

РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД

УДК 622.234.573

ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОРАЗРЫВА ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ С ЩЕЛЕВЫМ ИНИЦИАТОРОМ НА ЗАБОЕ СКВАЖИНЫ

А. В. Азаров, С. В. Сердюков

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
E-mail: antonazv@mail.ru, Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Рассмотрены результаты численных исследований гидроразрыва изотропной упругой среды с щелевым инициатором на забое скважины. Установлено влияние отдельных факторов, в том числе глубины инициатора, его удаления от забоя скважины, формы забоя, прочностных и упругих свойств материала, на форму образующихся трещин, давление разрыва. Приведены примеры использования выявленных закономерностей для оптимизации параметров оборудования и ориентированного гидроразрыва породного массива при решении задач горного дела.

Гидроразрыв, щелевой инициатор, траектория развития трещины, скважина, форма забоя, прочностные и упругие свойства, давление разрыва, математическое моделирование, расширенный метод конечных элементов

DOI: 10.15372/FTPRPI20210606

Гидравлический разрыв породного массива поперек скважин используют при противофильтрационном экранировании горных выработок [1], измерении напряженного состояния [2] и дезинтеграции породного массива, включая отделение блоков гранита и мрамора в карьерах, ослабление труднообрушаемой кровли угольных пластов на шахтах [3]. Чаще всего работы проводят на забое необсаженной скважины, изолированном герметизатором (надувным или со сжатием уплотнительных элементов), установленным с опорой на колонну труб, сила реакции которой уравнивает осевую нагрузку на пакер. Начальную ориентацию разрыва задают разными способами, обычно с помощью щелевого инициатора — кольцевого выреза в породах на стенке скважины в плоскости ее кругового сечения.

Созданы и разрабатываются щелеобразователи и герметизаторы [4], отличающиеся конструкцией, глубиной и формой выреза, расположением иницирующей щели и пакера относительно торца скважины. Асимметрия нагружения призабойного интервала разрыва рабочей жидкостью влияет на распределение растягивающих напряжений во вмещающей породе, развитие трещин.

Настоящая статья посвящена численному исследованию влияния размера инициатора, расстояния между ним и торцом скважины, свойств изотропной упругой среды на форму и параметры разрыва в равнокомпонентном поле сжимающих напряжений. Как отмечал О. И. Чернов, первым применивший ориентированный разрыв для дезинтеграции труднообрушаемой кровли угольных пластов, направление развития трещины в такой среде определяется иницирующей щелью. Это позволяет уменьшить объем численных исследований, упростить анализ полученных результатов.

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ

Задача решалась в трехмерной постановке расширенным методом конечных элементов [5], реализованным в среде программирования Abaqus. Описание программного комплекса приведено в работе [6]. Расчетная область кубической формы и условия нагружения ее границ схематически показаны на рис. 1. Выбранная форма модели обеспечивает возможность перехода к анализу и проектированию технологических гидроразрывов в общем случае неоднородно сжатого породного массива, когда нормальные нагрузки $S_{xx} \neq S_{yy} \neq S_{zz}$.

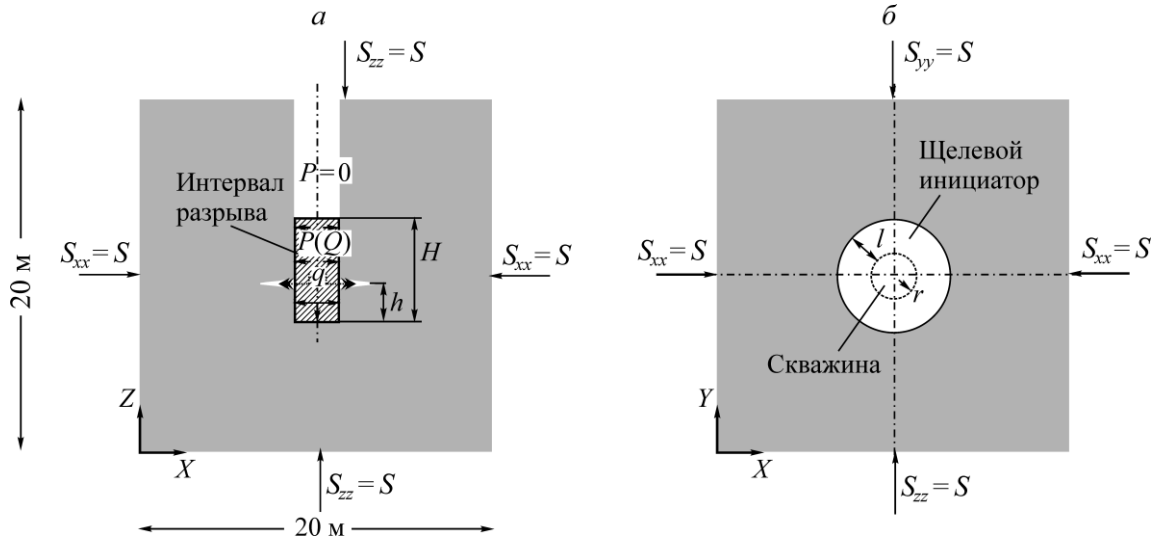


Рис. 1. Расчетная область среды и условия ее нагружения: a — центральное сечение в плоскости XOZ ; b — центральное сечение в плоскости XOY ; r — радиус скважины; l — глубина щелевого инициатора; h — его удаление от торца скважины; H — длина интервала разрыва, нагруженного давлением P рабочей жидкости; q, Q — темп и накопленный объем ее нагнетания; $(x; y; z)$ — прямоугольная система координат; $S_{xx} = S_{yy} = S_{zz} = S$ — нормальные нагрузки

В соответствии с используемой когезионной моделью разрушения среды [7] по билинейному закону процесс ее разупрочнения определяется критическими значениями напряжения σ_c и высвобождаемой энергии $G_c = \int_0^{u_f} \sigma du$, где σ, u — соответственно локальные напряжения и растяжения в когезионной зоне у вершины трещины, u_f — максимальное раскрытие при разрыве (рис. 2). Превышение локальным напряжением критического значения σ_c ведет к изменению состояния среды, характеризующегося новым значением $\bar{\sigma}_c = (1-D)\sigma_c$, здесь D — степень разупрочнения среды. Значение D линейно возрастает от 0 при $u = u_c$ (локальное растяжение когезионной зоны при предельной нагрузке σ_c) до 1 при $u = u_f$. Численный анализ выполняется пошагово до тех пор, пока среда в области разупрочнения у вершины трещины не переходит в полностью разрушенное состояние, для которого $\bar{\sigma}_c = 0$ (рис. 2).

Особенностью рассматриваемой задачи является изменение давления нагружения стенок скважины в процессе роста трещины. Характер этого изменения заранее неизвестен. Чтобы устранить проблему, задача решалась поэтапно: сначала моделировали гидроразрыв без нагружения стенок скважины, задавая постоянный темп подачи (q) рабочей жидкости в устье иницирующей щели, считающейся частью формируемой трещины. В результате решения получали зависимость устьевого давления P от накопленного расхода Q , которую затем использовали для задания граничных условий на поверхности интервала разрыва — призабойного участка скважины, изолированного пакером. По уточненному виду $P(Q)$ вновь корректировали граничные условия и при необходимости расчет повторяли.

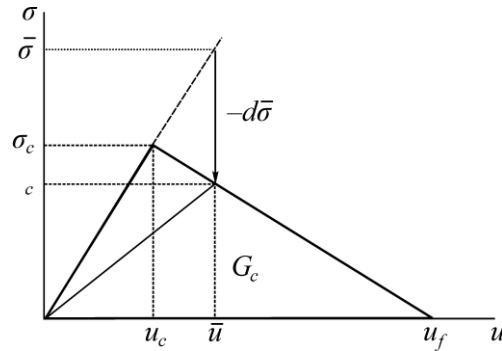


Рис. 2. Билинейная зависимость “напряжение–смещение” в области разупрочнения среды у вершины трещины

На рис. 3 приведен пример результатов 3D-моделирования гидроразрыва ненагруженного угледобного материала, когда щелевой инициатор глубиной $l=r$ расположен в плоскости торца скважины ($h=0$).

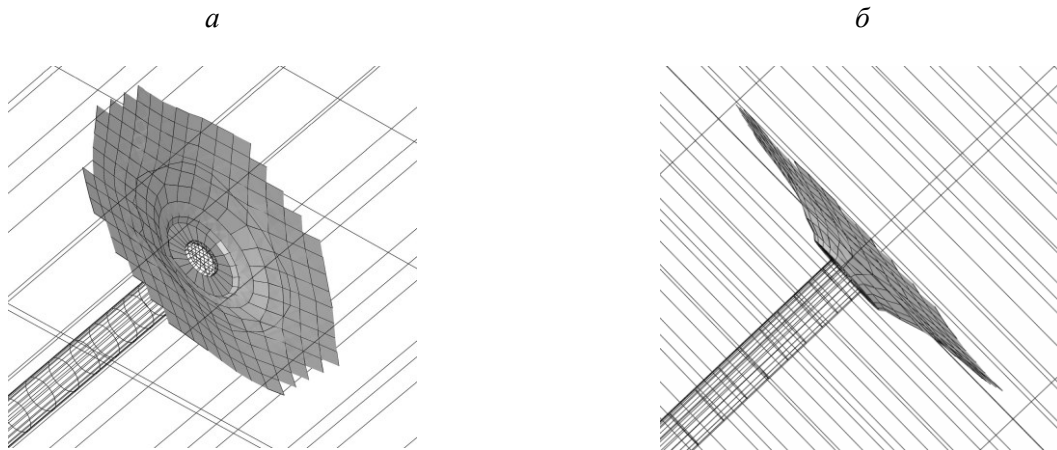


Рис. 3. Форма трещины гидроразрыва в изотропной упругой ненагруженной среде ($S=0$) при торцевом расположении щелевого инициатора: а — изометрический вид; б — вид сбоку

Отметим, что асимметрия нагружения интервала разрыва рабочей жидкостью ведет к значительному отклонению трещины от плоскости щелевого инициатора. На начальном участке она развивается под углом в десятки градусов к плоскости щели, постепенно выполаживаясь и приобретая коническую форму с углом при вершине близким к 2π . На рис. 4 приведены фотографии разрывов ненагруженных блоков оргстекла пластилином поперек скважин, выполненных сотрудником ИГД СО РАН В. И. Востриковым. Видно, что влияние торца скважины на форму трещины подобно расчетному, что свидетельствует о достоверности результатов численного моделирования.

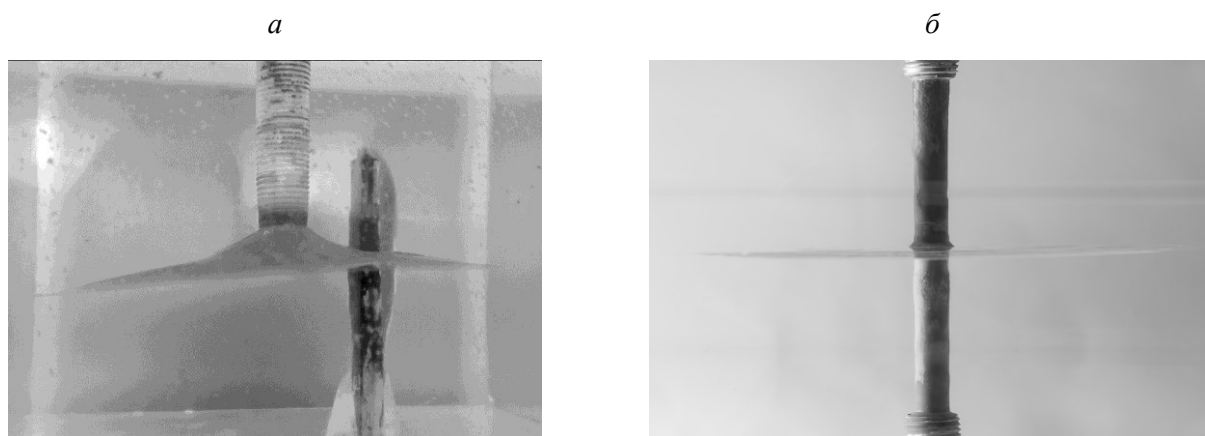


Рис. 4. Гидравлические разрывы ненагруженных блоков оргстекла поперек скважин: *а* — в плоскости торца скважины; *б* — вне зоны влияния торца скважины

ФОРМА РАЗРЫВА

В ходе исследований анализировалось влияние на форму образующихся трещин глубины щелевого инициатора, его удаления от торца скважины, длины интервала разрыва, свойств среды и ее гидростатического сжатия. Приняты следующие значения параметров: радиус скважины $r = 5$ см, вязкость рабочей жидкости $1 \text{ мПа}\cdot\text{с}$ (вода). Свойства среды в экспериментах соответствовали углю (модуль упругости $E = 1 - 3$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3 - 0.4$, прочность на растяжение $\sigma_p = 1$ МПа, коэффициент трещиностойкости $K_{IC} = 0.9 \text{ МПа}\cdot\text{м}^{1/2}$), алевролиту ($E = 8$ ГПа, $\nu = 0.25$, $\sigma_p = 8$ МПа, $K_{IC} = 1.3 \text{ МПа}\cdot\text{м}^{1/2}$) и плотному песчанику ($E = 14 - 30$ ГПа, $\nu = 0.15$, $\sigma_p = 14$ МПа, $K_{IC} = 1.5 \text{ МПа}\cdot\text{м}^{1/2}$). Критическая энергия пород вычислялась по формуле $G_C = K_{IC}^2(1 - \nu^2) / E$ [8]. В песчанике и алевролите ее значения составляют соответственно $44 - 73$ и 198 Н/м , в угле — $194 - 226 \text{ Н/м}$. Критическое напряжение σ_c бралось равным прочности пород на растяжение.

На рис. 5 приведены расчетные траектории разрывов угля в ненагруженном состоянии и при гидростатическом сжатии $S = 2.5$ МПа. Показаны только правые ветви трещин в осевом сечении скважины (левые — симметричны) при $H = 2r$, торцевом расположении инициатора ($h = 0$) и нескольких значениях его глубины из технически достижимого диапазона $l \in [0; 2r]$.

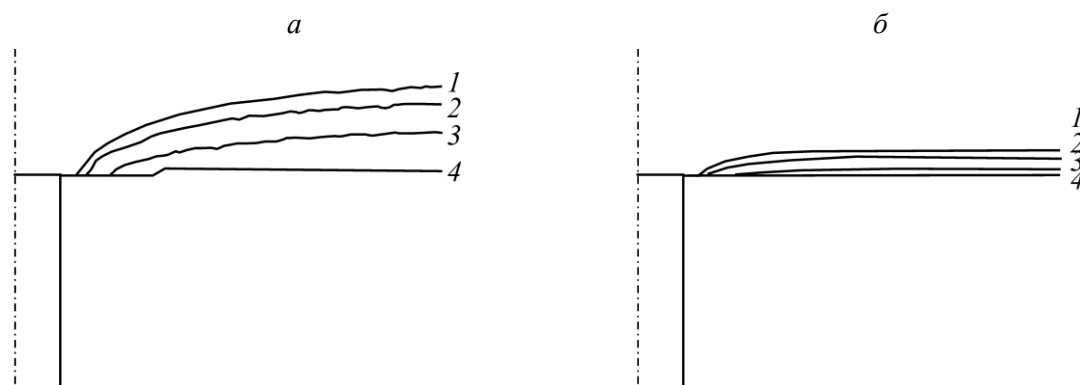


Рис. 5. Траектории разрывов угля в осевом сечении скважины при торцевом расположении щелевого инициатора ($h = 0$), $H = 2r$: *а* — ненагруженная среда $S = 0$; *б* — гидростатическое сжатие $S = 2.5$ МПа; 1 — $l = r/4$; 2 — $l = r/2$; 3 — $l = r$; 4 — $l = 2r$. Здесь и далее штрихпунктирной линией обозначена ось скважины

Из представленных на рис. 5 траекторий следует, что отклонение трещины от плоскости инициатора увеличивается с уменьшением его глубины l . В разгруженной породе оно больше, чем в сжатой.

На рис. 6 приведены траектории при глубине инициатора $l=r/2$ и тех же условиях, что описаны ранее, но при разном удалении щели от плоского торца скважины. По мере увеличения расстояния инициатора до забоя траектория разрыва становится ближе к плоскости щели. В напряженной среде это наблюдается при меньших значениях h .

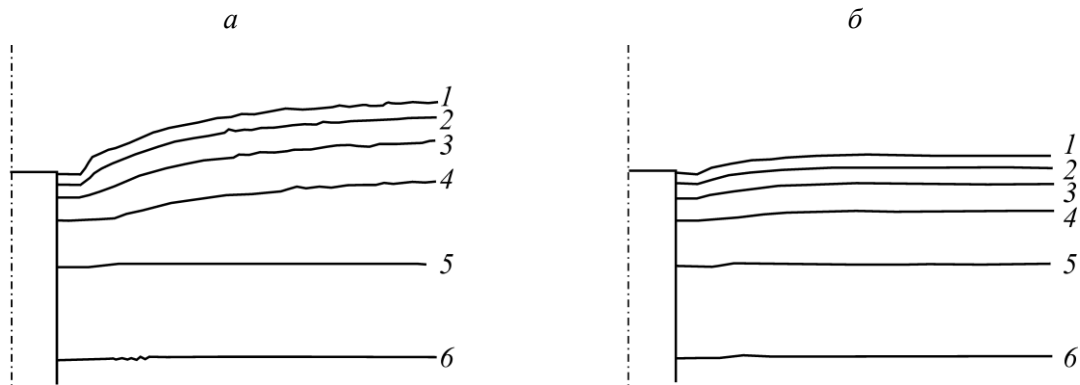


Рис. 6. Траектории разрывов угля в осевом сечении скважины при глубине инициатора $l=r/2$, $H=10r$: *a* — ненагруженная среда $S=0$; *б* — гидростатическое сжатие $S=2.5$ МПа; 1 — $h=0$; 2 — $h=r/4$; 3 — $h=r/2$; 4 — $h=r$; 5 — $h=2r$; 6 — $h=5r$

Отклонение трещины от плоскости инициатора обусловлено несимметричностью деформации среды и может быть количественно проанализировано в рамках линейной упругой механики разрушения по значениям коэффициентов интенсивности напряжений, которые находятся из расчетов напряженно-деформированного состояния модели. Согласно критерию максимального тангенциального напряжения, предложенному в работе [9], значение искомого угла определяется решением системы уравнений $\partial\sigma_{\theta\theta}/\partial\theta=0$, $\partial^2\sigma_{\theta\theta}/\partial\theta^2<0$, где $\sigma_{\theta\theta}$ — тангенциальное напряжение, θ — угол в полярных координатах с центром в вершине трещины ($\theta=0$ в плоскости инициатора). Угол рассчитывается по формуле [9]:

$$\theta = 2\arctg\left(\frac{-2K_{II}^2}{K_I + \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}\right),$$

где K_I , K_{II} — коэффициенты интенсивности напряжений для трещин соответственно растяжения и сдвига.

На рис. 7 приведены графики коэффициентов интенсивности напряжений и угла θ в ненагруженной углеподобной среде ($S=0$), рассчитанные по результатам моделирования ее напряженно-деформированного состояния, в зависимости от относительной глубины инициатора (длины начальной трещины) l/r (рис. 7*а*, *б*) и его удаления h/r от торца скважины (рис. 7*в*, *г*). Граничные условия отличались от указанных на рис. 1 тем, что к берегам иницирующей трещины, как и к стенкам интервала разрыва скважины, было приложено постоянное давление жидкости $P>0$. Поскольку в ненагруженной среде K_I , K_{II} пропорциональны P , то их отношение, а следовательно, и значение угла θ от прикладываемого давления при $S=0$ не зависят. Для определенности в расчетах принято $P=1$ МПа.

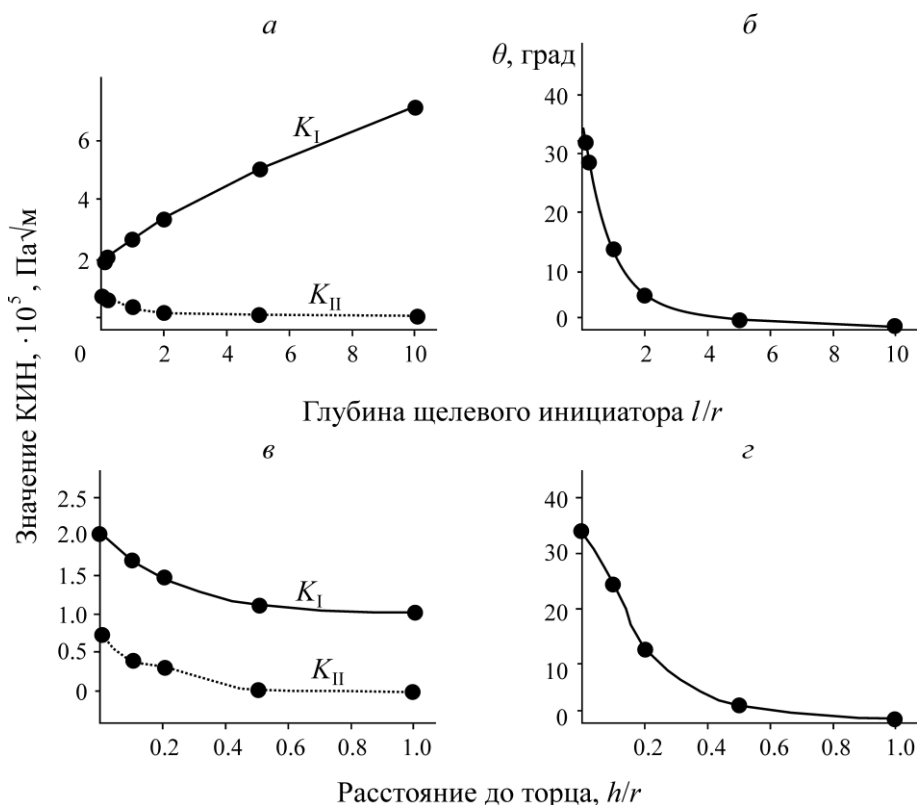


Рис. 7. Значения коэффициентов интенсивности напряжений (а, в) и угла θ (б, г) в углеподобной среде при $S=0$, $P=1$ МПа: а, б — в зависимости от относительной глубины инициатора (длины начальной трещины) при $h=0$, $H=2r$; в, г — в зависимости от относительного расстояния инициатора до торца скважины при $l=r/2$, $H=10r$

Из приведенных на рис. 7а графиков видно, что при уменьшении глубины щелевого инициатора значение K_I снижается, а K_{II} растет. Это приводит к большим отклонениям разрыва от плоскости инициатора в области технически достижимых значений $l < 2r$. В рассматриваемом примере $\theta \approx 13^\circ$ при $h=r=0.05$ м, $\theta \approx 33^\circ$ при $h=r/10=0.005$ м (рис. 7б). По мере удаления от забоя значение K_{II} быстро снижается практически до нуля (уже при $h \approx r$), при котором $\theta = 0$ (рис. 7в, г).

Одним из практически важных вопросов является связь траектории трещины с упругими и прочностными свойствами среды. На рис. 8 приведены результаты расчета формы разрывов при $S=0$ и 2.5 МПа, когда меняется только один из параметров — критическое напряжение (рис. 8а, б) или модуль упругости (рис. 8в, г), остальные, включая критическую энергию и коэффициент Пуассона, сохраняют свои значения. Это стандартный методический подход при анализе многофакторных физических процессов.

Получено, что прочность нагруженных пород влияет на траекторию разрыва незначительно. То же можно сказать и о модуле упругости, исключая “мягкие” породы типа угля, для которых отклонение трещины от плоскости инициатора достаточно существенно, чтобы его учитывать при проведении работ. В ненагруженной среде влияние рассматриваемых параметров более заметно, но в целом не столь значительно, как глубины инициатора (рис. 5). Изменение критической энергии G_c в исследованном диапазоне значений (44–226 Н/м) на искривление трещин практически не сказывается.

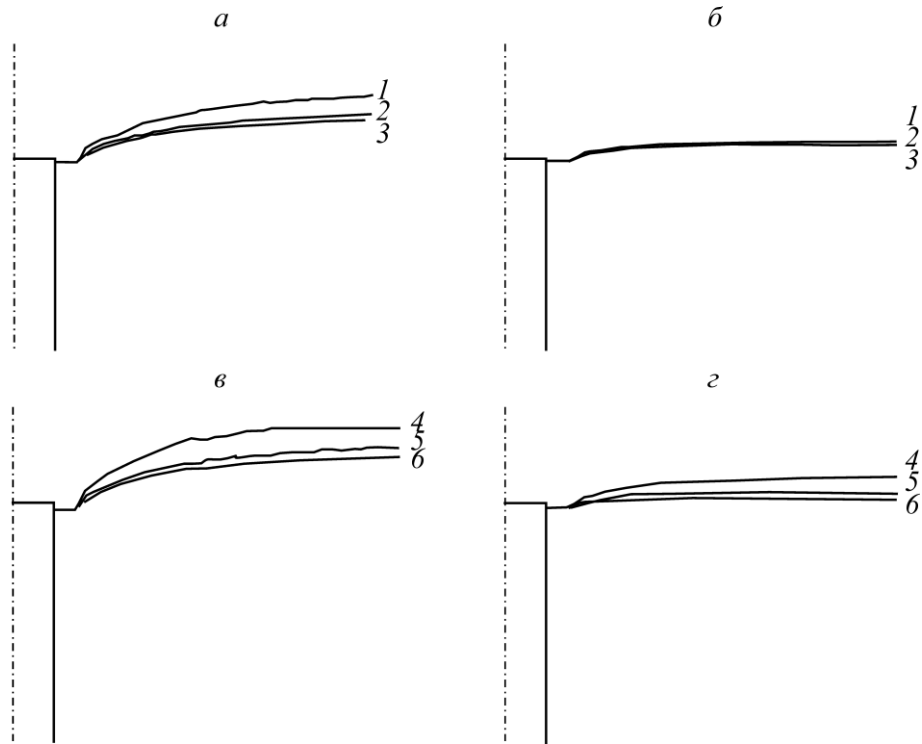


Рис. 8. Траектории разрывов в осевом сечении скважины при различных значениях критического напряжения (прочности на растяжение) и модуля упругости среды при $H = 2r$ и $l = r/2$: а, в — ненагруженная среда $S = 0$; б, г — гидростатическое сжатие $S = 2.5$ МПа; 1 — $\sigma_c = 1$ МПа, $E = 3.5$ ГПа; 2 — $\sigma_c = 8$ МПа, $E = 3.5$ ГПа; 3 — $\sigma_c = 14$ МПа, $E = 3.5$ ГПа; 4 — $\sigma_c = 2$ МПа, $E = 3.5$ ГПа; 5 — $\sigma_c = 2$ МПа, $E = 8$ ГПа; 6 — $\sigma_c = 2$ МПа, $E = 50$ ГПа

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ЗАБОЯ

В реальных условиях форма забоя скважины зависит от бурового инструмента и отличается от плоской. Из-за сужения к концу скважины создать инициирующую щель непосредственно на торце проблематично. Уменьшает ли это отклонение трещины от плоскости инициатора, как можно было бы ожидать из графиков, приведенных на рис. 6? Для ответа на этот вопрос было выполнено численное моделирование ориентированного гидроразрыва с щелевым инициатором на торце скважин с полусферическим забоем. На рис. 9 приведены примеры расчетов формы трещин в нагруженном угле ($S = 2.5$ МПа), когда щелевой инициатор глубиной $l = r/2$ расположен на торце скважин с плоским и полусферическим забоями.

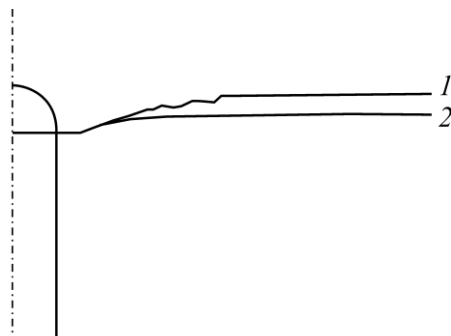


Рис. 9. Траектории разрывов в осевом сечении скважины в зависимости от формы забоя скважины (среда — уголь, $S = 2.5$ МПа, $H = 2r$ и $l = r/2$): 1 — полусферический забой; 2 — плоский забой

Сравнение графиков рис. 9 между собой свидетельствует о том, что, хотя при полусферическом забое щель удалена от конца скважины на расстояние r , отклонение трещины больше, чем в случае плоского забоя (удаление равно 0). Таким образом, результаты расчетов с плоским забоем можно рассматривать в качестве нижней оценки искривления траектории трещин в реальных скважинах.

В случае неглубоких щелей ($l < 0.1r$), особенно в ненагруженных породах, возможно инициирование трещины на поверхности самого забоя. На рис. 10 приведены результаты 3D-моделирования гидроразрыва в скважине без щели при разной длине интервала разрыва H .

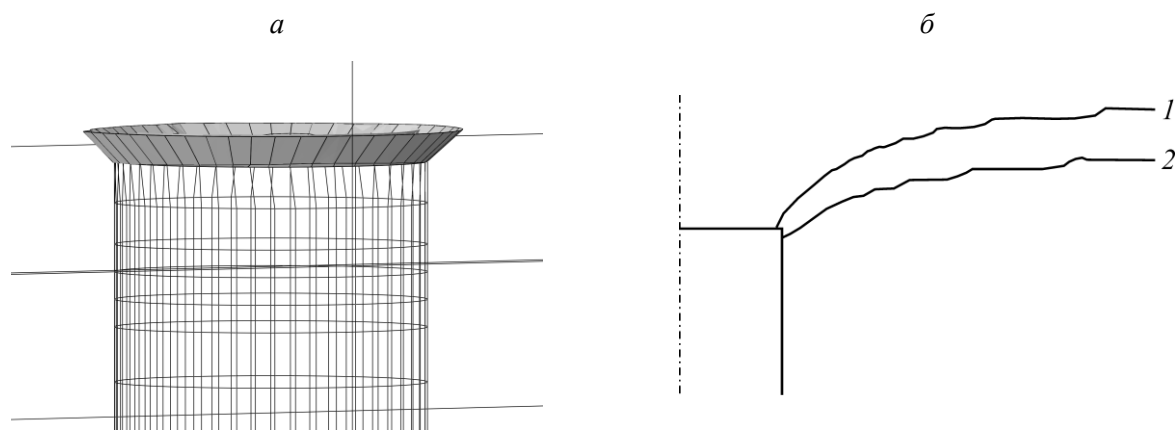


Рис. 10. Разрыв ненагруженного углеподобного материала без щелевого инициатора — объемный вид (а) и траектории образующихся трещин (б) в зависимости от длины интервала разрыва $H = 2r$ (1); $4r$ (2)

В ходе численных экспериментов установлено, что при длине интервала разрыва H , превышающей $2\pi r$, трещина формируется вблизи плоского торца на боковой поверхности скважины, а при $H < 2\pi r$ — на поверхности торца. Переход к полусферическому забоем повышает вероятность торцевого развития трещины.

ДАВЛЕНИЕ РАЗРЫВА

В ряде работ с использованием ориентированного гидроразрыва форма образующихся трещин не имеет особого значения, а щелевой инициатор применяют преимущественно для снижения давления разрыва крепких монолитных пород, что позволяет задействовать менее сложное и дорогое насосное оборудование. Очевидно, что увеличение глубины щели, ее приближение к торцу скважины, большая сжимаемость породы и меньшая ее прочность снижают давление разрыва. Интерес представляет соотношение влияния отдельных факторов. Расчетные значения давления разрыва в зависимости от параметров инициатора и свойств среды, полученные в ходе проведенных исследований, даны в таблице.

На примере мягкого углеподобного материала малой прочности ($E = 1$ ГПа, $\sigma_c = 1$ МПа) видно, что в отсутствии внешнего сжатия увеличение глубины щелевого инициатора с $0.25r$ до $2r$ снижает давление разрыва в 2.4 раза, а в условиях гидростатического сжатия 2.5 МПа — только в 1.6 раза. При более высоком горном давлении эффект от повышения размеров щели будет еще ниже.

Если кольцевой вырез создавать не на торце, а на удалении от него в 1–2 диаметра скважины, то давление разрыва ненагруженной углеподобной среды возрастает в 1.9 раза, а нагруженной ($S = 2.5$ МПа) — в 1.4 раза. Таким образом, расстояние между инициатором и торцом скважины в сравнении с глубиной щели оказывает меньшее влияние. В малопрочных породах

это не играет особой роли, и для работы в них вполне достаточно щелеобразователя простой конструкции с глубиной реза, равной r . В плотных монолитных песчаниках, встречающихся в труднообрушаемой кровле угольных пластов, давление разрыва может достигать очень высоких значений даже на небольших глубинах залегания и в частично разгруженных зонах (для указанных в таблице параметров — до 61 МПа). В этом случае необходимо увеличивать глубину реза и/или размещать инициирующую щель ближе к забою.

Расчетные значения давления разрыва P в зависимости от параметров инициатора и свойств среды при $r=0.05$ м, $H=0.5$ м

Параметры модели				Давление разрыва, МПа	
Щелевой инициатор		Среда		без сжатия $S=0$	при сжатии $S=2.5$ МПа
Расстояние до забоя h/r	Глубина l/r	E , ГПа	σ_c , МПа		
$P(l)$					
0	0.25	1	1	7.0	24.5
0	0.50	1	1	5.0	22.5
0	1.00	1	1	4.6	20.7
0	2.00	1	1	2.9	15.3
$P(h)$					
0.25	0.50	1	1	7.0	24.8
0.5	0.50	1	1	7.2	26.0
1	0.50	1	1	8.6	29.9
2	0.50	1	1	9.3	30.3
4	0.50	1	1	9.7	31.2
Давление разрыва угля, алевролита, песчаника					
0	0.50	3	1	5.1	22.6
0	0.50	8	8	—	32.0
0	0.50	30	14	—	61.0
$P(\sigma_c)$					
0	0.50	3	8	14.0	—
0	0.50	3	14	17.0	—
$P(E)$					
0	0.50	8	1	6.1	23.7
0	0.50	30	1	13.4	39.5

Реализовать обе стратегии, например создать механический щелеобразователь с резкой на торце скважины ($h=0$) крепкой породы на глубину более $1.5r$, технически сложно и вряд ли целесообразно. Иногда достаточно приблизить инициатор к забою, ограничившись глубиной реза, равной радиусу скважины. Пусть, например, имеется щелеобразователь для работы в скважинах диаметром 76 мм с реалистичными значениями параметров $l=r=38$ мм и $h=2r=76$ мм, который не обеспечивает требуемое давление разрыва пород в конкретных горно-геологических условиях. Расчеты показывают, что доработка устройства с увеличением глубины реза до 57 мм (в полтора раза) позволит снизить давление разрыва не более чем в 1.22 раза. Если уменьшить расстояние между инициатором и забоем с 76 до 10 мм, эффект будет более значительным — в 1.25 раза.

При отделении блоков гранита и мрамора в карьерах, разрушении негабаритов при добыче камня, когда требуются создавать разрывы плоской формы, щелевой инициатор необходимо размещать на удалении 2–4 радиуса скважины от ее забоя. Отметим разнонаправленный характер искривлений трещины, вносимых забоем скважины и свободной поверхностью отделяемого блока. Если торец скважины отклоняет трещину вглубь массива, то свободная поверхность — в противоположную сторону, к себе [10, 11]. Интерес представляет моделирование разрыва при совместном действии обоих факторов, определение условий их взаимной компенсации.

Полученные результаты позволяют оптимизировать параметры технических средств и технологические режимы ориентированного гидроразрыва при решении различных задач подземной и открытой разработки твердых полезных ископаемых.

В заключение отметим, что методические и программные решения, разработанные в ходе выполнения исследований, могут моделировать разрывы с щелевым инициатором в усложненных условиях, включая пороупругое поведение пород, анизотропию их прочностных свойств, неоднородное напряженное состояние, повышенную вязкость рабочей жидкости, ее утечки в породный массив.

ВЫВОДЫ

Размещение щелевого инициатора у торца скважины приводит к существенному отклонению трещины гидроразрыва в сторону забоя. На начальном участке она развивается под значительным углом к плоскости щели, постепенно выполаживаясь и приобретая форму сильно развернутого конуса. В углеподобном материале угол отклонения трещины составляет 13–33° при глубине щели, равной соответственно радиусу скважины и его десятой доле.

По результатам исследования отдельных факторов установлено, что отклонение трещины от плоскости инициатора увеличивается с уменьшением глубины щели. По мере удаления инициатора от забоя траектория разрыва становится все более плоской и, начиная с расстояния в радиус скважины, влиянием торца можно пренебречь.

Прочность нагруженных пород мало влияет на траекторию разрыва, как и модуль упругости, исключая “мягкие” породы типа угля, для которых отклонение трещины от плоскости инициатора достаточно существенно, чтобы его учитывать при проведении работ.

В разгруженной породе при равных значениях параметров искривление трещины больше, чем в сжатых. Для неглубоких щелей (глубиной менее десятой доли радиуса скважины) возможно инициирование разрыва на поверхности торца. При забое полусферической формы искривление траектории трещины больше, чем при плоской. Повышается вероятность торцевого развития трещины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шилова Т. В., Сердюков С. В. Защита действующих дегазационных скважин от поступления воздуха из горных выработок через вмещающие породы // ФТПРПИ. — 2015. — № 5. — С. 179–186.
2. Панов А. В., Скулкин А. А., Цибизов Л. В., Родин Р. И. Определение компонент природного поля напряжения по данным измерительного гидроразрыва // Интерэкспо Гео-Сибирь. — 2015. — Т. 2. — № 3. — С. 186–190.
3. Чернов О. И., Гребенник О. И. Направленное воздействие на монолитную труднообрушающуюся кровлю в шахтах / Механика горных пород и механизированные крепи. — Новосибирск: Наука, 1985. — 254 с.

4. **Темиряева О. А.** Повышение надежности работы пакерных уплотнительных элементов на основе результатов лабораторных испытаний // Вестн. КузГТУ. — 2021. — № 2. — С. 74–82.
5. **Sukumar N. and Prévost J. H.** Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part I: Computer implementation, *Int. J. Solids and Structures*, 2003, Vol. 40, No. 26. — P. 7513–7537.
6. **Азаров А. В., Курленя М. В., Сердюков С. В.** Программный комплекс для моделирования гидравлического разрыва пласта при добыче твердых полезных ископаемых // ФТПРПИ. — 2020. — № 5. — С. 206–214.
7. **Ortiz M. and Pandolfi A.** Finite deformation irreversible cohesive elements for three dimensional crack propagation analysis, *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 1999, Vol. 44, No. 9. — P. 1267–1282.
8. **Irwin G. R.** Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, *SPIE Mile-stone Series*, 1997, Vol. 137. — P. 167–170.
9. **Erdogan F. and Sih G. C.** On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear, *J. Basic Eng.*, 1963., Vol. 85, No. 4. — P. 519–525.
10. **Шер Е. Н., Михайлов А. М.** Моделирование роста осесимметричных трещин при взрыве и гидродоразрыве вблизи свободной поверхности // ФТПРПИ. — 2008. — № 5. — С. 53–61.
11. **Колыхалов И. В.** Физическое моделирование развития осесимметричных трещин при флюидоразрыве упругих сред пластическим материалом // *Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук*. — 2017. — Т. 4. — № 1. — С. 113–118.

Поступила в редакцию 11/X 2021

После доработки 18/X 2021

Принята к публикации 20/XI 2021