

НЕСИММЕТРИЧНЫЙ ЛУЧИСТО-КОНВЕКТИВНЫЙ ПРОГРЕВ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЫ

А. Л. Бурка (Новосибирск)

В настоящее время вопросы, связанные с решением уравнения теплопроводности при нелинейных граничных условиях, приобретают не только теоретическое, но, еще больше, практическое значение. Интерес к подобным исследованиям объясняется тем, что в реальных физико-технических проблемах возникает необходимость в расчетах температурных полей в телах, граничные поверхности которых подвергаются тепловому облучению. Несмотря на известную трудность решения нелинейных функциональных уравнений, сведение краевой задачи к ним дает возможность получить дополнительную информацию о величинах, характеризующих процесс теплообмена.

Такой важной информацией является, помимо температурного поля в теле, тепловой поток. В настоящей работе рассматривается несимметричный нагрев плоскопараллельной неограниченной пластины толщиной R .

Как будет показано ниже, такая краевая задача сводится к системе из двух нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра относительно результирующей плотности излучения. Постановка задачи записывается следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq R, 0 \leq \tau < \infty) \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = E_0(0, \tau), \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=R} = E_1(R, \tau), \quad T(x, 0) = T_0$$

$$E_0(0, \tau) = H [T^4(0, \tau) - T_1^4], \quad E_1(R, \tau) = h [T_2 - T(R, \tau)] - HT^4(R, \tau)$$

$$(T_0, T_1, T_2 = \text{const})$$

Здесь H — относительный коэффициент излучения, a — коэффициент теплопроводности, T_0 — начальная температура пластины, h — относительный коэффициент конвективного теплообмена, T_1 — абсолютная температура источника излучения, T_2 — абсолютная температура окружающей среды.

Применяя к (1) преобразование Лапласа, получаем общее решение задачи в изображениях

$$u(x, p) = \frac{T_0}{p} + v_1(R, p) \frac{\text{ch}(\sqrt{p/a}x)}{\sqrt{p/a} \text{sh}(\sqrt{p/a}R)} - v_0(0, p) \frac{\text{ch}[\sqrt{p/a}(x-R)]}{\sqrt{p/a} \text{sh} \sqrt{p/a}R} \quad (2)$$

$$u(x, p) = \int_0^{\infty} T(x, \tau) \exp(-p\tau) d\tau, \quad v_0(0, p) = \int_0^{\infty} E_0(0, \tau) \exp(-p\tau) d\tau$$

$$v_1(R, p) = \int_0^{\infty} E_1(R, \tau) \exp(-p\tau) d\tau$$

Переходя в (2) от изображений к оригиналам, получим выражение для температурного поля в пластине, которое в безразмерном виде записывается так:

$$\theta(x, \tau) = 1 + \alpha_3 \int_0^{\tau} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi n}{R} x \exp[-\alpha_4 n^2 (\tau - t)] \right\} \varphi_1(R, t) dt -$$

$$- \alpha_5 \int_0^{\tau} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi n}{R} (R - x) \exp[-\alpha_4 n^2 (\tau - t)] \right\} \varphi_0(0, t) dt \quad (3)$$

Выражение (3) дает формальное представление температурного поля $\theta(x, \tau)$ через результирующие плотности излучения $\varphi_0(0, \tau)$, $\varphi_1(R, \tau)$. Поэтому температурное поле может быть рассчитано только после того, как будут определены плотности излучения. Из (3) получаем систему из двух нелинейных интегральных уравнений относительно результирующих плотностей излучения φ_0 и φ_1

$$\varphi_0(0, \tau) = \alpha_2 \left\{ 1 + \alpha_3 \int_0^{\tau} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp[-\alpha_4 n^2 (\tau - t)] \right\} \varphi_1(R, t) dt - \right.$$

$$\left. - \alpha_5 \int_0^{\tau} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-\alpha_4 n^2 (\tau - t)] \right\} \varphi_0(0, t) \right\}^4 dt - \alpha_1$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(\bar{R}, \tau) = & \alpha_8 - \alpha_6 \left\{ 1 + \alpha_3 \int_0^\tau \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-\alpha_4 n^2 (\tau - t)] \right\} \varphi_1(R, t) dt - \right. \\ & - \alpha_5 \int_0^\tau \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp[-\alpha_4 n^2 (\tau - t)] \right\} \varphi_0(0, t) dt - \\ & - \alpha_7 \left\{ 1 + \alpha_3 \int_0^\tau \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-\alpha_4 n^2 (\tau - t)] \right\} \varphi_1(R, t) dt - \right. \\ & \left. \left. - \alpha_5 \int_0^\tau \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp[-\alpha_4 n^2 (\tau - t)] \right\} \varphi_0(0, t) dt \right\}^4 \right. \quad (4) \\ \alpha_1 = & \frac{T_1^4}{T_1^4 + T_0^4}, \quad \alpha_2 = \frac{T_0^4}{T_1^4 - T_0^4}, \quad \alpha_3 = \frac{a}{RT_0} [h(T_2 - T_0) - HT_0^4] \\ \alpha_4 = & \frac{\pi^2 a}{R^2}, \quad \alpha_5 = \frac{a}{RT_0} H(T_1^4 - T_0^4), \quad \alpha_6 = \frac{hT_0}{h(T_2 - T_0) - HT_0^4} \\ \theta(x, \tau) = & \frac{T(x, \tau)}{T_0}, \quad \varphi_0(0, \tau) = \frac{E_0(0, \tau)}{H(T_1^4 T_0^4)}, \quad \varphi_1(R, \tau) = \frac{E_1(R, \tau)}{h(T_2 - T_0) - HT_0^4} \end{aligned}$$

Для численного решения задачи следует «арифметизировать» выражение (3) и систему (4). Для этого разобьем отрезок $[0, \tau]$ на m равных частей, причем каждый участок разбиения настолько мал, что потоки φ_0 и φ_1 на нем можно считать постоянными. Другими словами, простоты ради, применяем к (3) и (4) формулу прямоугольников, хотя в принципе можно применить любую квадратурную формулу более высокой степени точности.

Точность определения потоков будет зависеть от величины $\Delta\tau$, т. е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_0(0, \Delta\tau m) \rightarrow \varphi_0(0, \tau), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_1(R, \Delta\tau m) \rightarrow \varphi_1(R, \tau)$$

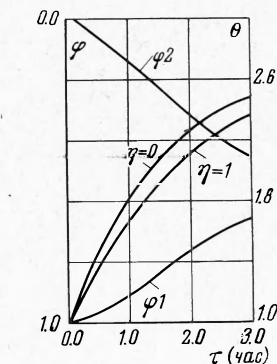
Как известно, одним из наиболее эффективных методов решения нелинейных функциональных уравнений является метод Ньютона. Этот метод распространен на системы нелинейных алгебраических уравнений. Условия сходимости этого метода достаточно полно рассмотрены в работе [1]. Предполагая, что система (4) представлена в «арифметизированном» виде, удовлетворяет всем требованиям, при которых метод Ньютона обеспечивает сходимость итерационного процесса, для каждого значения m находим корни $\varphi_0(0, \Delta\tau m)$ и $\varphi_1(R, \Delta\tau m)$ по методу Ньютона.

Таким образом, значения результирующих плотностей излучения, а следовательно и температурное поле, для любого промежутка времени $\tau = \Delta\tau m$ определены из «арифметизированных» системы (4) и выражения (3).

На фигуре представлены зависимости $\varphi_0(0, \tau)$, $\varphi_1(R, \tau)$, $\theta(\eta, \tau)$ от времени для следующих геометрических и теплофизических данных:

$$\begin{aligned} \eta = x/R, \quad R = 0,03 \text{ м}; \quad a = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{час}, \quad T_0 = 253^\circ \text{ К} \\ T_1 = 815^\circ \text{ К}, \quad T_2 = 300^\circ \text{ К}, \quad h = 1 \text{ м}^{-1}, \quad H = 4,188 \cdot 10^{-9} \text{ град}^3/\text{м} \end{aligned}$$

Вся расчетная часть работы выполнена в Вычислительном центре СО АН СССР на вычислительной машине М-20. Погрешность вычислений безразмерных потоков не превышает 10^{-5} .



Поступила 22 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В. О методе Ньютона. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1949, т. 28.