

УДК 539.3

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ ЕЕ ИСТИРАНИЯ

В. Л. Колмогоров, Е. А. Залазинская

Институт машиноведения УрО РАН, 620219 Екатеринбург

Проведено математическое моделирование глубокого проникания абсолютно твердой сферической частицы в идеально пластическую среду в результате удара, определены закон движения частицы и расстояние, пройденное ею. Решена задача для частицы, размеры которой меняются в результате истирания.

Ключевые слова: пластическая среда, проникание, износ сферической частицы, математическая модель.

Исследованию имплантации твердых частиц в пластические материалы посвящено значительное количество работ (см., например, [1–4]). Однако в известных решениях процесс внедрения частиц в пластическое полупространство рассматривался без учета изменения размера частицы в результате ее истирания. В настоящей работе выполнено математическое моделирование процесса глубокого проникания в идеально пластическую среду сферической частицы и решена задача об износе частицы. Использованы вариационный принцип и феноменологическая теория разрушения, изложенные в [5]. Вход частицы в пластическую среду сопровождается образованием воронки, при последующем движении частицы входное отверстие закрывается. При истирании частицы ее масса остается в пластической среде, при этом суммарный объем частицы и среды не меняется. Рассматривалось движение сферической частицы на стадии процесса, когда частица достаточно глубоко проникла в пластическую среду. При решении краевой задачи предполагалось, что вокруг частицы образуется область пластического течения, которая по мере внедрения частицы в пластическую среду также принимает сферическую форму (рис. 1). Допущение о сферичности области течения вокруг частицы принято в силу того, что распространение возмущений за границы пластической области не может быть значительным, что подтверждается экспериментами [6–9]. Область течения вокруг частицы перемещается вместе с частицей. Заметим, что размер области пластического течения определяется в результате решения соответствующей вариационной задачи.

Для решения краевой задачи в качестве базового используется принцип виртуальных скоростей и напряжений. При этом интегрирование дифференциальных уравнений краевой задачи механики сплошной среды заменяется эквивалентным решением на виртуальных состояниях вариационного уравнения [10].

При решении краевой задачи предполагается, что движущееся со скоростью $v(t)$ твердое тело и локализованная вокруг него область пластического течения связаны с подвижной сферической системой координат (r, φ, θ) , которая со скоростью v перемещается в

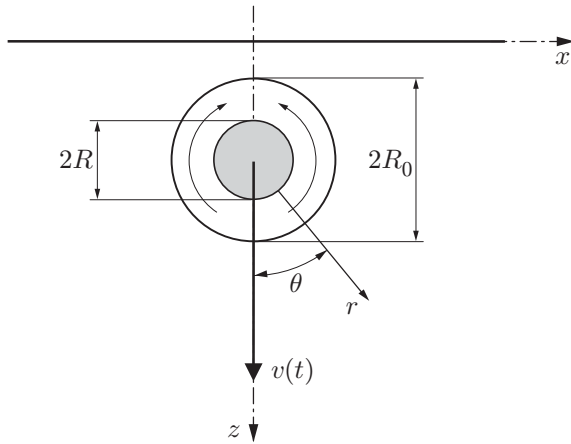


Рис. 1

Рис. 1. Схема движения частицы в пластической среде

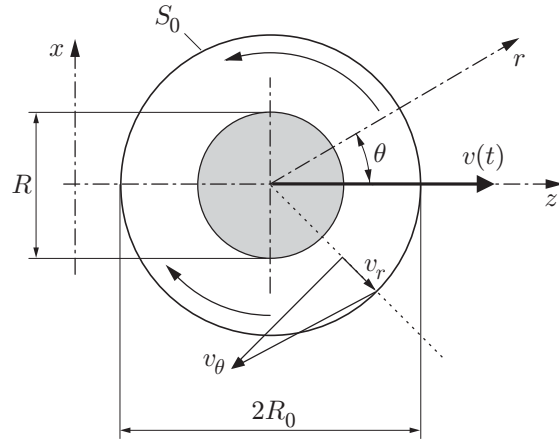


Рис. 2

Рис. 2. Схема обтекания твердой частицы пластической средой

системе отсчета (x, y, z) . Радиус частицы уменьшается в соответствии с принятой моделью износа. Кинематически допустимая схема обтекания твердой сферической частицы пластически деформируемой средой приведена на рис. 2.

Особенностью движения частицы и локализованной вблизи нее области пластического течения является то, что подвижная (в системе отсчета) граница S_0 области пластического течения является поверхностью разрыва касательной компоненты вектора скорости, т. е. поверхностью сильного разрыва (для данной динамической задачи — волной сильного разрыва [11]). Нормальная компонента вектора скорости материальных частиц пластически деформируемой среды при переходе через границу S_0 непрерывна. В области пластического течения среда со всех сторон обтекает твердую сферическую частицу. На передней поверхности частицы $r = R$ ($-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$) касательные напряжения равны пределу текучести среды при сдвиге: $\sigma_{\rho\theta} = \tau_s$. На задней поверхности частицы $r = R$ ($\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$) возможно отслоение среды, поэтому на ней касательные напряжения могут быть равны нулю.

С использованием граничных условий

$$\begin{aligned} v_r|_{r=R_0} &= 0, & v_r|_{r=R} &= v(t) \cos \theta, \\ v_r|_{\theta=\pm\pi/2} &= 0, & v_\theta|_{\theta=0, \theta=\pi} &= 0 \end{aligned}$$

для области пластического течения введем кинематически допустимое поле скоростей

$$v_r = v(t) \frac{1}{\alpha^2 - 1} \left(\alpha^2 \frac{R^2}{r^2} - 1 \right) \cos \theta, \quad v_\theta = v(t) \frac{1}{\alpha^2 - 1} \sin \theta, \quad v_\varphi = 0,$$

где $\alpha = R_0/R$ — варьируемый параметр, зависящий от положения границы пластической зоны.

Поле скоростей твердой частицы в сферической системе координат имеет вид

$$v_r = v(t) \cos \theta, \quad v_\theta = -v(t) \sin \theta, \quad v_\varphi = 0.$$

С учетом того что $v_\varphi = 0$, $v_r \neq v_r(\varphi)$, $v_\theta \neq v_\theta(r, \varphi)$, компоненты вектора ускорения в сферической системе координат записываются следующим образом:

$$w_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r},$$

$$w_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r}, \quad w_\varphi = 0.$$

Скорости деформаций в сферической системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}, & \xi_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}, & \xi_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \operatorname{ctg} \theta \frac{v_\theta}{r}, \\ \xi_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right), & \xi_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right), \\ \xi_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned}$$

Для введенного поля скоростей после вычислений имеем

$$\begin{aligned} \xi_{rr} &= -2v(t)f(r, \alpha) \cos \theta, & \xi_{\theta\theta} &= \xi_{\varphi\varphi} = v(t)f(r, \alpha) \cos \theta, \\ \xi_{r\varphi} &= \xi_{\theta\varphi} = 0, & \xi_{r\theta} &= -(1/2)v(t)f(r, \alpha) \sin \theta, \end{aligned}$$

где $f(r, \alpha) = \alpha^2 R^2 / ((\alpha^2 - 1)r^3)$. В области пластического течения изменения объема среды не происходит:

$$\xi = \xi_{rr} + \xi_{\theta\theta} + \xi_{\varphi\varphi} = 0.$$

Интенсивность скорости деформаций сдвига определяется следующим выражением:

$$H = \sqrt{(2/3)[(\xi_{rr} - \xi_{\theta\theta})^2 + (\xi_{\theta\theta} - \xi_{\varphi\varphi})^2 + (\xi_{\varphi\varphi} - \xi_{rr})^2] + 4(\xi_{r\theta}^2 + \xi_{\theta\varphi}^2 + \xi_{r\varphi}^2)}.$$

Для выбранного поля скоростей

$$\xi_{\theta\theta} = \xi_{\varphi\varphi} = -\xi_{rr}/2, \quad \xi_{r\varphi} = \xi_{\theta\varphi} = 0.$$

Тогда

$$H = 2\sqrt{3\xi_{\theta\theta}^2 + \xi_{r\theta}^2} = v(t)f(r, \alpha)\sqrt{12 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \approx 2\sqrt{3}v(t)f(r, \alpha)|\cos \theta|.$$

Для определения радиуса области пластического течения решалась вариационная задача с использованием вариационного уравнения принципа виртуальных скоростей и напряжений. Учитывая отмеченные выше особенности кинематически допустимого поля скоростей и пренебрегая удельными массовыми силами, имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega_0} \tau_s H' d\Omega + \int_{\Omega_0} \rho_0 w_i v'_i d\Omega + \int_{\Omega_1} \rho_1 w_i v'_i d\Omega + \\ &+ \int_{S_0} \tau_s [\Delta v'_\theta]_{r=R_0} dS_0 + \int_{S_1} \tau_s [\Delta v'_\theta]_{r=R} dS = \sum_{i=1}^5 I_i, \quad (1) \end{aligned}$$

где

$$[\Delta v'_\theta]_{r=R_0} = v(t)R^2 \sin \theta / (R_0^2 - R^2) = v(t) \sin \theta / (\alpha^2 - 1),$$

$$[\Delta v'_\theta]_{r=R} = v(t)R_0^2 \sin \theta / (R_0^2 - R^2) = v(t)\alpha^2 / (\alpha^2 - 1) \sin \theta,$$

$[\Delta v_\theta]$ — скачок касательной компоненты вектора скорости на поверхностях S_0 и S_1 , ограничивающих область пластического течения и твердую сферическую частицу; Ω_0 , Ω_1 — объемы шарового слоя (для присоединенной массы, которая движется вместе с частицей) и частицы.

Компоненты ускорения в функционале не варьируются, поэтому, для того чтобы исключить неопределенность при вычислении интеграла I_2 , они представляются в виде следующих функций:

$$w_r = w_r\left(a_*, \frac{R}{r}, \frac{dv}{dt} \cos \theta\right), \quad w_\theta = w_\theta\left(a_*, \frac{dv}{dt} \sin \theta\right), \quad w_\varphi = 0.$$

Здесь $\alpha_* = R_*/R$ в отличие от $\alpha = R_0/R$ не является варьируемым параметром. Предполагается, что α_* характеризует положение действительной границы области пластического течения.

В результате получены следующие выражения:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_R^{R_0} \tau_s H r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi \approx 4\sqrt{3} \pi \tau_s v(t) R^2 \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \ln \alpha,$$

$$I_2 = \rho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_R^{R_0} w^i v_i r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0 \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \frac{\alpha_*^2}{\alpha_*^2 - 1} \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\alpha_*^2} \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \right] v(t) \frac{dv}{dt} \quad (\alpha_* > 1),$$

$$I_3 = \rho_1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_R^{R_0} w^i v_i r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \rho_1 \frac{4}{3} \pi R^3 v(t) \frac{dv}{dt},$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tau_s [v_\theta] \Big|_{\rho=R_0} R_0^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \pi^2 \tau_s v(t) R^2 \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1},$$

$$I_5 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tau_s [v_\theta] \Big|_{\rho=R} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \pi^2 \tau_s v(t) R^2 \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}.$$

После вычисления интегралов функционал I представляется в виде безразмерной функции варьируемого параметра α :

$$\tilde{I} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \left\{ 4 \ln \alpha + \frac{2}{\sqrt{3}} \pi - \frac{\alpha_*^2}{\alpha_*^2 - 1} \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\alpha_*^2} \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \right] q_0(t) \right\} - q_1(t), \quad (2)$$

где

$$q_0 = -\frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{\rho_0}{\tau_s} R \frac{dv}{dt} \geq 0, \quad q_1 = -\frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{\rho_1}{\tau_s} R \frac{dv}{dt} > 0.$$

Если плотности деформируемой среды ρ_0 и частицы ρ_1 одинаковы, то $q_1 = q_0 = q$.

Функционал \tilde{I} при варьировании α должен принимать минимальное значение. В этом случае выполняется условие $\partial \tilde{I} / \partial \alpha = 0$. Из теорем источника [1] следует, что в состоянии, близком к действительному,

$$\tilde{I}[\alpha_*] = \inf_{q(dv/dt) \geq 0} \tilde{I}(\alpha) \approx 0. \quad (3)$$

Известно также, что в действительном состоянии $\alpha = \alpha_*$.

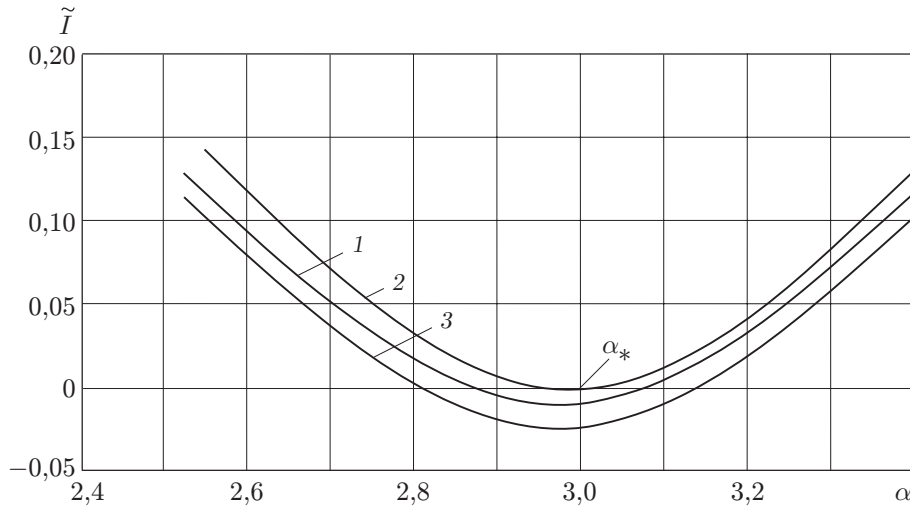


Рис. 3. Результаты решения:

1 — $\alpha_* = 2,8$; 2 — $\alpha_* = 3$; 3 — $\alpha_* = 3,2$

Таким образом, имеем три уравнения для определения трех неизвестных величин, входящих в соотношение (2). Следует отметить, что q_0 и q_1 в (2) являются функциями одного параметра, а именно ускорения $w(t) = dv/dt$.

Полученная система уравнений решается методом последовательных приближений с использованием итерационной процедуры.

Наиболее просто система уравнений решается в случае, когда механические характеристики (предел текучести и плотность) среды и имплантированной частицы совпадают. Тогда функционал (1) принимает вид

$$\tilde{I}(\alpha) = F_1(\alpha)[F_2(\alpha) - F_3(\alpha_*, \alpha)q(t)] - q(t), \quad (4)$$

где

$$F_1(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}, \quad F_2(\alpha) = 4 \ln \alpha + \frac{2}{\sqrt{3}} \pi, \quad F_3(\alpha_*, \alpha) = \frac{\alpha_*^2}{\alpha_*^2 - 1} \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\alpha_*^2} \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \right].$$

При $\alpha = \alpha_*$ (что соответствует действительному состоянию) с учетом (3) можно принять $\tilde{I}(\alpha_*) = 0$. Тогда из (4) следует

$$q(t) \approx q(\alpha_*) = F_2(\alpha_*) / (F_3(\alpha_*, \alpha_*) + 1/F_1(\alpha_*)).$$

Подставив данный результат в (4), получим функционал одного варьируемого параметра

$$\tilde{I}(\alpha) = F_1(\alpha)[F_2(\alpha) - F_3(\alpha_*, \alpha)q(\alpha_*)] - q(\alpha_*).$$

Рассматриваемая вариационная задача имеет решение, удовлетворяющее всем требуемым условиям, что подтверждают результаты вычислений, приведенные на рис. 3. Видно, что из множества кривых $\tilde{I}(\alpha, \alpha_*) = \tilde{I}(\alpha)|_{\alpha_* = \text{const}}$ лишь одна имеет минимум, соответствующий точке $\alpha = \alpha_*$, и при этом $\tilde{I}(\alpha_*, \alpha_*) = 0$.

В случае, когда плотности имплантируемой твердой частицы и среды одинаковы, из полученных результатов следует, что $\alpha_* = R_0/R = 3$ и $q_* = q(\alpha_*) = 5,344$. Таким образом, удельная деформирующая сила, тормозящая движение частицы, в динамической задаче в 1,6 раза меньше силы, необходимой для ее движения с постоянной скоростью.

Зная значения $\alpha_* = R_*/R$ и $q_* = q(\alpha_*)$, из уравнения

$$q_* = -\frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{\rho_1}{\tau_s} R \frac{dv}{dt}$$

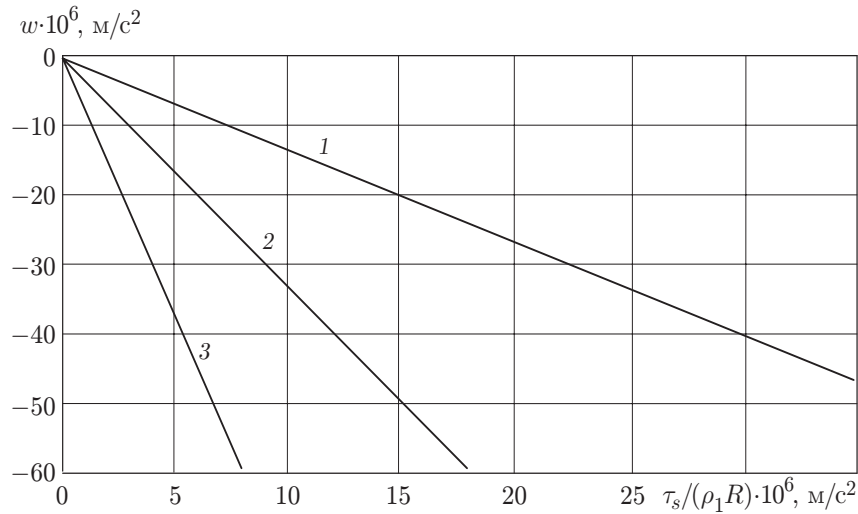


Рис. 4. Результаты решения:
1 — $q_* = 1$; 2 — $q_* = 2,5$; 3 — $q_* = 5,344$

находим соотношение для расчета ускорения твердой частицы

$$w(t) = \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{3\sqrt{3}}{4} q_* \frac{\tau_s}{\rho_1 R}.$$

Результаты расчета показаны на рис. 4. Расчеты выполнены для случая, когда плотности твердой частицы и пластически деформируемой среды одинаковы ($\rho_1 = \rho_0$).

Вычислим перемещение частицы до ее полной остановки, решив уравнение

$$u_z = z_m - z_0 = v_1^2 / (2Q),$$

где $Q = (3\sqrt{3}/4)q_*\tau_s/(\rho_1 R)$, с начальными условиями $\dot{z}(0) = v_1$, $z(0) = z_0$.

Для примера определим расстояние u_z , пройденное твердой частицей радиуса $R = 10^{-3}$ м с начальной скоростью $v_1 = 2000$ м/с в среде с пределом текучести на сдвиг $\tau_s = 300$ МПа при $\rho_1 = \rho_0 = 7800$ кг/м³. В результате решения найдено значение $u_z = 3,74 \cdot 10^{-3}$ м, т. е. $u_z = 3,74R$.

Определим влияние изменения радиуса частицы на пройденное ею расстояние. Если частица не абсолютно твердая, то при движении в сплошной среде она испытывает действие силы трения и подвергается износу. При этом ее масса и размеры уменьшаются. Очевидно, что изменение массы и размеров движущейся частицы может оказать существенное влияние на закон ее движения и пройденное ею расстояние. В связи с этим рассмотрим некоторые существующие модели трения и износа.

Модель контактного взаимодействия трущихся поверхностей в случае трения скольжения предложена в [12], где полагается, что контактные напряжения являются следствием взаимодействия клиновидных выступов шероховатостей трущихся поверхностей. При росте нормальных напряжений и относительном сдвиге поверхностей в соприкосновение приходят новые выступы шероховатости, что приводит к увеличению фактической площади контакта, которая не может превысить некоторой доли площади контактной поверхности. На определенной стадии процесса увеличение фактической площади контакта замедляется, что обуславливает замедление роста контактных касательных напряжений при дальнейшем непрерывном увеличении нормальных давлений p_n . В рассматриваемой модели контактные напряжения имеют некоторый предел. Такая модель согласуется с результатами теоретических и экспериментальных исследований [13–17] и др. В данной

работе предполагается действие сухого трения при предельно высоких нормальных давлениях. В этом случае можно применить известный закон трения Прандтля — Зибеля

$$\tau_c = f\tau_s,$$

где τ_s — предел текучести деформируемой среды; коэффициент пропорциональности f принимает значения 0 или 1 ($f = 1$ на передней поверхности частицы, где действуют нормальные напряжения сжатия).

При граничном трении основным видом износа является истирание вследствие усталостного состояния контактной поверхности. Интенсивность такого износа возрастает при повышении нормального и касательного контактных напряжений и уменьшается при увеличении скорости смещения трущихся поверхностей. Эти факторы учтены в модели износа [18], в соответствии с которой интенсивность износа $I_h = dh/dS$ (h — линейный износ; S — относительное перемещение твердой частицы и пластически деформируемой среды) пропорциональна нормальному давлению и касательному напряжению, увеличивается с повышением температуры и обратно пропорциональна скорости относительного скольжения и твердости обрабатываемого материала. Математическая модель граничного трения и износа для тяжело нагруженных пар скольжения развита в работах [19, 20].

Следует отметить, что существующие модели описывают процессы износа при граничном трении, т. е. предполагается присутствие смазки, которая частично разделяет трущиеся поверхности. В рассматриваемом процессе имеет место сухое трение, сопровождающееся адгезионным взаимодействием контактных поверхностей и их истиранием. В этом случае для расчета изменения радиуса частицы R при перемещении ее вдоль оси z (см. рис. 1) используем дифференциальное уравнение

$$\frac{dR}{dz} = k_0 \left(\frac{\tau_s}{\tau_{s1}} + k_1 \frac{v}{v_*} \right),$$

где τ_{s1} — предел текучести частицы; v/v_* — относительная скорость частицы ($v_* = 1000$ м/с); k_0, k_1 — эмпирические коэффициенты.

Для определения изменения радиуса движущейся частицы имеем следующее уравнение в конечных разностях:

$$R_{i+1} = R_i - k_0(\tau_s/\tau_{s1} + k_1 v_i/v_*)\Delta u_{zi}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

где Δu_{zi} — расстояние, пройденное частицей на i -м шаге; n — общее количество шагов по времени, имитирующее движения частицы.

Для определения Δu_{zi} применим уравнение

$$\Delta u_{zi} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(n - i + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{v_1}{n} \right)^2 \frac{\rho_1 R_{i-1}}{q_* \tau_s}.$$

Расстояние, пройденное частицей до полной остановки, определяется выражением

$$u_z = \sum_{i=1}^n \Delta u_{zi}.$$

Для примера определим расстояние, пройденное твердой частицей ($R = 10^{-3}$ м, $v_1 = 2000$ м/с) в среде с пределом текучести на сдвиг $\tau_s = 300$ МПа при $\rho_1 = \rho_0 = 7800$ кг/м³, $\tau_{s1} = \tau_s$. Эмпирические коэффициенты имели следующие значения: $k_0 = 10^{-2}$, $k_1 = 10^{-1}$. Результаты вычислений приведены в таблице.

В результате вычислений получено значение $u_z = 3,65 \cdot 10^{-3}$ м. Таким образом, частица, диаметр которой в результате истирания изменяется, до полной остановки проходит меньшее расстояние, чем абсолютно твердая частица. При этом отношение пройденного пути к радиусу частицы увеличивается на 1 %.

i	v_i , м	Δu_{zi} , мм	R_i , мм	u_{zi} , мм
1	1900	0,703	1,000	0,703
2	1700	0,624	0,992	1,327
3	1500	0,551	0,985	1,878
4	1300	0,473	0,980	2,351
5	1100	0,399	0,975	2,750
6	900	0,325	0,971	3,075
7	700	0,251	0,968	3,326
8	500	0,179	0,967	3,505
9	300	0,107	0,966	3,612
10	100	0,036	0,966	3,648

Авторы выражают благодарность А. Б. Борисову за внимание к работе и ценные советы при обсуждении модели износа частицы и полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Петров И. Б., Холодов А. С.** Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24, № 5. С. 722–739.
2. **Кондауров В. И., Петров И. Б., Холодов А. С.** Численное моделирование процесса внедрения жесткого тела вращения в упругопластическую преграду // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24, № 4. С. 132–139.
3. **Петров И. Б.** Численное исследование волновых процессов в слоистой преграде при соударении с жестким телом вращения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 4. С. 125–129.
4. **Тимошенко С. П., Гудьер Дж.** Теория упругости. М.: Наука, 1975.
5. **Колмогоров В. Л.** Механика обработки металлов давлением. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. техн. ун-та, 2001.
6. **Черный Г. Г.** Механизм аномально низкого сопротивления при движении тел в твердых средах // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292, № 6. С. 1324–1328.
7. **Шилкин В. А., Ушеренко С. М., Андиленко С. К.** Введение в сталь металлических порошков // Обработка материалов при высоких давлениях. Киев: Ин-т пробл. материаловедения АН УССР, 1987. С. 99–102.
8. **Горобцов В. Г., Ушеренко С. М., Фурс В. Я.** О некоторых эффектах обработки высокоскоростной струей рабочего вещества // Порошковая металлургия. Минск: Вышэйш. шк., 1979. Вып. 3. С. 8–12.
9. **Горобцов В. Г., Дубровская Г. Н., Ушеренко С. М. и др.** Физико-химические исследования некоторых вопросов взаимодействия высокоскоростных потоков частиц с металлической мишенью // Действие высоких давлений на материалы. Киев: Наук. думка, 1986. С. 101, 102.
10. **Колмогоров В. Л.** Метод расчета напряженно-деформированного состояния в общей краевой задаче развитого течения // Вестн. Перм. гос. техн. ун-та. Механика. 1995. № 2. С. 87–98.
11. **Новацкий В. К.** Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978.
12. **Макушок Е. М.** Механика трения. Минск: Наука и техника, 1974.
13. **Дерягин Б. В.** Что такое трение. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
14. **Дроздов Ю. Н., Павлов В. Г., Пучков В. Н.** Трение и износ в экстремальных условиях. М.: Машиностроение, 1986.

15. Демкин Н. Б. Контактное трение шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970.
16. Крагельский И. В. Трение и износ. М.: Машгиз, 1962.
17. Леванов А. Н., Колмогоров В. Л., Буркин С. П. и др. Контактное трение в процессах обработки металлов давлением. М.: Металлургия, 1976.
18. Справочник по триботехнике. В 3 т. Т. 1. Теоретические основы. М.: Машиностроение, 1989.
19. Kolmogorov V. L. Friction and wear model of a heavy-loaded sliding pair. Pt 1. Metal damage and fracture model // Wear. 1996. N 194. P. 71–79.
20. Kolmogorov V. L., Kharlamov V. V., Kurilov A. M., Pavlishko S. V. Friction and wear model of a heavy-loaded sliding pair. Pt 2. Application to an unlubricated journal bearing // Wear. 1996. N 197. P. 9–16.

*Поступила в редакцию 15/VII 2002 г.,
в окончательном варианте — 24/XII 2002 г.*
