значение спектральной плотности $f(\omega)$ в точке $\omega = \omega_0 \in [0, \pi]$. Классическая периодограммная оценка величины $f(\omega_0)$ строится в виде

$$f_N(\omega_0) = \int_\Pi A_N(\omega) I_N(\omega_0 + \omega)\, d\omega. \tag{1}$$

Здесь $I_N(\omega)$ – периодограмма, определяемая соотношением

$$I_N(\omega) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{k=1}^{N} X(k) \mathrm{e}^{ik\omega} \right|^2, \tag{2}$$

а функция $A_N(\omega)$, $\omega \in \Pi$, называемая обычно спектральным окном, отвечающим оценке (1), четна, ограничена и нормируется условием

$$\int_{\Pi} A_N(\omega)\, d\omega = 1.$$

В дальнейшем будет удобно предполагать, что функция $A_N(\omega)$ может быть представлена в виде

$$A_N(\omega) = h_N^{-1} w(\omega/h_N), \tag{3}$$

где h_N – некоторая числовая последовательность такая, что $0 < h_N \le \pi$ для всех натуральных N и

$$h_N + (Nh_N)^{-1} \to 0 \ (N \to \infty), \tag{4}$$

а весовая функция $w(x)$ четна, ограничена и удовлетворяет условиям $w(x) = 0$, если $|x| \ge 1$, и $\int_{-1}^{1} w(x)\, dx = 1.$

Весовая функция $w(x)$ и величина $2h_N$ определяют соответственно форму и ширину спектрального окна $A_N(\omega)$. Соотношение (4) означает, в частности, что с ростом объема выборки N спектральное окно $A_N(\omega)$ все более тесно концентрируется около нуля. Величину h_N будем иногда называть также масштабным множителем: при заданной весовой функции $w(x)$ она определяет выбор масштаба вдоль координатных осей.

Формула (3) вместе с последующими предположениями относительно функции $w(x)$ и последовательности h_N позволяет переписать оценку (1) величины $f(\omega_0)$ в следующем виде:

$$f_N(\omega_0) = h_N^{-1} \int_{-\pi}^{2\pi} w\left(\frac{\omega - \omega_0}{h_N}\right) I_N(\omega)\, d\omega. \tag{5}$$

Пределы интегрирования в формуле (5) не симметричны относительно точки 0, так как, по предположению, $\omega_0 \ge 0$.

Свойства периодограммы $I_N(\omega)$, определенной формулой (2), мы рассматривать не будем: их подробное описание можно найти в [12, § 18] и [13, Приложение 4.А]. В данной работе укажем лишь, что периодограмма $I_N(\omega)$ оценкой спектральной плотности служить не может.

Что же касается весовой функции $w(x)$, то на ее выборе остановимся подробнее. Назовем порядком весовой функции $w(x)$ наименьшее четное число $r \ge 2$, для которого

$$\int_{-1}^{1} x^r w(x)\, dx \ne 0. \tag{6}$$

В случае $r = 2$ функция $w(x) = w_2(x)$ может быть как неотрицательной, так и знакопеременной. Три простейшие весовые функции $w(x)$ второго порядка приведены в работе [12, с. 203]. Весовые функции $w(x) = w_r(x)$ порядков $r = 4, 6, \dots, 20$ могут быть найдены в [2, 6, 7], все они знакопеременны.

Смысл применения весовой функции $w(x)$ порядка $r > 2$ состоит в том, что она устраняет смещение оценки (5), возникающее за счет всех производных $f^{(\nu)}(\omega)$, где ν четно, $\nu < r$. Теоретические расчеты (см., например, [2, 3, 5]) свидетельствуют о том, что при достаточно больших N может быть достигнут очень большой выигрыш в точности за счет применения весовых функций высших порядков (порядков $r > 2$). При этом с увеличением N постепенно возрастают как порядок r оптимальной весовой функции $w(x)$, так и достигаемый с ее помощью выигрыш в точности оценивания. Экспериментальное исследование различных методов оценивания функции $f(\omega)$ на искусственно моделируемых реализациях шести моделей ССП с заранее известной спектральной плотностью подтверждает этот теоретический вывод [4, 6–8]. Заметный выигрыш в точности достигается уже при $N = 2^{13}$ [4] и тем более при $N = 2^{16}, 2^{19}$ и 2^{22} [6, 7]. В то же время применение знакопеременных весовых функций при $N = 2^{11}$ (и тем более при $N < 2^{11}$) требует большой осторожности. Заметим также, что при фиксированном N каждый переход к весовой функции более высокого порядка (переход от r к $r+2$) сопровождается возрастанием оптимального значения масштабного множителя h_N. Разумеется, применение весовых функций высших порядков теряет смысл в тех случаях, когда нет оснований предполагать, что спектральная плотность $f(\omega)$ является достаточно гладкой функцией. Например, если мы не знаем, существуют ли производные $f^{(\nu)}(\omega)$, $\nu > 1$, функции $f(\omega)$, от применения знакопеременных весовых функций следует воздержаться: это может лишь ухудшить качество оценивания.

Отдельного рассмотрения заслуживает случай, когда известно, что оцениваемая спектральной плотность $f(\omega)$ является функцией из класса $\mathrm{Lip}\,\alpha$, где $0 < \alpha \le 1$, т. е. удовлетворяет условию

$$\left|f(\omega') - f(\omega'')\right| < K\left|\omega' - \omega''\right|^{\alpha}, \quad K < \infty,$$

каковы бы ни были точки ω' и ω'' на отрезке П. Для этого случая в работе [1] предложена весовая функция

$$w(x) = (1+\alpha)(1-|x|^{\alpha})/2\alpha, \quad |x| \le 1. \tag{7}$$

Очень высокая оценка весовой функции (7) дается, в частности, в [14, гл. 3] и [15, § 7].

2. Классическая периодограммная оценка. Уточненные рекомендации. До настоящего времени предметом нашего рассмотрения была статистическая оценка $f_N(\omega_0)$, определенная формулой (5). Исследуя оценку (5), ее зависимость от выбора весовой функции $w(x)$ и масштабного множителя h_N, мы предполагали, что правая часть формулы (5) вычисляется точно. В действительности, вычисляя оценку $f_N(\omega_0)$ по формуле (5) на компьютере, мы неизбежно заменяем интеграл в ее правой части интегральной суммой. К возникающей при этом дополнительной погрешности наиболее чувствительны оценки высших порядков (порядков $r > 2$).

Действительно, применяя в заданных условиях весовую функцию $w_r(x)$ порядка $r > 2$, мы ожидаем существенного выигрыша в точности за счет того, что для всех четных j, не превосходящих $r-2$, выполняется равенство

$$\int_{-1}^{1} x^{j} w(x)\,dx = 0. \tag{8}$$

Если же в процессе вычислений по формуле (5) окажется, что равенство (8) выполняется не точно, а лишь приближенно, то ожидаемый выигрыш в точности может быть если не полностью, то, по крайней мере, частично утерян.

Естественным образом приходим к необходимости замены весовой функции $w_r(x)$ порядка $r>2$ набором весовых коэффициентов $\{w_r(k)\}$, удовлетворяющих условиям $w_r(-k)=w_r(k)$,

$$\sum_{k} w_r(k) = 1, \tag{9}$$

$$\sum_{k} k^{j} w_r(k) = 0, \quad j = 1, \ldots, r-1. \tag{10}$$

Наборы весовых коэффициентов $\{w_r(k)\}$, удовлетворяющие условиям (9) и (10) для $r = 4, 6, 8, 10$, могут быть найдены в [10]. Важно отметить при этом, что ширина спектрального окна, отвечающего каждому из наборов $\{w_r(k)\}$, не фиксируется: шириной спектрального окна управляет параметр n, принимающий целочисленные значения.

Предлагаемая нами замена весовых функций $w(x)$ наборами весовых коэффициентов $\{w(k)\}$, разумеется, не была реализована в работах [4, 6–8], выполненных задолго до появления работы [10]. И все же существенный выигрыш в точности за счет применения весовых функций $w_r(x)$ порядков $r>2$ был достигнут в работах [4, 6, 7]. Не может быть сомнений в том, что этот выигрыш оказался бы гораздо более весомым, если бы замена весовых функций $w_r(x)$ порядков $r = 4, 6, 8, 10$ соответствующими наборами $\{w_r(k)\}$ была реализована.

Осталось указать на то обстоятельство, что в основу построения предложенных в [10] дискретных наборов $\{w_r(k)\}$, $r = 2, 4, 6, 8, 10$, положены разложения в ряд Фурье полиномиальных тригонометрических ядер типа Джексона $J_{l,n}(x)$, благоприятные свойства которых, по-видимому, трудно переоценить. Определения и основные свойства ядер типа Джексона описаны в [16, гл. II, § 3]. Разложения в ряд Фурье этих ядер могут быть найдены в работе [17] для $l = 1, 2, 3, 4$ и в работе [9] для $l = 5$. Кроме того, точные числовые значения коэффициентов Фурье ядер $J_{l,n}(x)$ для ряда значений двумерного параметра (l, n) представлены в [18–23]. Тем самым читателю предоставляется возможность в ряде случаев существенно ускорить вычисление интересующего набора весовых коэффициентов $\{w_r(k)\}$.

3. Оценки производных спектральной плотности. Построение оценок производных спектральной плотности $f(\omega)$ в общих чертах подобно построению оценки самой спектральной плотности. Оценку ν-й производной функции $f(\omega)$ в точке $\omega = \omega_0 \in [0, \pi]$ будем искать в виде

$$D^{\nu} f_N(\omega_0) = \frac{\nu!}{h_N^{\nu+1}} \int_{-\pi}^{2\pi} w\left(\frac{\omega-\omega_0}{h_N}\right) I_N(\omega)\,d\omega. \tag{11}$$

Здесь $I_N(\omega)$ – периодограмма, определяемая формулой (2); h_N – некоторая числовая последовательность такая, что $0 < h_N \le \pi$ для всех натуральных N и

$$h_N + (N h_N^{2\nu+1})^{-1} \to 0 \quad (N \to \infty),$$

а $w(x)$ – некоторая ограниченная функция, удовлетворяющая условиям $w(x) = 0$, если $|x| \ge 1$, $w(-x) = (-1)^\nu w(x)$ и

$$\int_{-1}^{1} x^j w(x)\,dx = \begin{cases} 0, & j = 0, \ldots, \nu - 1; \\ 1, & j = \nu. \end{cases}$$

Порядком весовой функции $w(x)$ назовем наименьшее целое число $r \ge$ $\ge \nu + 2$ той же четности, что и ν, для которого выполнено неравенство (6).

Как и при оценивании самой функции $f(\omega)$, применение весовых функций высших порядков (порядков $r > \nu + 2$) может привести здесь к очень большому выигрышу в точности оценивания, если только объем выборки N не слишком мал и оцениваемая спектральная плотность $f(\omega)$ является достаточно гладкой (многократно дифференцируемой) функцией. Численные эксперименты [8] свидетельствуют о том, что заметный выигрыш в точности за счет применения весовых функций высших порядков может быть достигнут уже при $N = 2^{11}$. Для $\nu = 1, 2, 4, 6, 8$ и ряда значений $r \ge \nu + 2$ весовые функции $w(x) = w_r(x)$ могут быть найдены в работах [6, 7, 24]. Кроме того, в [11] для $\nu = 1, 2, 3, 4$ и ряда значений $r \ge \nu + 2$ приведены наборы весовых коэффициентов $\{w_r(k)\}$, позволяющие устранить погрешность, возникающую при переходе от теоретической оценки (11) к ее машинной реализации.

Что же дает нам вычисление производных спектральной плотности? Так как смещение оценки (5) r-го порядка (т. е. использующей весовую функцию r-го порядка) в первом приближении пропорционально производной $f^{(r)}(\omega_0)$, а дисперсия оценки пропорциональна квадрату самой спектральной плотности, получаем возможность вместе с оценкой функции $f(\omega)$ вычислить и средний квадрат ошибки оценивания, равный сумме дисперсии оценки и квадрата ее смещения. Кроме того, если оценка $D^\nu f_N(\omega)$ ведет себя «плохо» (сильно осциллирует) при больших N, это может свидетельствовать о том, что производная $f^{(\nu)}(\omega)$ в интересующем нас частотном интервале не существует. Таким образом, мы получаем возможность проверить и уточнить наши априорные предположения относительно степени гладкости функции $f(\omega)$.

4. Оценка типа Уэлча. Говоря об оценке спектральной плотности типа Уэлча, мы имеем в виду вычислительный алгоритм, включающий в себя разбиение всего интервала наблюдения длины N на конечное число неперекрывающихся или частично перекрывающихся интервалов длины $M < N$, вычисление по каждому из них периодограммы и ее последующее осреднение по числу подынтервалов длины M. При этом вместо периодограммы (2) используется модифицированная периодограмма $I_M^{\{B\}}(\omega)$, определяемая соотношением

$$I_M^{\{B\}}(\omega) = \left| \sum_{k=1}^{M} b(k) X(k) \mathrm{e}^{ik\omega} \right|^2 \left[2\pi \sum_{k=1}^{M} b^2(k) \right]^{-1},$$

где $B=\{b(k),\ k=1,\dots,M\}$ – так называемое окно данных, используемое для домножения (неравномерного взвешивания) реализации $\{X(k), k=1,\dots,M\}$. Последовательность $b(k)$ чаще всего плавно убывает от середины отрезка реализации к ее краям, чем достигается сглаживание краев реализации и, в конечном счете, уменьшение смещения периодограммы. Большое число разнообразных окон данных B может быть найдено в [14, 25–28]. В представленной работе, следуя [9], мы используем в качестве окон данных B разложения в ряд Фурье ядер типа Джексона $J_{l,n}(x)$, уже упомянутых в разд. 2.

К числу достоинств оценки типа Уэлча следует отнести, прежде всего, ее высокую помехозащищенность, т. е. слабую зависимость ее математического ожидания от возмущений и всплесков на удаленных частотах, а также относительно небольшой объем вычислительных операций, требуемых для ее получения.

Как и в разд. 1, будем предполагать, что исследуемый случайный процесс $X(k)$ центрирован, т. е. удовлетворяет условию $\langle X(k)\rangle \equiv 0,$ и стационарен в широком смысле. Кроме того, будем считать, что ССП $X(k)$ гауссов. Допустим, что спектральная плотность $f(\omega),$ будучи продолженной периодическим образом за пределы отрезка $\Pi,$ по крайней мере, дважды дифференцируема, причем

$$\sup_{\omega}\left|f''(\omega)\right| < K < \infty.$$

Пусть $\omega\in[0,\pi]$. Предлагаемую модификацию оценки спектральной плотности типа Уэлча определим соотношением

$$f_N(\omega)=(QT)^{-1}\sum_{t=-(T-1)}^{T-1} a(t)\left|\sum_{k=-(m-1)}^{m-1} b(k)X(tL+k)\mathrm{e}^{ik\omega}\right|^2. \tag{12}$$

Здесь $a(t)=1-|t|/T,\ |t|\le T;$

$$b(k)=b_{l,n}(k)=(2\pi)^{-1}\int_{\Pi}\mathrm{e}^{ikx}J_{l,n}(x)\,dx;$$

$$Q=Q_{l,n}=2\pi\sum_{k=-(m-1)}^{m-1} b^2(k)=\int_{\Pi}J^2_{l,n}(x)\,dx;$$

m, T, L, l и n – целочисленные параметры оценки (12). При этом длина M каждого из наших подынтервалов равна $2m-1,$ а общий объем выборки $N=$ $=2m+2(T-1)L-1.$

Разумеется, параметры m, T, L, l и n не могут быть выбраны произвольный образом. Они связаны следующими соотношениями и условиями: $T>1,$ $1\le L\le 2m-1,\ n>1, 1\le l\le 5$ и $m=l(n-1)+1.$ Последнее из приведенных выше соотношений обусловлено тем обстоятельством, что коэффициенты Фурье $b(k)$ ядра $J_{l,n}(x)$ тождественно равны нулю для всех k таких, что $|k|>l(n-1).$ Что же касается неравенства $l\le 5,$ то оно отражает тот факт, что мы пока еще не располагаем разложениями в ряд Фурье ядер $J_{l,n}(x)$ для $l>5.$

Условимся, что символ «~» будет обозначать в дальнейшем пропорциональность двух величин. Можно показать, что при сделанных нами предположениях

$$\mathbf{D} f_N(\omega) \equiv \left\langle f_N^2(\omega) \right\rangle - \left| \left\langle f_N(\omega) \right\rangle \right|^2 \sim \frac{2n\{2 - \operatorname{sign}[\omega(\pi - \omega)]\}}{3TL} f^2(\omega), \tag{13}$$

если $n \gg 2$, $TL \gg 12nl$ и $2L \leq n$.

Для оценки же (12) независимо от предположения о гауссовости ССП $X(k)$ справедливо соотношение

$$\sup_{\omega \in [0,\pi]} \left| \left\langle f_N(\omega) \right\rangle - f(\omega) \right| \sim K / (2n^2). \tag{14}$$

Можно показать также, что для всех $l = 1, \ldots, 5$ левая часть формулы (14) не превосходит $0{,}3K\pi^2 / n^2$.

Формулами (13) и (14) описываются основные статистические характеристики оценки (12). Мы замечаем, что параметры L и T входят в формулу (13) лишь в виде произведения LT, которое приближенно равно $N/2$, если $N \gg M$. Поэтому от выбора каждого из параметров L и T в отдельности мало что зависит (до тех пор, пока остается в силе неравенство $2L \leq n$). Что же касается параметра n, то от него зависит очень многое. При малых n квадрат смещения оценки (12) будет существенно превосходить ее дисперсию, однако с ростом n положение быстро меняется в обратную сторону. При достаточно больших n дисперсия оценки (12) будет уже заметно превосходить квадрат ее смещения. В тех случаях, когда критерием качества оценки (12) является средний квадрат ошибки оценивания, следует по возможности стремиться к тому, чтобы дисперсия оценки (12) и квадрат ее смещения были одного порядка малости.

Наконец, коротко коснемся выбора параметра l. Согласно рекомендациям работы [9] при достаточно больших N переход от l к $l+1$ всегда желателен.

Заключение. Непараметрическое оценивание спектральной плотности ССП, вне всякого сомнения, требует большого терпения и искусства. Здесь, к сожалению, нет оценки, которая «во всех случаях жизни» была бы наилучшей. Выбор той или иной оценки спектральной плотности существенным образом зависит от объема выборки, от априорных предположений исследователя относительно степени гладкости оцениваемой спектральной плотности и от избранного исследователем критерия качества оценки. Рекомендации по выбору параметров оценок спектральной плотности $f(\omega)$ и ее производных, сформулированные в разд. 1–4 данной работы, могут служить подспорьем исследователю, приступающему к статистическому анализу того или иного ССП. В основе этих рекомендаций лежат как теоретические расчеты, так и результаты серии широкомасштабных численных экспериментов. Здесь, по-видимому, уместно указать на то обстоятельство, что результаты, получаемые с помощью численных экспериментов, не могут быть найдены никаким другим способом. Численный эксперимент *незаменим*.

Ряд вопросов непараметрического спектрального анализа ССП остался за рамками данного обзора. Случай систематических пропусков (p пропусков после каждых m отсчетов) в реализации ССП $X(k)$ рассмотрен в работе [29]. Асимптотически (с ростом объема выборки) несмещенную оценку спектральной плотности $f(\omega)$ удается здесь построить, если $m > p$. Прием, позволяющий существенно увеличить масштаб оцениваемой спектральной плотности в ее наиболее низкочастотной части, предложен в [30]. Наконец, оценки некоторых нелинейных функционалов от спектральной плотности $f(\omega)$ могут быть найдены в [31]. К сожалению, в формуле (7) работы [31] имеется досадная описка: величину $O(n^{-1})$ в правой ее части следует заменить величиной $o(n^{-1})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеев В. Г.** О выборе спектрального окна при оценке спектра гауссовского стационарного случайного процесса // Проблемы передачи информации. 1971. **7**, № 4. С. 45.
2. **Алексеев В. Г.** Некоторые практические рекомендации по спектральному анализу гауссовских стационарных случайных процессов // Проблемы передачи информации. 1973. **9**, № 4. С. 42.
3. **Алексеев В. Г.** Некоторые вопросы спектрального анализа гауссовских случайных процессов // Теория вероятностей и математическая статистика. Киев: Вища шк., 1974. Вып. 10. С. 3.
4. **Алексеев В. Г.** Об одном численном эксперименте по вычислению спектров случайных процессов // Проблемы передачи информации. 1975. **11**, № 4. С. 106.
5. **Алексеев В. Г.** Об ошибке оценивания спектральной плотности гауссовского случайного процесса // Теория вероятностей и математическая статистика. Киев: Вища шк., 1979. Вып. 21. С. 3.
6. **Алексеев В. Г.** О вычислении спектров стационарных случайных процессов по выборкам большого объема // Проблемы передачи информации. 1980. **16**, № 1. С. 42.
7. **Алексеев В. Г.** О вычислении спектральных плотностей случайных процессов по выборкам большого объема // Вычислительная и прикладная математика. Киев: Вища шк., 1981. Вып. 44. С. 32.
8. **Алексеев В. Г.** Об оценках спектральных плотностей некоторых моделей стационарных случайных процессов // Проблемы передачи информации. 1985. **21**, № 2. С. 42.
9. **Алексеев В. Г.** Оценка спектральной плотности типа Уэлча. Случай дискретного аргумента // Автометрия. 2001. № 6. С. 91.
10. **Алексеев В. Г.** О непараметрических оценках спектральной плотности стационарного случайного процесса с дискретным временем // Автометрия. 2003. **39**, № 1. С. 82.
11. **Алексеев В. Г.** О непараметрических оценках производных спектральной плотности стационарного случайного процесса с дискретным временем // Матем. заметки ЯГУ. 2004. **11**, № 2. С. 10.
12. **Яглом А. М.** Корреляционная теория стационарных случайных функций. Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
13. **Марпл-мл. С. Л.** Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
14. **Журбенко И. Г.** Анализ стационарных и однородных случайных систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
15. **Журбенко И. Г., Кожевникова И. А.** Стохастическое моделирование процессов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
16. **Дзядык В. К.** Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.

17. **Алексеев В. Г.** Ядра типа Джексона и Джексона – Валле-Пуссена и их вероятностные применения // Теория вероятностей и ее применения. 1996. **41**, № 1. С. 170.

18. **Алексеев В. Г.** О некоторых новых линейных цифровых фильтрах // Радиотехника и электроника. 1996. **41**, № 2. С. 206.

19. **Алексеев В. Г.** Ядра типа Джексона и их применение к построению фильтров низких частот // Проблемы передачи информации. 1994. **30**, № 1. С. 97.

20. **Алексеев В. Г.** Полиномиальные тригонометрические ядра и их применение к построению фильтров низких частот // Проблемы передачи информации. 1996. **32**, № 4. С. 16.

21. **Алексеев В. Г.** Новые дискретные фильтры нижних частот // Радиотехника. 2002. № 6. С. 44

22. **Алексеев В. Г.** Новый дискретный фильтр нижних частот // Радиотехника. 2004. № 8. С. 40.

23. **Алексеев В. Г.** Новые цифровые фильтры нижних частот // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. 2005. **48**, № 1. С. 39.

24. **Алексеев В. Г.** Об оценках производных плотности вероятности // Вычислительная и прикладная математика. Киев: Вища шк., 1981. Вып. 43. С. 139.

25. **Bloomfield P.** Fourier Analysis of Time Series: An Introduction. N. Y.: John Willey and Sons, 1976.

26. **Бриллинджер Д.** Временны́е ряды. Обработка данных и теория. М.: Мир, 1980.

27. **Отнес Р., Эноксон Л.** Прикладной анализ временны́х рядов. Основные методы. М.: Мир, 1982.

28. **Kay S. M.** Modern Spectral Estimation. Theory and Application. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1988.

29. **Алексеев В. Г., Савицкий Ю. А.** Об оценке спектра гауссовского случайного процесса по его реализации с пропусками // Проблемы передачи информации. 1973. **9**, № 1. С. 66.

30. **Алексеев В. Г., Суходоев В. А.** Новые цифровые линейные фильтры // Электромагнитные волны и электронные системы. 2005. **10**, № 9. С. 9.

31. **Алексеев В. Г.** О непараметрических оценках интервала корреляции гауссового случайного процесса // Автометрия. 1986. № 1. С. 11.

Поступила в редакцию 22 февраля 2006 г.