

А. В. Скрипаль, О. И. Чанилов, Д. А. Усанов

(Саратов)

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТА  
ПО РЕЗУЛЬТАТАМ АНАЛИЗА  
ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОГО СИГНАЛА  
С ПОМОЩЬЮ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

Рассмотрена возможность применения вейвлет-преобразований для восстановления сложного непериодического движения объекта в оптической гомодинной интерферометрии. Приведены результаты численного моделирования восстановления функции движения объекта по интерференционному сигналу с помощью фурье- и вейвлет-преобразований и сравнительный анализ результатов.

**Введение.** В настоящее время для определения параметров движения объекта в интерференционной системе применяются гетеродинные методы измерения перемещений [1–3], в которых используются два источника лазерного излучения. Однако реализация методов затруднена необходимостью использования сложных устройств, и, как это показано в [4], дополнительные ограничения связаны с проблемой стабильности частоты работы лазеров. Поэтому для восстановления закона движения объекта представляет интерес использование гомодинных методов. Если для определения функции движения исследуемого объекта используется один источник излучения, то измерительная интерференционная система реализуется, как правило, по схемам интерферометров Фабри – Перо, Майкельсона и Маха – Цендера. В таких системах регистрируемый сигнал в общем случае имеет сложную форму, и для его дешифровки могут быть использованы различные методы, например [1, 5–7], большинство из которых разработано в предположении, что исследуемый объект совершает гармонические колебания на одной частоте. В работах [8–10] предлагаются методы обработки регистрируемого сигнала, позволяющие восстанавливать вид функции колебаний объекта, движущегося по негармоническому закону. Эти методы базируются на исследовании и обработке фурье-спектра интерференционного сигнала. Однако применение преобразований Фурье для восстановления функции движения объекта имеет существенный недостаток: при исследовании сигнала, содержащего локальные особенности, вводится в рассмотрение большое число гармоник, что приводит к искажению восстановленного сигнала на всем рассматриваемом временном интервале. Этот недостаток связан с тем, что базисные функции, используемые в фурье-анализе, локализованы в частотном пространстве, но не локализованы во временном. При рассмотрении быстроизменяю-

щихся сигналов представляет интерес использование базисных функций, локализованных по времени и по частоте.

В данной работе для восстановления функции движения исследуемого объекта предлагается при обработке интерференционного сигнала применять набор базисных функций, обладающих свойством вейвлет-преобразования (wavelet transform) [11]. В разд. 1 представлена теория метода восстановления сигнала с помощью вейвлет-преобразований, в разд. 2 рассмотрены результаты численного моделирования восстановления функции движения объекта с помощью фурье- и вейвлет-преобразований.

**1. Теоретическое описание метода.** 1.1. *Восстановление траектории движения объекта по интерференционному сигналу.* Переменную составляющую интерференционного сигнала можно записать в виде [12]:

$$I(t) = A \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{\lambda} f(t)\right), \quad (1)$$

где  $A$  – амплитудный коэффициент, зависящий от интенсивности интерферирующих лучей и передаточной характеристики регистрирующей аппаратуры;  $t$  – время;  $\theta$  – фаза сигнала;  $\lambda$  – длина волны лазера;  $f(t)$  – функция, характеризующая продольные движения объекта, которая может быть представлена в виде

$$f(t) = K_{\psi_1}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(a, b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi_1\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{da db}{a^2}. \quad (2)$$

Здесь

$$C(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi_1\left(\frac{t-b}{a}\right) dt; \quad K_{\psi_1} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi_f(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega.$$

( $\psi_1$  – базисная вейвлет-функция;  $C(a, b)$  – коэффициенты вейвлет-разложения функции  $f(t)$  по базису  $\psi_1$ ;  $K_{\psi_1}$  – постоянная величина, определяемая базисной вейвлет-функцией;  $\psi_f(\omega)$  – фурье-образ функции  $\psi_1$ .) Равенство (2) выполняется, если функция  $\psi_1$  обладает свойствами вейвлета, т. е. локализована во временном и частотном пространствах, имеет нулевое среднее на всем временном интервале и ограничена.

Рассмотрим нормированную переменную составляющую интерференционного сигнала

$$U(t) = \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{\lambda} f(t)\right). \quad (3)$$

Введем функцию  $S(t)$ , спектр которой с точностью до постоянного множителя соответствует спектру производной восстанавливаемого сигнала [8]:

$$S(t) = \frac{dU/dt}{\pm \sqrt{1 - U^2(t)}}, \quad (4)$$

и запишем ее с учетом выражения (3) и интегрального представления функции  $f(t)$  (2):

$$S(t) = \frac{4\pi}{\lambda K_{\psi_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(a, b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi_2\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dadb}{a^2}, \quad (5)$$

где  $\psi_2$  – производная от базисной вейвлет-функции  $\psi_1$ .

Для определения знака функции  $\pm\sqrt{1-U^2(t)}$  можно использовать следующую процедуру. По функции  $U(t)$  вычисляются значения  $\sqrt{1-U^2(t)}$ . В первой точке знак квадратного корня задается произвольно. Затем определяется знак  $dU/dt$ , и при построении функции  $\pm\sqrt{1-U^2(t)}$  ее знак меняется на противоположный в тех точках, где  $dU/dt$  равна нулю. Если полученная таким образом функция имеет разрывы, то на участке между разрывами знак функции меняется на противоположный. Выполнение этой процедуры ведет к получению непрерывной функции  $\pm\sqrt{1-U^2(t)}$  с учетом знака.

Далее рассмотрим только такие вейвлет-функции  $\psi_1(t)$ , у которых существует производная, в свою очередь, являющаяся вейвлетом. Сравнивая интегральные представления функций  $f(t)$  и  $S(t)$  (выражения (2) и (5) соответственно), видим, что они отличаются базисной вейвлет-функцией и постоянной величиной  $4\pi/\lambda$ . Построив на основе интерференционного сигнала (1) функцию  $S(t)$ , разложим ее по вейвлет-базису  $\psi_2$  для получения коэффициентов вейвлет-разложения

$$C(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{4\pi} S(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi_2\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (6)$$

С помощью вейвлет-коэффициентов выполним обратное преобразование, используя базис  $\psi_1$ :

$$f(t) = K_{\psi_1}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(a, b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi_1\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dadb}{a^2}. \quad (7)$$

Таким образом, используя интерференционный сигнал, восстановим вид функции, описывающей движение объекта. Произвольное предположение о знаке функции  $\pm\sqrt{1-U^2(t)}$  в первой точке приводит к тому, что невозможно восстановить направление движения объекта. Однако описанный метод может с успехом применяться в случаях, когда интерес представляет только зависимость величины смещения объекта от времени, а направление движения не является существенным.

**1.2. Восстановление функции движения объекта с помощью двух интерференционных сигналов.** В случае, когда необходимо восстановить сигнал с

учетом направления движения, можно использовать два интерференционных сигнала, один из которых смещен относительно другого по фазе на  $\pi/2$ :

$$I_1(t) = A \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{\lambda} f(t)\right), \quad (8)$$

$$I_2(t) = -A \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{\lambda} f(t)\right). \quad (9)$$

Применение одинаковых амплитудных коэффициентов в (8) и (9) означает, что в ходе натурного эксперимента необходимо обеспечить идентичность измерительных каналов каждого интерференционного сигнала.

По аналогии с выражением (4) рассмотрим функцию  $S(t)$ , исходя из условия соответствия ее спектра с точностью до постоянного множителя спектру функции  $f(t)$ :

$$S(t) = \frac{dI_1/dt}{I_2(t)} = \frac{4\pi}{\lambda K_{\psi_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(a, b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi_2\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dadb}{a^2}. \quad (10)$$

Дальнейшее восстановление функции траектории движения объекта  $f(t)$  производится по представленному выше алгоритму для случая обработки одного интерференционного сигнала. Описанный метод позволяет восстановить не только величину смещения объекта, но и его направление. Однако у обсуждаемого метода есть два существенных недостатка. Во-первых, его реализация потребует значительного усложнения экспериментальной установки. Во-вторых, в конструируемом сигнале  $S(t)$  появятся дополнительные разрывы в моменты времени, когда  $I_2(t) = 0$ , что приведет к неточности в восстановлении закона движения объекта.

**2. Обсуждение результатов, полученных в ходе моделирования.** Численное моделирование восстановления функции движения объекта проводилось для случая двух интерференционных сигналов со смещением по фазе на  $\pi/2$ . В ходе моделирования задавалась функция  $f(t)$ , по которой с учетом выражений (8) и (9) рассчитывались интерференционные сигналы  $I_1(t)$  и  $I_2(t)$ . Затем вычислялась функция  $S(t)$  и решалась обратная задача, т. е. проводилось восстановление сигнала с использованием фурье-преобразований, методика которых описана в [8–10], и вейвлет-преобразований. В качестве пары базисных функций вейвлет-преобразования были использованы вейвлеты, конструируемые на основе производных функции Гаусса

$$G(t) = \exp(-t^2/2), \quad (11)$$

которые имеют вид

$$\psi_1(t) = \frac{dG(t)}{dt}, \quad (12)$$

$$\psi_2(t) = \frac{d\psi_1(t)}{dt} = \frac{d^2G(t)}{dt^2}. \quad (13)$$

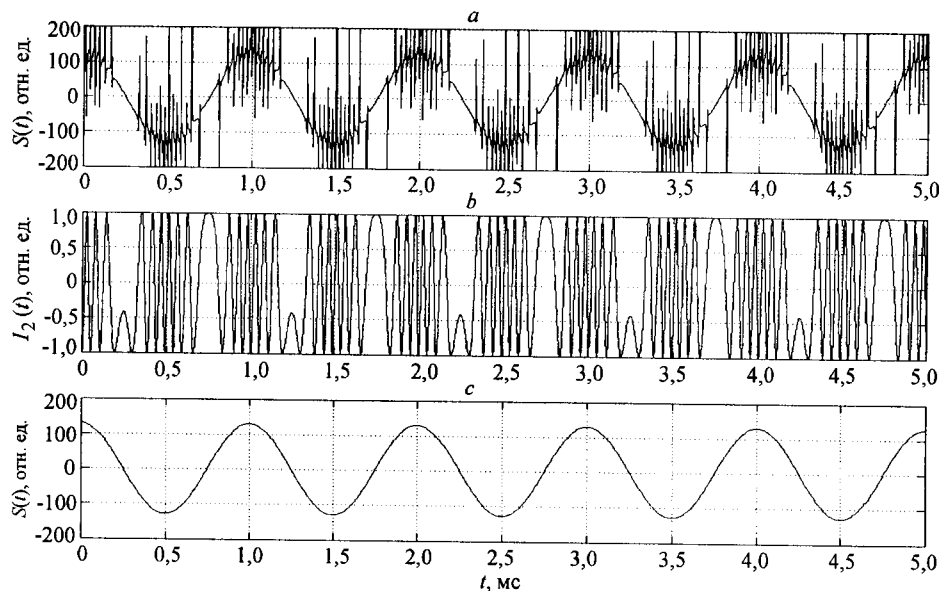


Рис. 1

Вейвлет  $\psi_1(t)$  обычно называют WAVE-вейвлетом, а  $\psi_2(t)$  – МНАТ-вейвлетом. Выбор базисных вейвлетобразующих функций (12), (13) на основе производных, взятых от выражения (11), обусловлен простотой их описания, наглядностью и широтой применения. Вместе с тем следует отметить, что вейвлеты на основе производных функции Гаусса не обладают свойством ортогональности, которое используется при доказательстве теорем о возможности точного восстановления сигнала при проведении обратного вейвлет-преобразования. Поэтому необходимо иметь в виду, что обратное вейвлет-преобразование с их участием не всегда приводит к точному восстановлению сигнала.

В качестве тестирующей задачи рассмотрен случай движения объекта, описываемого синусоидальной функцией  $f(t)$ , с предварительным вычислением интерференционных сигналов и последующим восстановлением по ним исходного сигнала. На рис. 1, *a* показана конструируемая из интерференционных сигналов функция  $S(t)$ , рассчитанная в ходе моделирования по формулам (8) и (9) для обсуждаемого случая, а на рис. 1, *b* представлен интерференционный сигнал  $I_2(t)$ . Основная трудность, возникшая в ходе численного моделирования восстановления закона движения объекта, заключалась в наличии разрывов у функции  $S(t)$ . Из рис. 1, *a*, *b* видно, что функция  $S(t)$  имеет разрыв в точках, где сигнал  $I_2(t) = 0$ . Использование такой функции приводит к ошибке при восстановлении искомого сигнала. Для корректного восстановления функции  $f(t)$  применялись алгоритмы фильтрации и сглаживания к функции  $S(t)$ . В ходе моделирования использовалась медианная фильтрация по семи точкам и последующее сглаживание кубическими сплайнами. На рис. 1, *c* представлена функция  $S(t)$  после обработки вышеописанным способом. Видно, что применение цифровой обработки сигнала позволяет в рассматриваемом случае устранить этот недостаток метода восстановления функции движения объекта с использованием двух интерференционных сигналов.

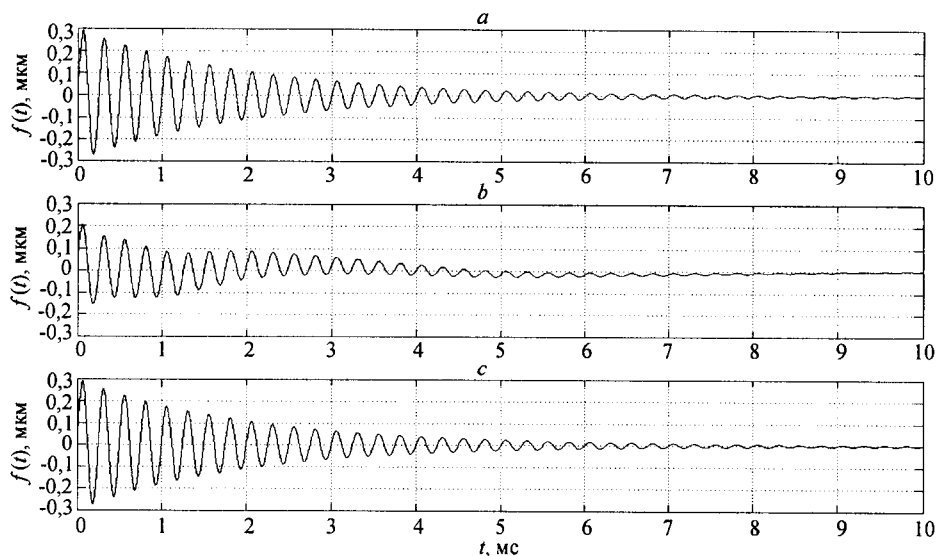


Рис. 2

Проведено также моделирование восстановления сложного движения объекта в интерференционной системе. В качестве исходного сигнала выбирались временные зависимости в виде суммы нескольких синусоид с различными частотами и начальными фазами, что соответствует случаю колебаний в контуре с несколькими источниками, и в виде гармонической функции, модулированной экспоненциально убывающей временной зависимостью, описывающей свободные колебания в контуре с потерями. Для каждого из рассмотренных случаев были использованы алгоритмы на основе фурье- и вейвлет-преобразований.

В ходе моделирования установлено, что восстановление полигармонического сигнала с помощью вейвлет-преобразований обеспечивает меньшую (примерно на 20 %) степень соответствия восстановленного сигнала исходному, чем с помощью фурье-преобразований. Это связано с влиянием краевого эффекта, который искажает восстанавливаемый сигнал на границах рассматриваемого временного интервала. Следует также отметить, что применение преобразований Фурье для этого случая требует существенно меньших затрат машинного времени.

Расчеты для случая восстановления функции движения объекта, имеющей вид экспоненциально затухающей синусоиды, показывают, что использование вейвлет-преобразования обеспечивает более высокую точность. На рис. 2, *a* приведена функция движения объекта, на рис. 2, *b* – функция, восстановленная с помощью преобразований Фурье, а на рис. 2, *c* – функция, восстановленная с помощью вейвлет-преобразований. Из рисунков видно, что в данном случае использование в качестве базиса вейвлетобразующих функций позволяет добиться большего соответствия исходного и восстановленного сигналов.

**Заключение.** Таким образом, предложен метод восстановления траектории движения объекта, основанный на измерении временной зависимости интерференционного сигнала и использовании для восстановления функции

движения вейвлетобразующего базиса, что для некоторых случаев (например, когда обсуждаемую функцию нельзя разложить в ряд Фурье) позволяет с большей степенью точности определять параметры негармонического движения объекта. Сравнение результатов, полученных в ходе восстановления функции движения объекта с помощью фурье- и вейвлет-преобразований, показывает, что фурье-преобразования с более высокой степенью точности обеспечивают восстановление сигналов, которые могут быть представлены рядом Фурье. Однако в случае, когда в качестве исходного сигнала рассматривается иная временная зависимость, например описывающая процесс свободных колебаний в контуре с потерями, восстановление функции движения с помощью вейвлет-преобразования может обеспечить более высокую степень соответствия восстановленного сигнала исходному.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Suemoto Y.** Laser heterodyne and homodyne measurements of impulsive displacement // Opt. Commun. 1990. **75**, N 3–4. P. 201.
2. **Takahashi N., Kakuma S., Ohba R.** Active heterodyne interferometric displacement measurement using optical feedback effects of laser diode // Opt. Eng. 1996. **35**, N 3. P. 802.
3. **Lin Y. J., Pan C. L.** Precision displacement measurement by active laser heterodyne interferometry // Appl. Opt. 1991. **30**, N 13. P. 1648.
4. **Suzuki T., Sasaki O., Maruyama T.** Absolute distance measurement using wavelength-multiplexed phase – locked laser diode interferometry // Opt. Eng. 1996. **35**, N 2. P. 492.
5. **Усанов Д. А., Скрипаль А. В., Вагарин В. А., Васильев М. Р.** Гомодинные методы измерения // Зарубеж. радиоэлектрон. 1995. № 6. С. 135.
6. **Jin W., Zhang L. M., Uttamchandani D., Culshaw B.** Modified J1...J4 method for linear readout of dynamic phase changes in a fiber-optic homodyne interferometer // Appl. Opt. 1991. **30**, N 31. P. 4496.
7. **Wang Y., Chiang F.-P.** New moire interferometry for measuring three-dimensional displacements // Opt. Eng. 1994. **33**, N 8. P. 2654.
8. **Гангнус С. В., Скрипаль А. В., Усанов Д. А.** Определение параметров движения объекта с помощью оптического гомодинного метода // Автометрия. 1999. № 1. С. 31.
9. **Усанов Д. А., Скрипаль А. В., Гангнус С. В.** Решение обратной задачи для восстановления параметров сложного периодического движения в лазерной гомодинной системе // Автометрия. 2001. № 1. С. 117.
10. **Gangnus S. V., Usanov D. A., Skripal A. V.** Characteristics determination of complicated motion of object by homodyne interference system // Proc. SPIE. 1999. **3726**. P. 226.
11. **Астафьева Н. М.** Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // УФН. 1996. **166**, № 11. С. 1145.
12. **Wang Z., Graca M. S., Bryanston Cross P. J., Whitehouse D. J.** Phase-shifted image matching algorithm for displacement measurement // Opt. Eng. 1996. **35**, N 8. P. 2327.

*Саратовский государственный университет,  
E-mail: UsanovDA@info.sgu.ru*

*Поступила в редакцию  
4 марта 2003 г.*