

УДК 517.95

## ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ВЫСОКОЭФФЕКТИВНЫХ ТЕПЛОВЫХ КОНЦЕНТРАТОРОВ

Г. В. Алексеев, В. А. Левин\*, Д. А. Терешко

Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041 Владивосток, Россия

\* Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, 690041 Владивосток, Россия

E-mails: alekseev@iam.dvo.ru, levin@iacp.dvo.ru, ter@iam.dvo.ru

Рассматриваются обратные задачи проектирования специальных оболочек, служащих для концентрирования потоков тепла. С помощью оптимизационного метода и геометрической дискретизации указанные задачи сводятся к конечномерным экстремальным задачам, роль управляющих параметров в которых играют коэффициенты теплопроводности секторов оболочки. Выбранное множество управляющих параметров позволяет получить тепловые концентраторы, которые просты в реализации и обладают наибольшей эффективностью в рассматриваемом классе устройств.

**Ключевые слова:** концентраторы потока тепла, задачи проектирования, численная оптимизация.

DOI: 10.15372/PMTF20210413

В последнее время большое внимание уделяется теоретическому и численному исследованию задач проектирования специальных оболочек, служащих для управления тепловыми потоками в сплошных средах. В первых работах, посвященных данной теме, были представлены точные решения, полученные с помощью метода координатных преобразований, используемого при решении задач электромагнетизма [1]. Однако у этих точных решений имеется существенный недостаток: они описывают параметры сред, которые невозможно реализовать на практике [2, 3]. Поэтому для решения указанных задач проектирования разрабатываются другие подходы, направленные на получение приближенных решений, допускающих практическую реализацию. Среди этих подходов особую роль играют оптимизационные методы, которые позволяют получать максимально эффективные устройства, учитывающие практические ограничения [4–10].

Задачи управления потоками тепла с помощью специальных оболочек имеют большое количество приложений. Первые работы в этой области были посвящены проблеме тепловой маскировки (см., например, [2, 3, 5–9]), связанной с подавлением возмущений поля температуры вне оболочки. Данные возмущения являются очевидным признаком наличия в рассматриваемой области инородного тела, даже если подобласть, в которой находится тело, недоступна для наблюдений.

Другим важным применением тепловых оболочек является концентрирование потока тепла в подобласти, ограниченной оболочкой [4, 6, 9–14]. При этом часто требуется,

чтобы полученная оболочка также обладала маскировочными свойствами. Один из подходов к проектированию тепловых концентраторов основан на получении точных решений, которые затем существенно упрощаются, для того чтобы их можно было реализовать на практике (см., например, [11–14]). Указанные упрощения значительно снижают концентрационную и маскировочную эффективность оболочек. Кроме того, точные решения можно получить только для наиболее простых постановок, что накладывает существенные ограничения на область применения данного метода. В другом подходе используются методы топологической оптимизации [4, 6, 9]. В рамках данного подхода находятся значения переменного коэффициента теплопроводности в большом количестве точек, вследствие чего увеличиваются вычислительные затраты и усложняется структура полученных тепловых концентраторов, поэтому их трудно реализовать на практике.

Целью настоящей работы является развитие простого и эффективного метода решения задач проектирования концентраторов потоков тепла, основанного на предложенном в [10] оптимизационном подходе. Особенностью данного подхода является его универсальность вследствие большого выбора минимизируемых функционалов качества, адекватно описывающих широкий спектр прикладных задач. Малые вычислительные затраты при использовании данного метода обусловлены малым количеством управляющих параметров. Проблема практической реализуемости спроектированных концентраторов решена путем выбора множества управляющих параметров. Анализ результатов вычислительных экспериментов показывает, что предложенный подход позволяет проектировать концентраторы потока тепла, обладающие наибольшей эффективностью в рассматриваемом классе устройств и простотой технической реализации.

**1. Постановка прямой задачи.** Рассмотрим прямую задачу теплопереноса в прямоугольной области  $D = \{(x, y): -x_0 < x < x_0, -y_0 < y < y_0\}$  (рис. 1). Будем полагать, что фоновое (т. е. внешне приложенное) поле  $T^b$  создается двумя нагретыми до разных температур  $T_1$  и  $T_2$  вертикальными пластинами  $x = \pm x_0$ , тогда как нижняя и верхняя границы являются теплоизолированными. Предположим также, что внутри области  $D$  находится оболочка  $(\Omega, k)$ , где  $\Omega$  — область, представляющая собой кольцо  $\{a < |\mathbf{x}| < b\}$  с границами  $\Gamma_i$  и  $\Gamma_e$ ;  $k$  — коэффициент теплопроводности неоднородной среды, заполняющей  $\Omega$ . Будем полагать, что внутренняя подобласть  $\Omega_i: |\mathbf{x}| < a$  и внешняя подобласть  $\Omega_e: |\mathbf{x}| > b$  области  $\Omega$  заполнены однородной средой с коэффициентом теплопроводности  $k_b$ . В этом

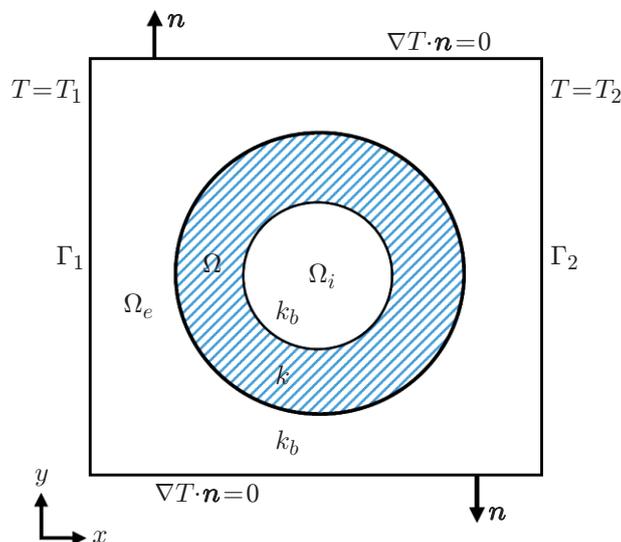


Рис. 1. Геометрия задачи

случае прямая задача теплопереноса заключается в нахождении тройки функций  $T_i$  в  $\Omega_i$ ,  $T$  в  $\Omega$  и  $T_e$  в  $\Omega_e$ , удовлетворяющих уравнениям

$$k_b \Delta T_i = 0 \quad \text{в } \Omega_i, \quad \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad k_b \Delta T_e = 0 \quad \text{в } \Omega_e, \quad (1)$$

граничным условиям

$$T|_{x=-x_0} = T_1, \quad T|_{x=x_0} = T_2, \quad \frac{\partial T}{\partial y}|_{y=\pm y_0} = 0 \quad (2)$$

и условиям сопряжения на границах  $\Gamma_i$  и  $\Gamma_e$  слоя  $\Omega$ , имеющим вид

$$T_i = T, \quad k_b \frac{\partial T_i}{\partial n} = k \frac{\partial T}{\partial n} \quad \text{на } \Gamma_i, \quad T_e = T, \quad k_b \frac{\partial T_e}{\partial n} = k \frac{\partial T}{\partial n} \quad \text{на } \Gamma_e. \quad (3)$$

**2. Формулировка экстремальных задач.** Будем полагать, что заданный в  $\Omega$  коэффициент теплопроводности  $k$  является четной относительно обеих переменных  $x$  и  $y$  функцией в  $\Omega$  и область  $\Omega$  состоит из  $4M$  одинаковых секторов  $\Omega_j$ , заполненных однородными изотропными материалами ( $M$  — число секторов, расположенных в первой четверти  $\Omega^*$ ). С учетом указанных предположений сужение  $k^*$  коэффициента теплопроводности  $k$  на  $\Omega^*$  можно представить в виде

$$k^*(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M k_j \chi_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega^*. \quad (4)$$

Здесь  $\chi_j(\mathbf{x})$  — характеристическая функция сектора  $\Omega_j$  в первой четверти  $\Omega^*$ , такая что  $\chi_j(\mathbf{x}) = 1$  внутри  $\Omega_j$  и  $\chi_j(\mathbf{x}) = 0$  вне  $\Omega_j$ ;  $k_j$  — неизвестный коэффициент теплопроводности среды, заполняющей область  $\Omega_j$ ;  $j = 1, 2, \dots, M$ . В результате рассматриваемые задачи концентрирования сводятся к нахождению  $M$  неизвестных значений  $k_j$  путем решения соответствующих экстремальных задач.

Для того чтобы сформулировать данные задачи, введем  $M$ -мерный вектор  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_M)$  и определим множество управлений  $K$  по формуле

$$K = \{\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_M): k_{\min} \leq k_j \leq k_{\max}, \quad j = 1, \dots, M\}$$

( $k_{\min}, k_{\max}$  — положительные константы, представляющие собой коэффициенты теплопроводности некоторых материалов).

Обозначим через  $T[\mathbf{k}]$  решение задачи (1)–(3), соответствующее коэффициенту теплопроводности  $k$  в  $\Omega$ , сужение  $k^*$  которого в области  $\Omega^*$  определяется вектором  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_M)$  с использованием формулы (4). Как и в [10], введем функционалы

$$J_e(\mathbf{k}) = \frac{\|T[\mathbf{k}] - T^b\|_{L^2(\Omega_e)}}{\|T^b\|_{L^2(\Omega_e)}}, \quad J_i(\mathbf{k}) = \frac{a \|\nabla T[\mathbf{k}]\|_{L^2(\Omega_i)}}{b \|\nabla T^b\|_{L^2(\Omega_i)}}. \quad (5)$$

Величину  $J_i(\mathbf{k})$  можно рассматривать в качестве меры концентрационной эффективности оболочки  $(\Omega, \mathbf{k})$ . Чем больше значение  $J_i(\mathbf{k})$ , тем больше концентрационная эффективность. В то же время величина  $J_e$  является мерой возмущения фонового поля  $T^b$  во внешней подобласти  $\Omega_e$ . Чем меньше значение  $J_e(\mathbf{k})$ , тем существеннее внешний маскировочный эффект [5].

Задача концентрирования потока тепла в  $\Omega_i$  сводится к нахождению вектора  $\mathbf{k}^{opt} \in K$ , максимизирующего функционал  $J_i(\mathbf{k})$ . Последняя задача, в свою очередь, эквивалентна следующей задаче минимизации:

$$-J_i(\mathbf{k}) \rightarrow \min, \quad \mathbf{k} \in K. \quad (6)$$

Задача (6) посвящена проектированию устройства, имеющего максимальную концентрационную эффективность на множестве  $K$ . Однако ее решение  $\mathbf{k}^{opt}$  не обязательно обладает маскировочным эффектом. В силу этого, кроме (6) будем рассматривать более общую задачу

$$J_\alpha(\mathbf{k}) = \alpha J_e(\mathbf{k}) - J_i(\mathbf{k}) \rightarrow \min, \quad \mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_M) \in K, \quad (7)$$

содержащую как  $J_i(\mathbf{k})$ , так и функционал  $J_e(\mathbf{k})$  с неотрицательным коэффициентом  $\alpha$ , определяющим относительный вклад каждого слагаемого в общий функционал. При  $\alpha = 0$  получаем задачу (6). Для решения задач (6), (7) используем метод роя частиц [15] по схеме, предложенной в [5, 7] для решения задач тепловой маскировки.

**3. Анализ результатов вычислительных экспериментов.** При проведении вычислительных экспериментов по решению задач (6), (7), как и в [6], будем полагать, что область  $D$ , оболочка  $\Omega$  и граничные условия для температуры задаются соотношениями  $x_0 = 4,5$  см,  $y_0 = 9$  см,  $a = 1$  см,  $b = 3,25$  см,  $T_1 = 321,25$  К,  $T_2 = 283,15$  К. При численном решении задач (6), (7) методом роя частиц многократно решается задача (1)–(3), для чего используется пакет программ FreeFEM.

В первом тесте численно решается задача (6) при следующих значениях параметров  $k_b, k_{\min}, k_{\max}$ :

$$k_b = 8k_0, \quad k_{\min} = 0,15k_0, \quad k_{\max} = 92k_0, \quad k_{\max}/k_{\min} = 613 \quad (8)$$

( $k_0 = 1$  Вт/(м·К)), соответствующих кварцу, дереву и железу. Количество управлений  $M$  было четным и изменялось от 4 до 20, максимальное число секторов в оболочке было равно 80.

Результаты оптимизационного анализа с использованием разработанного алгоритма показывают, что для всех значений  $M$  оптимальные значения  $k_j^{opt}$  управлений  $k_j$  принимают одно из значений  $k_{\min}$  или  $k_{\max}$ , причем выполняются следующие соотношения:

$$k_1^{opt} = k_2^{opt} = \dots = k_p^{opt} = k_{\max}, \quad k_{p+1}^{opt} = \dots = k_M^{opt} = k_{\min} \quad (9)$$

( $p$  — некоторый промежуточный между 1 и  $M$  номер, зависящий от  $M$  и параметров задачи). Из соотношений (9) следует, что оптимальное решение  $\mathbf{k}^{opt} \equiv (k_1^{opt}, k_2^{opt}, \dots, k_M^{opt})$  подчиняется принципу bang-bang, согласно которому каждая компонента  $k_j^{opt}$  принимает одно из двух значений  $k_{\min}$  или  $k_{\max}$ , являющихся границами множества  $K$ . Из (9) также следует, что искомая симметричная оболочка  $(\Omega, \mathbf{k}^{opt})$  состоит из четырех секторов, приведенных на рис. 2 при  $M = 10, p = 6$ . Аналогичные структуры оптимальных концентраторов, полученных с помощью метода топологической оптимизации, представлены в работах [6, 9]. Следует отметить, что предложенный в настоящей работе метод проектирования требует меньших вычислительных затрат, а полученные с его помощью концентраторы значительно проще реализовать на практике.

На рис. 2 видно, что структура оптимальных концентраторов определяется значением угла  $\varphi = p\pi/(2M)$  раздела двух материалов в первой четверти. Вычисленные значения  $p, \varphi, J_i(\mathbf{k}^{opt})$  и  $J_e(\mathbf{k}^{opt})$  для различных значений  $M$  представлены в табл. 1. Сравнение значений  $J_i(\mathbf{k}^{opt})$  в табл. 1 показывает, что оптимальное значение угла раздела материалов  $\varphi$  в данном случае приблизительно равно  $59^\circ$ .

Кроме того, в последнем столбце табл. 1 приведены значения величины

$$C = \frac{|T^{opt}(a, 0) - T^{opt}(-a, 0)|}{|T^{opt}(b, 0) - T^{opt}(-b, 0)|},$$

которая использовалась в [4, 11, 12] в качестве меры эффективности проектируемых концентраторов. Заметим, что в настоящей работе в качестве меры эффективности оболочки  $(\Omega, \mathbf{k})$  используется значение  $J_i(\mathbf{k})$ , определенное в (5). В общем случае величины  $C$

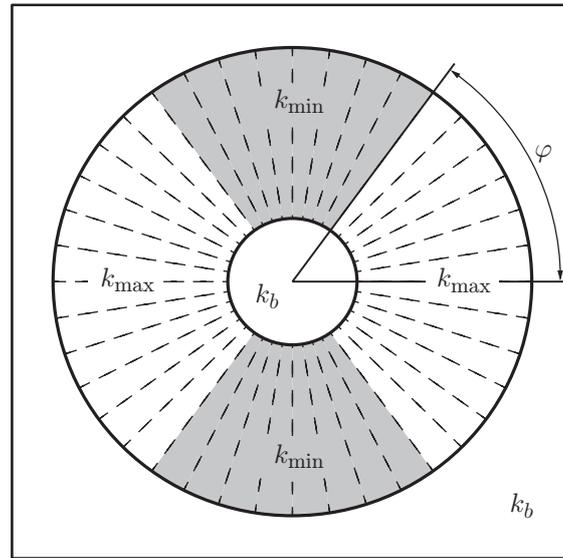


Рис. 2. Структура оптимального концентратора при  $\alpha = 0$  ( $M = 10$ )

и  $J_i(\mathbf{k}^{opt})$  не совпадают, вследствие того что  $J_i(\mathbf{k})$  является по определению точной характеристикой концентрационной эффективности оболочки  $(\Omega, \mathbf{k})$ , тогда как  $C$  лишь приближенно описывает концентрационные свойства оболочки  $(\Omega, \mathbf{k})$ . Спроектированные оптимальные концентраторы имеют большие значения величины  $C$ , которая всегда ограничена сверху единицей.

Второй тест выполнялся при следующих значениях параметров:

$$k_b = 8k_0, \quad k_{min} = 0,15k_0, \quad k_{max} = 236k_0, \quad k_{max}/k_{min} = 1573, \quad (10)$$

описывающих теплопроводность кварца, дерева и алюминия. Значения  $p$ ,  $\varphi$ ,  $J_i(\mathbf{k}^{opt})$ ,  $J_e(\mathbf{k}^{opt})$  и  $C$ , полученные для этих параметров, представлены в табл. 2.

Сравнение данных, приведенных в табл. 1, 2, показывает, что при увеличении значения  $k_{max}/k_{min}$  (с 613 до 1573) увеличиваются значения  $J_i(\mathbf{k}^{opt})$  при всех  $M$  и, следовательно, увеличивается эффективность проектируемого концентратора. Однако внешний маскировочный эффект всех спроектированных оболочек, описываемый значением  $J_e(\mathbf{k}^{opt}) \approx 10^{-3}$ , проявляется незначительно. На рис. 3 показано поле температуры для оптимального концентратора, соответствующего значениям параметров (10) при  $M = 16$ . Хорошо видны возмущения фонового поля во внешней подобласти  $\Omega_e$ , свидетельствующие о наличии инородного тела в виде оболочки  $(\Omega, \mathbf{k}^{opt})$  в области  $D$ . Для минимизации этих возмущений необходимо, чтобы концентратор потока тепла обладал также свойством маскировки.

Для обеспечения как концентрационного, так и маскировочного эффектов у проектируемой оболочки рассмотрим результаты, полученные при численном решении общей задачи (7) при  $\alpha = 10^3$ . Установлено, что при выполнении дополнительного условия  $k_{min}k_{max} \leq k_b^2$  для параметров  $k_{min}$ ,  $k_{max}$ ,  $k_b$  оптимальное решение по-прежнему удовлетворяет принципу bang-bang. Но в отличие от (9) для решения  $\mathbf{k}^{opt} \equiv (k_1^{opt}, k_2^{opt}, \dots, k_M^{opt})$  задачи (7) выполняются соотношения

$$k_1^{opt} = k_3^{opt} = \dots = k_{M-1}^{opt} = k_{max}, \quad k_2^{opt} = k_4^{opt} = \dots = k_M^{opt} = k_{min},$$

соответствующие технологии так называемого чередующегося дизайна [7]. Структура оптимального концентратора  $(\Omega, \mathbf{k}^{opt})$  показана на рис. 4. Заметим, что оптимальные концентраторы с эффектом маскировки, полученные с помощью методов топологической оптимизации, имеют более сложную структуру (см., например, [9]), которую значительно

Таблица 1

Результаты расчетов при  $\alpha = 0$ ,  $k_b = 8k_0$ ,  $k_{\min} = 0,15k_0$ ,  $k_{\max} = 92k_0$

$M$	$p$	$\varphi$	$J_i(\mathbf{k}^{opt})$	$J_e(\mathbf{k}^{opt}) \cdot 10^3$	$C$
4	3	$3\pi/8 \approx 1,178$ ( $67,5^\circ$ )	0,894	2,04	0,871
8	5	$5\pi/16 \approx 0,982$ ( $56,3^\circ$ )	0,901	1,73	0,878
12	8	$8\pi/24 \approx 1,047$ ( $60^\circ$ )	0,902	1,81	0,879
16	11	$11\pi/32 \approx 1,079$ ( $61,9^\circ$ )	0,901	1,86	0,877
20	13	$13\pi/40 \approx 1,021$ ( $58,5^\circ$ )	0,902	1,78	0,881

Таблица 2

Результаты расчетов при  $\alpha = 0$ ,  $k_b = 8k_0$ ,  $k_{\min} = 0,15k_0$ ,  $k_{\max} = 236k_0$

$M$	$p$	$\varphi$	$J_i(\mathbf{k}^{opt})$	$J_e(\mathbf{k}^{opt}) \cdot 10^3$	$C$
4	3	$3\pi/8 \approx 1,178$ ( $67,5^\circ$ )	0,945	2,23	0,944
8	5	$5\pi/16 \approx 0,982$ ( $56,3^\circ$ )	0,951	1,79	0,950
12	8	$8\pi/24 \approx 1,047$ ( $60^\circ$ )	0,952	1,91	0,948
16	11	$11\pi/32 \approx 1,079$ ( $61,9^\circ$ )	0,951	1,97	0,947
20	13	$13\pi/40 \approx 1,021$ ( $58,5^\circ$ )	0,951	1,86	0,949

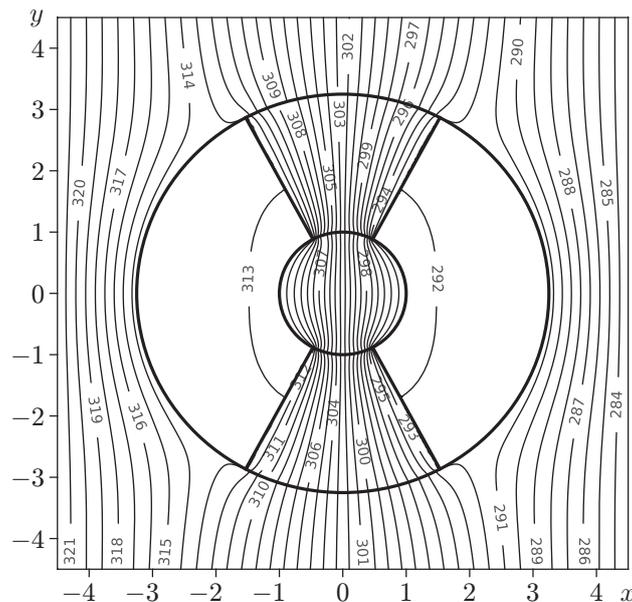


Рис. 3. Поле температуры для оптимального концентратора при  $\alpha = 0$  ( $M = 16$ )

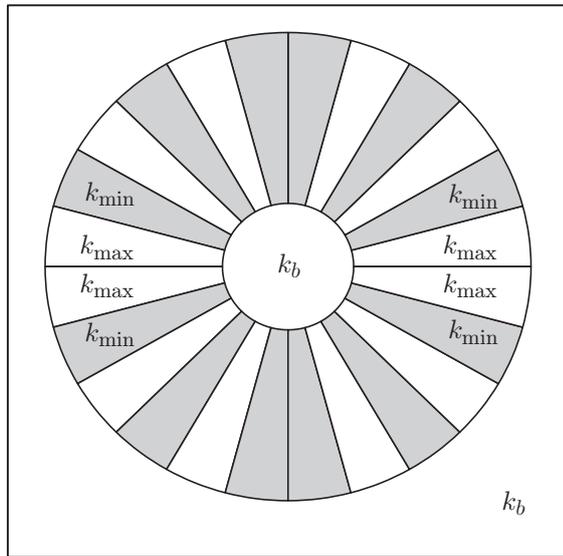


Рис. 4

Рис. 4. Структура оптимального концентратора при  $\alpha = 10^3$  ( $M = 6$ )

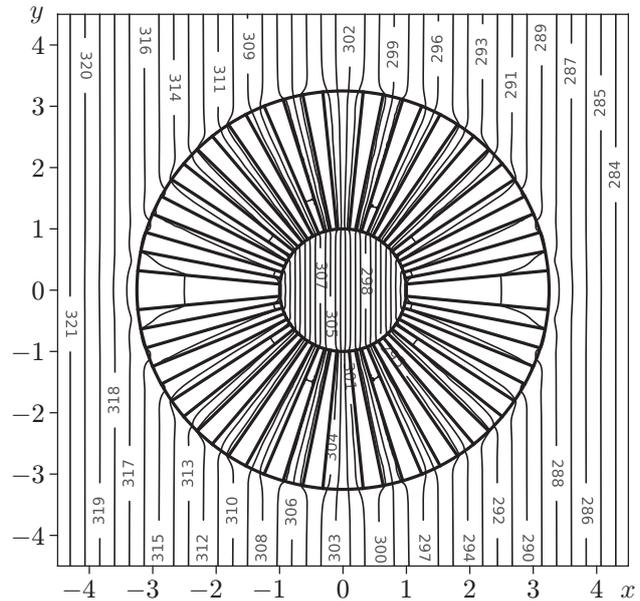


Рис. 5

Рис. 5. Поле температуры для оптимального концентратора при  $\alpha = 10^3$  ( $M = 16$ )

Таблица 3

Результаты расчетов при  $\alpha = 10^3$ ,  
 $k_b = 8k_0$ ,  $k_{min} = 0,15k_0$ ,  $k_{max} = 92k_0$

$M$	$J_i(\mathbf{k}^{opt})$	$J_e(\mathbf{k}^{opt}) \cdot 10^4$	$C$
4	0,839	8,51	0,872
8	0,842	5,02	0,863
12	0,846	4,24	0,859
16	0,848	3,93	0,856
20	0,850	3,87	0,854

Таблица 4

Результаты расчетов при  $\alpha = 10^3$ ,  
 $k_b = 8k_0$ ,  $k_{min} = 0,15k_0$ ,  $k_{max} = 236k_0$

$M$	$J_i(\mathbf{k}^{opt})$	$J_e(\mathbf{k}^{opt}) \cdot 10^4$	$C$
4	0,896	7,49	0,946
8	0,908	3,06	0,942
12	0,915	1,79	0,941
16	0,917	1,21	0,940
20	0,921	0,99	0,939

труднее реализовать на практике. Значения величин  $J_i(\mathbf{k}^{opt})$ ,  $J_e(\mathbf{k}^{opt})$  и  $C$  для наборов параметров (8), (10) представлены в табл. 3, 4 соответственно. Из табл. 3, 4 следует, что с увеличением  $M$  значения  $J_i(\mathbf{k}^{opt})$  увеличиваются, а значения  $J_e(\mathbf{k}^{opt})$  уменьшаются. Таким образом, увеличение числа секторов  $\Omega_j$  приводит к повышению как концентрационной, так и маскировочной эффективностей оболочек, спроектированных по принципу чередующегося дизайна. Сравнение данных табл. 3, 4 показывает, что при увеличении значения  $k_{max}/k_{min}$  увеличиваются концентрационная и маскировочная эффективности. Поле температуры, соответствующее оптимальному концентратору для параметров (10) при  $M = 16$ , показано на рис. 5. Видно, что поле вне оболочки возмущено лишь в малой окрестности внешней границы оболочки, причем при увеличении числа секторов  $\Omega_j$  значительно уменьшается величина этих возмущений. Также можно заметить, что градиент температуры во внутренней подобласти  $\Omega_i$  значительно больше градиента температуры во внешней подобласти  $\Omega_e$ .

Результаты проведенного анализа позволяют сделать следующие выводы. Для построения высокоэффективных концентраторов потока тепла, простых в технической реализации, достаточно использовать лишь два материала с коэффициентами теплопроводности

$k_{\min}$ ,  $k_{\max}$  и большим значением  $k_{\max}/k_{\min}$ . В случае задачи простого концентрирования указанные материалы формируют четыре сектора, которым соответствует оптимальное значение угла  $\varphi$  раздела материалов. Для построения не возмущающего фонового поле концентратора следует использовать технологию чередующегося дизайна с большим числом секторов. Полученные результаты могут использоваться при создании концентраторов тепла нового типа, состоящих из легкодоступных материалов, накапливающих тепловую энергию с высокой эффективностью.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Pendry J. B., Schurig D., Smith D. R.** Controlling electromagnetic fields // *Science*. 2006. V. 312. P. 1780–1782.
2. **Guenneau S., Amra C., Veynante D.** Transformation thermodynamics: cloaking and concentrating heat flux // *Optics Express*. 2012. V. 20. 8207.
3. **Han T., Qiu C.-W.** Transformation Laplacian metamaterials: recent advances in manipulating thermal and dc fields // *J. Optics*. 2016. V. 18. 044003.
4. **Peralta I., Fachinotti V. D., Ciarbonetti A. A.** Optimization-based design of a heat flux concentrator // *Sci. Rep.* 2017. V. 7. 40591.
5. **Алексеев Г. В., Левин В. А., Терешко Д. А.** Оптимизационный анализ задачи тепловой маскировки цилиндрического тела // *Докл. АН*. 2017. Т. 472, № 4. С. 398–402.
6. **Fachinotti V. D., Ciarbonetti A. A., Peralta I., Rintoul I.** Optimization-based design of easy-to-make devices for heat flux manipulation // *Intern. J. Thermal Sci.* 2018. V. 128. P. 38–48.
7. **Alekseev G. V., Tereshko D. A.** Particle swarm optimization-based algorithms for solving inverse problems of designing thermal cloaking and shielding devices // *Intern. J. Heat Mass Transfer*. 2019. V. 135. P. 1269–1277.
8. **Peralta I., Fachinotti V. D., Alvarez Hostos J. C.** A brief review on thermal metamaterials for cloaking and heat flux manipulation // *Adv. Engng Materials*. 2020. V. 22. 1901034.
9. **Fujii G., Akimoto Y.** Cloaking a concentrator in thermal conduction via topology optimization // *Intern. J. Heat Mass Transfer*. 2020. V. 159. 120082.
10. **Алексеев Г. В., Левин В. А., Терешко Д. А.** Проектирование тепловых концентраторов наивысшей эффективности на основе оптимизационного метода // *Докл. РАН. Физика, техн. науки*. 2020. Т. 491. С. 71–74.
11. **Chen F., Lei D. Y.** Experimental realization of extreme heat flux concentration with easy-to-make thermal metamaterials // *Sci. Rep.* 2015. V. 5. 11552.
12. **Xu G., Zhou X., Zhang J.** Bilayer thermal harvesters for concentrating temperature distribution // *Intern. J. Heat Mass Transfer*. 2019. V. 142. 118434.
13. **Li Y., Zhang H., Zhang Z., et al.** A TO-based intelligent thermal concentrator considering thermal protection // *AIP Adv.* 2020. V. 10, N 10. 105214.
14. **Gao Y.** Ellipsoidal thermal concentrator and cloak with transformation media // *Chin. Phys. Lett.* 2021. V. 38, N 2. 020501.
15. **Poli R., Kennedy J., Blackwell T.** Particle swarm optimization: an overview // *Swarm Intel.* 2007. V. 1. P. 33–57.

*Поступила в редакцию 26/IV 2021 г.,  
после доработки — 26/IV 2021 г.  
Принята к публикации 26/IV 2021 г.*