

УДК 534.222.2

## РЕПТАЦИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ КРУПНЫХ ЖИВОТНЫХ В ЖИДКОСТИ

В. М. Шаповалов

Волгоградский государственный технический университет, 400103 Волгоград  
E-mail: vtm@volpi.ru

В длинноволновом приближении выполнен асимптотический анализ плоской задачи рептационного движения животного в жидкости. Рассмотрен турбулентный режим движения. Получены асимптотические оценки для осевого и перерезывающего усилий, затрачиваемой энергии, траектории движения. Представлены результаты численного анализа.

Ключевые слова: турбулентность, рептационное движение, упругая линия.

Для анализа рассматриваемой задачи в работах [1, 2] использовался принцип, сформулированный М. А. Лаврентьевым [3]. Согласно принципу Лаврентьева тело животного рассматривается как упругий стержень, помещенный в твердый канал переменной кривизны. Роль твердых стенок канала выполняет среда, окружающая тело. При движении в жидкой среде стенками канала служит жидкость, которая в силу своей инерционности при достаточно быстром воздействии практически не смещается относительно первоначального положения за время, в течение которого происходит существенное перемещение самого организма.

В работе [2] рассмотрено безвихревое движение в идеальной жидкости, что эквивалентно движению в свободно смешиваемом твердом канале, масса которого зависит от формы. При поперечном обтекании цилиндра потенциал определялся методом плоских сечений. Осевая сила трения не учитывалась, поскольку в идеальной жидкости касательное напряжение на поверхности тела равно нулю.

В работе [4] исследовано рептационное движение животных в ламинарном режиме. Полученные результаты применимы к движению микроорганизмов. Данная работа является развитием подхода [4] для описания движения животных в турбулентном режиме. При этом речь идет о животных достаточно крупных размеров, таких как уж, угорь, мурена и др.

В длинноволновом приближении поставлена и решена задача плоского рептационного движения крупных животных в жидкости. Определены энергосиловые и кинематические характеристики движения. Приведены результаты численного анализа.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается развитый турбулентный режим, которому соответствует квадратичный закон сопротивления.

Исследуется движение животных, имеющих достаточно сильно вытянутое тело (рыбы типа угря, водяные змеи и т. п.), так что выполняется условие  $l \gg d$  ( $l, d$  — длина тела в вытянутом состоянии и его диаметр). Упругая ось проходит вдоль позвоночника. Позвоночник можно рассматривать как шарнирную систему стержней. Количество позвонков будем считать бесконечным, а упругую ось — монотонной гладкой кривой.

Центральная нервная система посылает управляющие сигналы мышцам тела, так что формируется бегущая волна, близкая к синусоидальной. Число мышц будем считать бесконечным, а управляющий сигнал — монотонной непрерывной функцией.

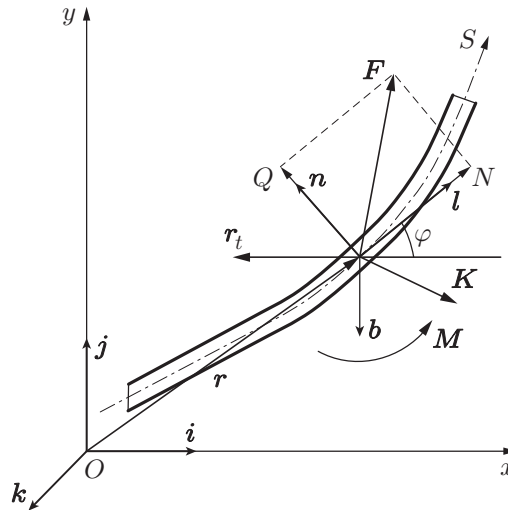


Рис. 1. Схема рептационного движения

Выталкивающая сила не учитывается, поскольку плотность тела животного близка к плотности окружающей жидкости. Поперечное сечение тела по длине постоянно. Если условно считать окружающую жидкость неподвижной, то рассеивание механической энергии локализовано в области, соизмеримой с поперечными размерами животного, т. е. в области гидродинамического пограничного слоя.

На элементарный участок тела длиной  $ds$  действуют продольная  $dP$  и поперечная  $dF$  силы трения. Имеет место случай наклонного обтекания цилиндра. В работе [5] на основе теории турбулентного пограничного слоя в случае неподвижного цилиндра для продольной силы трения получено выражение  $dP = 0,325 \text{Re}_l^{-0,7} \pi d \rho v_l^2 ds$  ( $v_l$  — осевая скорость движения цилиндра;  $\text{Re}_l = v_l d \rho / \mu$  — число Рейнольдса;  $\rho, \mu$  — плотность и вязкость жидкости), которое хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Согласно [6] поперечная сила трения описывается выражением  $dF = 0,5 \xi d \rho v_n^2 ds$ , где  $v_n$  — нормальная составляющая скорости движения цилиндра;  $\xi$  — коэффициент сопротивления, зависящий от числа Рейнольдса  $\text{Re}_n = v_n d \rho / \mu$ . В работе [7] для развитого турбулентного режима приведена подобная зависимость  $dF = 0,48 d \rho v_n^2 ds$ . За исключением критического режима, коэффициент сопротивления слабо зависит от числа Рейнольдса. Так, в диапазоне  $\text{Re}_n = 10 \div 10^4$  значения  $\xi$  монотонно уменьшаются от 1,3 до 1. В критическом режиме ( $\text{Re}_n = 5 \cdot 10^5$ )  $\xi = 0,3$  [6].

При движении поперечные и продольные компоненты скорости изменяются по периодическому закону. В качестве первого приближения для продольной и поперечной составляющих сил трения примем квадратичный закон сопротивления, соответствующий развитому турбулентному режиму. Нередко тело водных животных имеет эллиптическое сечение, что улучшает его гидродинамические свойства. В этом случае составляющие силы трения различаются лишь постоянными множителями. Рассмотрим тело, имеющее круглое поперечное сечение, постоянное по длине. Лобовое сопротивление не учитывается.

Запишем составляющие силы трения в виде

$$dP = A_m v_l^2 ds, \quad dF = B_m v_n^2 ds,$$

где  $A_m = 0,325 \text{Re}_l^{-0,7} \pi d \rho$ ;  $B_m = 0,5 \xi d \rho$ . Параметры  $A_m, B_m$  имеют постоянное значение.

При направленном перемещении животное совершает плоское рептационное движение, например в горизонтальной плоскости (рис. 1). В процессе движения упругая ось и действующие силы лежат в плоскости  $xOy$ . Введем неподвижную в пространстве систему

координат  $(x, y, z)$ , где  $x, y, z$  — координаты точек упругой линии тела  $s$ . Векторную параметризацию кривой  $s$  выполняет вектор-функция  $\mathbf{r}(s, t)$ ,  $0 \leq s \leq l$  ( $t$  — время). Направлениям  $x, y, z$  соответствует правосторонне ориентированный триэдр  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . Обозначим через  $\mathbf{l}$  ( $\mathbf{l} = \mathbf{r}_s$ ,  $|\mathbf{l}| = 1$ ) вектор касательной к упругой линии,  $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{l}$  — вектор нормали,  $\mathbf{b}$  — вектор бинормали.

Животному необходимо преодолевать не только сопротивление внешней среды, но и силу инерции собственного тела. Плотность тела примем равной плотности окружающей жидкости  $\rho$ .

Уравнения равновесия имеют вид

$$\mathbf{F}_s = -\mathbf{K}, \quad \mathbf{M}_s + \mathbf{m} = \mathbf{F} \times \mathbf{l},$$

где  $\mathbf{M}$  — момент;  $\mathbf{F} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{l})\mathbf{l} + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = N\mathbf{l} + Q\mathbf{n}$  — сила;  $\mathbf{K}$  — линейная плотность внешних сил включая силы инерции;  $\mathbf{m}$  — распределенный момент внешней нагрузки;  $N$  — продольная сила;  $Q$  — перерезывающая сила; нижним индексом отмечены соответствующие производные.

Выражение для вектора внешних сил, учитывающее квадратичный закон сопротивления и силы инерции тела, имеет вид (окружающая жидкость неподвижна)

$$\mathbf{K} = A_m |\mathbf{r}_t| \mathbf{l} (\mathbf{r}_t \cdot \mathbf{l}) + B_m |\mathbf{r}_t| \mathbf{n} (\mathbf{r}_t \cdot \mathbf{n}) - \rho(\pi d^2/4) \mathbf{l} (\mathbf{r}_{tt} \cdot \mathbf{l}) - \rho(\pi d^2/4) \mathbf{n} (\mathbf{r}_{tt} \cdot \mathbf{n}),$$

где  $|\mathbf{r}_t| = \sqrt{x_t^2 + y_t^2}$  — модуль вектора скорости упругой оси животного. Распределенный момент внешней нагрузки  $\mathbf{m}$  обусловлен моментом инерции вращения сечения [8]:  $\mathbf{m} = -\rho J \varphi_{tt} \mathbf{b}$ , где  $J = \pi d^4/64$  — момент инерции поперечного сечения тела (постоянный по его длине).

В скалярной форме имеем уравнения

$$\begin{aligned} N_s - Q\varphi_s &= -A_m \sqrt{x_t^2 + y_t^2} (x_t \cos \varphi + y_t \sin \varphi) + \rho(\pi d^2/4) (x_{tt} \cos \varphi + y_{tt} \sin \varphi), \\ N\varphi_s + Q_s &= -B_m \sqrt{x_t^2 + y_t^2} (-x_t \sin \varphi + y_t \cos \varphi) + \rho(\pi d^2/4) (-x_{tt} \sin \varphi + y_{tt} \cos \varphi), \\ M_s - \rho J \varphi_{tt} &= -Q. \end{aligned} \quad (1.1)$$

При этом учитывались соотношения  $\mathbf{r}_t \cdot \mathbf{l} = x_t \cos \varphi + y_t \sin \varphi$ ,  $\mathbf{r}_t \cdot \mathbf{n} = -x_t \sin \varphi + y_t \cos \varphi$ ,  $\mathbf{r}_{tt} = x_{tt} \mathbf{i} + y_{tt} \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{M} = M \mathbf{b}$ .

Имеем систему с распределенными параметрами. Согласно последнему уравнению в (1.1) мышцы, расположенные симметрично относительно позвоночника животного, создают момент, который затрачивается на преодоление сил инерции, обусловленных поворотом поперечного сечения тела, и создание перерезывающей силы. В свою очередь перерезывающая сила затрачивается на преодоление сил инерции, обусловленных поперечным перемещением тела, и сил гидродинамического сопротивления внешней среды.

Перейдем к безразмерным параметрам и переменным, приняв в качестве масштаба силы наибольшее значение перерезывающего усилия  $Q$  ( $Q_0 = |\max Q|$ ):

$$\begin{aligned} \{X, Y, S\} &= \{x, y, s\} l^{-1}, \quad e = \frac{A_m}{B_m}, \quad n = \frac{N}{Q_0}, \quad q = \frac{Q}{Q_0}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{Q_0}{A_m l^3}}, \\ \text{In} &= \frac{\rho \pi d^2}{4 A_m l}, \quad \Omega = \omega \sqrt{\frac{A_m l^3}{Q_0}}, \quad K = kl, \quad w = W \sqrt{\frac{A_m l}{Q_0^3}}. \end{aligned}$$

Здесь  $\omega$  — частота сокращения мышц;  $w$  — затрачиваемая энергия; In — параметр инерции.

В безразмерном виде уравнения (1.1), дополненные геометрическими соотношениями и краевыми условиями, имеют вид

$$\begin{aligned} n_s - q\varphi_s &= f_1, & f_1 &= -\sqrt{X_\tau^2 + Y_\tau^2} (X_\tau \cos \varphi + Y_\tau \sin \varphi) + \text{In} (X_{\tau\tau} \cos \varphi + Y_{\tau\tau} \sin \varphi), \\ n\varphi_s + q_s &= f_2, & f_2 &= -e^{-1} \sqrt{X_\tau^2 + Y_\tau^2} (-X_\tau \sin \varphi + Y_\tau \cos \varphi) + \text{In} (-X_{\tau\tau} \sin \varphi + Y_{\tau\tau} \cos \varphi), \\ X_s &= \cos \varphi, & Y_s &= \sin \varphi, \\ \tau = 0: & X = X^0(S), & Y &= Y^0(S), \\ \tau > 0, S = 0: & n = q = 0, & S = 1: & n = q = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Функции  $X^0, Y^0$  описывают начальную конфигурацию.

Нервные импульсы, поступающие к мышцам животного, формируют бегущую волну, обеспечивающую поступательное движение. В уравнениях (1.2) необходимо априорно задать одну из функций  $n, q, \varphi$ . Для плоской бегущей волны примем выражение

$$\varphi = \varepsilon \sin (KS - \Omega\tau), \quad (1.3)$$

где  $\Omega$  — безразмерная частота сокращения мышц;  $\varepsilon$  — безразмерный параметр:  $|\varepsilon| \leq \pi/2$ ;  $K = 2\pi i$ ,  $i = 1, 2, 3 \dots$ . Согласно последнему равенству длина тела кратна целому числу волн, что значительно упрощает расчетные выражения.

При  $d = 0,05$  м,  $v = 1$  м/с,  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu = 10^{-3}$  Па·с значение параметра инерции  $\text{In} = 74,86$ . Следовательно, необходимо учитывать последние слагаемые в правой части первых двух уравнений (1.2).

В уравнениях (1.2) сомножители не содержат момент инерции поперечного сечения. Следовательно, силы инерции, обусловленные инерцией поворота сечений, не оказывают влияния на траекторию движения тела животного, а лишь определяют момент (1.1).

Согласно [4] энергию  $W$  можно определить интегралом

$$W = \int_0^l \mathbf{r}_t \cdot \mathbf{K} ds.$$

С учетом соотношений

$$\begin{aligned} N_s - Q\varphi_s &= -A_m |\mathbf{r}_t| (\mathbf{r}_t \cdot \mathbf{l}) + \rho \frac{\pi d^2}{4} (\mathbf{r}_{tt} \cdot \mathbf{l}), & N\varphi_s + Q_s &= -B_m |\mathbf{r}_t| (\mathbf{r}_t \cdot \mathbf{n}) + \rho \frac{\pi d^2}{4} (\mathbf{r}_{tt} \cdot \mathbf{n}), \\ \mathbf{r}_t &= x_t \mathbf{i} + y_t \mathbf{j} \end{aligned}$$

и уравнений (1.2) выражение для безразмерной мощности принимает вид

$$w = \int_0^1 \left\{ \sqrt{X_\tau^2 + Y_\tau^2} [(x_t \cos \varphi + y_t \sin \varphi)^2 + e^{-1} (-x_t \sin \varphi + y_t \cos \varphi)^2] \right\} dS. \quad (1.4)$$

**2. Решение задачи.** Положим, что осевое усилие и перерезывающая сила являются функциями  $\varphi$ , т. е.  $n = n(\varphi)$ ,  $q = q(\varphi)$ , где  $\varphi = \varphi(S, \tau)$ . В этом случае первые два уравнения в (1.2) принимают вид

$$n_\varphi - q = f_1 \varphi_s^{-1}, \quad n + q_\varphi = f_2 \varphi_s^{-1}. \quad (2.1)$$

Исключив из этих уравнений функцию  $q$ , получим неоднородное линейное уравнение второго порядка для функции  $n$

$$n_{\varphi\varphi} + n = f_2 \varphi_s^{-1} + (f_1 \varphi_s^{-1})_\varphi.$$

Решение имеет вид

$$n = C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi - \cos \varphi \int [f_2 \varphi_s^{-1} + (f_1 \varphi_s^{-1})_\varphi] \sin \varphi d\varphi + \\ + \sin \varphi \int [f_2 \varphi_s^{-1} + (f_1 \varphi_s^{-1})_\varphi] \cos \varphi d\varphi, \quad (2.2)$$

где  $C_1, C_2$  — постоянные.

Интегрируя по частям подынтегральные функции, получим равенства

$$\int (f_1 \varphi_s^{-1})_\varphi \sin \varphi d\varphi = f_1 \varphi_s^{-1} \sin \varphi - \int f_1 \cos \varphi dS, \\ \int (f_1 \varphi_s^{-1})_\varphi \cos \varphi d\varphi = f_1 \varphi_s^{-1} \cos \varphi + \int f_1 \sin \varphi dS.$$

С учетом этих соотношений выражение (2.2) принимает вид

$$n = C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi - \cos \varphi \left( \int_0^S f_2 \sin \varphi dS - \int_0^S f_1 \cos \varphi dS \right) + \\ + \sin \varphi \left( \int_0^S f_2 \cos \varphi dS + \int_0^S f_1 \sin \varphi dS \right). \quad (2.3)$$

Согласно первому уравнению в (1.2) перерезывающее усилие  $q = \varphi_s^{-1}(n_s - f_1)$ . С учетом выражения (2.3) можно записать

$$q = C_1 \cos \varphi - C_2 \sin \varphi + \sin \varphi \left( \int_0^S f_2 \sin \varphi dS - \int_0^S f_1 \cos \varphi dS \right) + \\ + \cos \varphi \left( \int_0^S f_2 \cos \varphi dS + \int_0^S f_1 \sin \varphi dS \right). \quad (2.4)$$

Постоянные в выражениях (2.3), (2.4) найдем из условия отсутствия сил на левом конце ( $S = 0, n = q = 0$ ) тела (1.2). При этом получим систему уравнений

$$C_1 \sin \varphi_0 + C_2 \cos \varphi_0 = 0, \quad C_1 \cos \varphi_0 - C_2 \sin \varphi_0 = 0,$$

где  $\varphi_0(\tau) = \varphi|_{S=0}$ . Решение системы имеет вид  $C_1 = C_2 = 0$ .

С учетом граничного условия для правого конца ( $S = 1, n = q = 0$ ) тела животного (1.2) имеем следующую систему уравнений:

$$-\cos \varphi_0 \left( \int_0^1 f_2 \sin \varphi dS - \int_0^1 f_1 \cos \varphi dS \right) + \sin \varphi_0 \left( \int_0^1 f_2 \cos \varphi dS + \int_0^1 f_1 \sin \varphi dS \right) = 0, \\ \sin \varphi_0 \left( \int_0^1 f_2 \sin \varphi dS - \int_0^1 f_1 \cos \varphi dS \right) + \cos \varphi_0 \left( \int_0^1 f_2 \cos \varphi dS + \int_0^1 f_1 \sin \varphi dS \right) = 0.$$

Здесь учитывалось свойство функции (1.3)  $\varphi_0 = \varphi|_{S=0} = \varphi|_{S=1}$ . Система тригонометрических уравнений имеет нулевое решение:

$$\int_0^1 (f_2 \sin \varphi - f_1 \cos \varphi) dS = 0, \quad \int_0^1 (f_2 \cos \varphi + f_1 \sin \varphi) dS = 0. \quad (2.5)$$

Подставив в (2.5) выражения для функций  $f_1$  и  $f_2$  из (1.2), запишем уравнения в развернутом виде:

$$\int_0^1 (\sqrt{X_\tau^2 + Y_\tau^2} \{X_\tau [1 + (e^{-1} - 1) \sin^2 \varphi] + 0,5(1 - e^{-1}) Y_\tau \sin 2\varphi\} - \ln X_{\tau\tau}) dS = 0, \quad (2.6)$$

$$\int_0^1 (\sqrt{X_\tau^2 + Y_\tau^2} \{0,5(e^{-1} - 1) X_\tau \sin 2\varphi - Y_\tau [e^{-1} + (1 - e^{-1}) \sin^2 \varphi]\} + \ln Y_{\tau\tau}) dS = 0.$$

Используя геометрические соотношения для упругой оси из (1.2), а также выражение (1.3), для функций  $X$ ,  $Y$  получим следующие уравнения:

$$X_S = \cos \varphi = 1 - \varphi^2/2! + \dots = 1 - (\varepsilon^2/2) \sin^2(KS - \Omega\tau) + \dots, \quad (2.7)$$

$$Y_S = \sin \varphi = \varphi - \varphi^3/3! + \dots = \varepsilon \sin(KS - \Omega\tau) - (\varepsilon^3/6) \sin^3(KS - \Omega\tau) + \dots$$

Задачу будем анализировать методом малого параметра, в качестве которого примем амплитуду “геометрического” возмущения  $\varepsilon$  в (1.3). Функции  $X$ ,  $Y$  найдем в виде прямых разложений по степеням малого параметра. В соответствии с разложениями (2.7) для искомых функций запишем выражения

$$X = X_0 + \varepsilon^2 X_2 + \dots, \quad Y = \varepsilon Y_1 + \varepsilon^3 Y_3 + \dots, \quad |\varepsilon| \ll 1. \quad (2.8)$$

Развернутый анализ задачи показал, что члены с нечетными степенями  $\varepsilon$  в  $X$  и с четными в  $Y$  равны нулю. Ограничиваясь двумя первыми членами разложения для функции  $X$  и одним — для  $Y$ , в результате интегрирования уравнений (2.7) в пределах от 0 до  $S$  с учетом (2.8) получим

$$X_0 = S + C_3(\tau), \quad X_2 = -\frac{1}{2K} \left( \frac{KS}{2} - \frac{\sin 2(KS - \Omega\tau)}{4} - \frac{\sin 2\Omega\tau}{4} \right) + C_4(\tau), \quad (2.9)$$

$$Y_1 = -(\cos(KS - \Omega\tau) - \cos \Omega\tau)/K + C_5(\tau),$$

где  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$  — неизвестные функции времени.

Функция  $C_3$  характеризует перемещение животного вдоль оси  $X$ . Однако, поскольку составляющая  $X_0$  не зависит от амплитуды возмущения  $\varepsilon$ , следует положить  $C_3 = 0$ .

Пусть в начальный момент левый конец тела животного находится в сечении  $X = 0$ , а упругая ось расположена “симметрично” относительно оси  $X$  (статический момент упругой оси относительно оси  $X$  равен нулю). При этом имеем условия

$$\tau = 0, \quad S = 0: \quad X = 0; \quad (2.10)$$

$$\tau = 0: \quad \int_0^1 Y dS = 0. \quad (2.11)$$

С учетом соотношений (2.8), (2.9) и условия (2.10) получим равенство  $\varepsilon^2 C_4|_{\tau=0} + \dots = 0$ , из которого следует начальное условие для неизвестной функции времени

$$\tau = 0, \quad C_4 = 0. \quad (2.12)$$

Подставив (2.8) и (2.9) в (2.11), для любого момента времени получим

$$\varepsilon(K^{-1} \cos \Omega\tau + C_5) + \dots = 0.$$

Здесь учитываются равенства  $K = 2\pi n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\sin K = 0$ ,  $\cos K = 1$ . Таким образом, функция  $C_5$  имеет вид

$$C_5 = -K^{-1} \cos \Omega\tau. \quad (2.13)$$

Согласно (2.8), (2.9), (2.13) для функции  $Y$  можно записать

$$Y = -(\varepsilon/K) \cos(KS - \Omega\tau) + O(\varepsilon^3). \quad (2.14)$$

Для нахождения функции  $C_4(\tau)$  используем уравнения (2.6). Подставив разложения (2.8) в (2.6) (учитываются только члены рассматриваемых порядков), получим

$$\int_0^1 \left[ \left( \varepsilon|Y_{1\tau}| + \frac{\varepsilon^3}{2} \frac{X_{2\tau}^2}{Y_{1\tau}} \right) \{ \varepsilon^2 X_{2\tau} [1 + (e^{-1} - 1)(\varepsilon\varphi_1)^2] + (1 - e^{-1})\varepsilon^2 Y_{1\tau} \varphi_1 \} - \ln \varepsilon^2 X_{2\tau\tau} \right] dS = 0,$$

$$\int_0^1 \left[ \left( \varepsilon|Y_{1\tau}| + \frac{\varepsilon^3}{2} \frac{X_{2\tau}^2}{Y_{1\tau}} \right) \{ (e^{-1} - 1)\varepsilon^3 X_{2\tau} \varphi_1 - \varepsilon Y_{1\tau} [e^{-1} + (1 - e^{-1})\varepsilon^2 \varphi_1^2] \} + \ln \varepsilon Y_{1\tau\tau} \right] dS = 0.$$

Здесь  $\varphi_1 = \sin(KS - \Omega\tau)$ . При этом использовались соотношения

$$\sin^2 \varphi \approx \varepsilon^2 \varphi_1^2 + \dots, \quad \sin 2\varphi \approx 2\varepsilon\varphi_1 + \dots, \quad \sqrt{(\varepsilon^2 X_{2\tau})^2 + (\varepsilon Y_{1\tau})^2} \approx \varepsilon|Y_{1\tau}| + \frac{\varepsilon^3}{2} \frac{X_{2\tau}^2}{Y_{1\tau}} + \dots$$

Выделив множители при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим следующие уравнения:

$$\varepsilon^1: \quad \int_0^1 Y_{1\tau\tau} dS = 0; \quad (2.15)$$

$$\varepsilon^2: \quad \int_0^1 X_{2\tau\tau} dS = 0, \quad \int_0^1 Y_{1\tau}^2 dS = 0; \quad (2.16)$$

$$\varepsilon^3: \quad \int_0^1 [ |Y_{1\tau}| X_{2\tau} + |Y_{1\tau}| (1 - e^{-1}) Y_{1\tau} \varphi_1 ] dS = 0. \quad (2.17)$$

Уравнение (2.15) и второе уравнение в (2.16) являются тождествами. Из первого уравнения в (2.16) с учетом (2.9) находим функцию  $C_4$ :

$$C_4 = -\frac{1}{8K} \sin 2\Omega\tau + C_{40}\tau + C_{41} \quad (2.18)$$

( $C_{40}$ ,  $C_{41}$  — постоянные). Из условия (2.12) следует  $C_{41} = 0$ . Постоянную  $C_{40}$  найдем, используя уравнение (2.17). Интегрируя это уравнение с учетом выражений (2.9), (2.14), (2.18), получим

$$C_{40} = -\frac{\Omega}{12K} \frac{8 - 7e}{e}.$$

С учетом соотношений (2.8), (2.9), (2.18) для функции  $X$  запишем выражение

$$X = S \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \right) + \frac{\varepsilon^2}{8K} \sin 2(KS - \Omega\tau) - \frac{\varepsilon^2 \Omega (8 - 7e) \tau}{12Ke} + O(\varepsilon^4). \quad (2.19)$$

После несложных преобразований выражения (2.3), (2.4) принимают вид

$$\begin{aligned}
n &= -\cos \varphi \int_0^S (\sqrt{X_\tau^2 + Y_\tau^2} \{X_\tau[1 + (e^{-1} - 1) \sin^2 \varphi] + 0,5(1 - e^{-1})Y_\tau \sin 2\varphi\} - \ln X_{\tau\tau}) dS + \\
&+ \sin \varphi \int_0^S (\sqrt{X_\tau^2 + Y_\tau^2} \{0,5(e^{-1} - 1)X_\tau \sin 2\varphi - Y_\tau[e^{-1} + (1 - e^{-1}) \sin^2 \varphi]\} + \ln Y_{\tau\tau}) dS, \\
q &= \sin \varphi \int_0^S (\sqrt{X_\tau^2 + Y_\tau^2} \{X_\tau[1 + (e^{-1} - 1) \sin^2 \varphi] + 0,5(1 - e^{-1})Y_\tau \sin 2\varphi\} - \ln X_{\tau\tau}) dS + \\
&+ \cos \varphi \int_0^S (\sqrt{X_\tau^2 + Y_\tau^2} \{0,5(e^{-1} - 1)X_\tau \sin 2\varphi - Y_\tau[e^{-1} + (1 - e^{-1}) \sin^2 \varphi]\} + \ln Y_{\tau\tau}) dS.
\end{aligned}$$

Подставив в эти выражения формулы (2.14) и (2.19), для осевой силы и перерезывающего усилия получим асимптотические оценки

$$\begin{aligned}
n &= \varepsilon^2 \frac{\Omega^2}{K^2} \cos [\varepsilon \sin (KS - \Omega\tau)] \left[ \frac{2-e}{3e} J_1 + \left( \frac{1}{2} - e^{-1} \right) J_3 \right] + \varepsilon^2 \frac{\Omega^2}{eK^2} \sin [\varepsilon \sin (KS - \Omega\tau)] J_2 - \\
&- \varepsilon^2 \frac{\Omega^2}{4K^2} \ln [\cos 2(KS - \Omega\tau) - \cos 2\Omega\tau] \cos [\varepsilon \sin (KS - \Omega\tau)] + \\
&+ \varepsilon^2 \frac{\Omega^2}{eK^2} \ln [\sin (KS - \Omega\tau) - \sin \Omega\tau] \sin [\varepsilon \sin (KS - \Omega\tau)] + O(\varepsilon^4),
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
q &= -\varepsilon^2 \frac{\Omega^2}{K^2} \sin [\varepsilon \sin (KS - \Omega\tau)] \left[ \frac{2-e}{3e} J_1 + \left( \frac{1}{2} - e^{-1} \right) J_3 \right] + \varepsilon^2 \frac{\Omega^2}{eK^2} \cos [\varepsilon \sin (KS - \Omega\tau)] J_2 + \\
&+ \varepsilon^2 \frac{\Omega^2}{4K^2} \ln [\cos 2(KS - \Omega\tau) - \cos 2\Omega\tau] \sin [\varepsilon \sin (KS - \Omega\tau)] + \\
&+ \varepsilon^2 \frac{\Omega^2}{eK^2} \ln [\sin (KS - \Omega\tau) - \sin \Omega\tau] \cos [\varepsilon \sin (KS - \Omega\tau)] + O(\varepsilon^4),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^S |\sin (KS - \Omega\tau)| dS = \\
&= \frac{2}{\pi K} \left( KS - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(4n^2 - 1)} \{ \sin [2n(KS - \Omega\tau)] + \sin (2n\Omega\tau) \} \right), \\
J_2 &= \int_0^S |\sin (KS - \Omega\tau)| \sin (KS - \Omega\tau) dS = \\
&= \frac{1}{2K} \{ |\sin (KS - \Omega\tau)| \cos (KS - \Omega\tau) - |\sin (\Omega\tau)| \cos (\Omega\tau) + \\
&\quad + \arcsin [\cos (KS - \Omega\tau)] - \arcsin [\cos (\Omega\tau)] \},
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
J_3 &= \int_0^S |\sin(KS - \Omega\tau)| \sin^2(KS - \Omega\tau) dS = \\
&= \frac{1}{2} J_1 - \frac{1}{2\pi K} \left( -\frac{2}{3} KS + \sin[2(KS - \Omega\tau)] + \sin(2\Omega\tau) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(4n^2-1)} \{ \sin[2(n+1)(KS - \Omega\tau)] + \sin[2(n+1)\Omega\tau] \} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(4n^2-1)} \{ \sin[2(n-1)(KS - \Omega\tau)] + \sin[2(n-1)\Omega\tau] \} \right).
\end{aligned}$$

С учетом (2.14), (2.19) можно записать асимптотическую оценку потребляемой мощности (1.4)

$$w = \varepsilon^3 \frac{\Omega^3}{eK^3} \int_0^1 |\sin(KS - \Omega\tau)| \sin^2(KS - \Omega\tau) dS + O(\varepsilon^5).$$

Выполнив интегрирование, получим

$$w = 4\Omega^3 \varepsilon^3 / (3\pi e K^3) + O(\varepsilon^5).$$

Расчетную формулу для энергии запишем в размерном виде:

$$W = 2\omega^3 y_m^3 l \xi \rho d / (3\pi) + O(\varepsilon^5), \quad (2.21)$$

где  $y_m = \varepsilon/k$  — размерная амплитуда отклонения упругой оси тела от оси  $x$ .

**3. Анализ решения.** Первое слагаемое в правой части выражения (2.19) в совокупности с выражением (2.14) описывает упругую ось тела животного, второе — осевые пульсации тела в процессе движения. Сомножитель третьего слагаемого  $\Omega\varepsilon^2(8-7e)/(12Ke)$  характеризует среднюю скорость движения животного вдоль оси  $X$ . Скорость движения не зависит от инерции тела (параметра  $ln$ ). При априорно заданном законе движения (функция  $\varphi$ ) силы инерции оказывают влияние на осевое усилие и перерезывающую силу. Размерная скорость движения  $\bar{v}_x$  определяется выражением  $\bar{v}_x = -(8-7e)y_m^2 k \omega / (12e)$ . Скорость существенно зависит от соотношения компонент силы трения (параметра  $e$ ). Полученный результат подтверждает идею М. А. Лаврентьева о необходимости учета вязких свойств жидкости [9].

На рис. 2 представлены конфигурации упругой оси в различные моменты времени. Расчеты выполнены по формулам (2.14), (2.19) при  $\varepsilon = 0,3$ ,  $\Omega = 2\pi$ ,  $K = 4\pi$ ,  $e = 0,1$ . Животное перемещается влево ( $\Omega > 0$ ,  $K > 0$ ) вдоль оси  $X$ . На каждой линии упругой оси стрелкой показана голова животного.

Из результатов численного анализа уравнений (2.14), (2.19) следует, что для обеспечения правильного направления движения должно выполняться условие  $e < 8/7$ . Параметр  $e$  характеризует соотношение продольной и поперечной сил трения и определяется формулой  $e = 0,65\pi \text{Re}_l^{-0,7}$ . Число Рейнольдса должно удовлетворять условию  $\text{Re}_l^{0,7} > 0,568\pi$ .

При уменьшении продольного трения (параметра  $e$ ) скорость движения увеличивается, поэтому на скорость движения большое влияние оказывает гидродинамический пограничный слой.

Если организовать движение животного без трения в стеклянной трубке, имеющей форму  $Y = -(\varepsilon/K) \cos KS$ ,  $X = S(1 - \varepsilon^2/4)$ , то оно будет иметь предельно возможную скорость осевого перемещения, равную скорости бегущей волны  $\Omega/K$ . Реальная скорость меньше. Параметры  $\varepsilon$  и  $e$  должны удовлетворять условию “предельной скорости”  $\varepsilon^2(8-7e)/(12e) \leq 1$ .

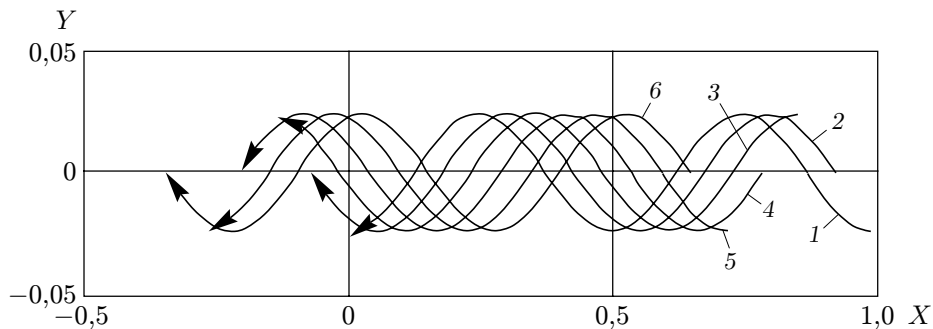


Рис. 2. Упругая сила в различные моменты времени:

1 —  $\tau = 0$ ; 2 —  $\tau = 0,25$ ; 3 —  $\tau = 0,5$ ; 4 —  $\tau = 0,75$ ; 5 —  $\tau = 1$ ; 6 —  $\tau = 1,25$

Из выражений (2.20) следует, что осевое усилие и перерезывающая сила имеют циклический характер и пропорциональны комплексу  $\varepsilon^2 \Omega^2 / K^2$ . Составляющая, обусловленная силами инерции, пропорциональна  $\text{In } \varepsilon^2 \Omega^2 / K^2$ .

В турбулентном режиме движения потребляемая мощность (2.21) существенно отличается от мощности в ламинарном режиме [4]. В первом приближении силы инерции не влияют на затрачиваемую мощность. Частоту сокращения мышц  $\omega$  можно определить через среднюю скорость движения:  $\omega = |-12e\bar{v}_x / [(8 - 7e)y_m^2 k]|$ .

Управляющее уравнение (1.3) не во всех случаях соответствует реальной картине движения. Например, водяные змеи во время движения сохраняют осевую ориентацию головы. Кроме того, размах поперечных колебаний увеличивается от головы к хвосту. В этом случае можно использовать управляющее уравнение  $\varphi = \varepsilon [\exp(aS) - 1] \sin(KS - \Omega\tau)$ , где  $a$  — постоянная.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В. М., Луговцов Б. А., Шер Е. Н. О механизме движения рыб и ужей // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1969. Вып. 1. С. 207–233.
2. Шер Е. Н. О механизме движения ужей и рыб // Некоторые проблемы математики и механики. Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1970. С. 267–276.
3. Лаврентьев М. А., Лаврентьев М. М. Об одном принципе создания тяговой силы движения // ПМТФ. 1962. № 4. С. 3–9.
4. Шаповалов В. М. Рептационное движение животных в жидкости // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 5. С. 106–115.
5. Зябицкий А. Теоретические основы формирования волокон. М.: Химия, 1979.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.
7. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. Ч. 2.
8. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985.
9. Лаврентьев М. А. Модель движения рыб, ужей // ПМТФ. 1973. № 2. С. 164, 165.

Поступила в редакцию 27/IV 2005 г.