

УДК 539.3

УПРАВЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЬЮ СЕКЦИОНИРОВАННОЙ БИМОРФНОЙ ПЛАСТИНЫ

А. О. Ватульян¹, Н. Б. Лапицкая¹, А. В. Наседкин¹,
А. С. Скалиух¹, А. Н. Соловьев²

¹Ростовский государственный университет,

²Ростовский государственный технический университет,

344000 Ростов-на-Дону

В настоящее время широкое применение в различных областях техники находят оптические элементы, характеристиками которых можно управлять в процессе работы [1]. К числу таких систем адаптивной оптики относятся биморфные зеркала из пьезокерамики. Процессы деформирования биморфных зеркал прямоугольной формы исследовались в [2–4].

В данной работе рассматривается круглое в плане зеркало из слоя пьезокерамики и соединенного с ним слоя металла с напыленным отражающим покрытием. Такое зеркало в дальнейшем именуется полупассивным биморфом. На пьезоэлемент наносится тонкое электродное покрытие, разделенное на секции. Изменение формы зеркала осуществляется путем подведения к различным секциям управляющих электрических напряжений. Ставится задача оптимального управления в смысле определения таких значений напряжений, которые бы позволили достаточно эффективно аппроксимировать наперед заданную форму зеркала. Заметим, что близкая по постановке задача рассматривалась в [5], но в рамках менее строгого подхода.

1. Рассмотрим биморфную пластину, состоящую из слоя пьезокерамики толщины h_1 и жестко сцепленного с ним слоя металла толщины h_2 . Отнесем пластину к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ так, как показано на рис. 1. Будем считать, что деформирование пластины происходит при подаче напряжения $v(x_1, x_2)$ на бесконечно тонкий электрод, покрывающий границу $x_3 = h_1$. При этом электрод, покрывающий границу $x_3 = 0$, закорочен. Из результатов асимптотического анализа равновесия неоднородной электроупругой плиты, проведенного в [6], вытекает возможность использования в этом случае гипотез Кирхгофа, и аналогично [7] для изгибающих моментов M_{ij} можно получить выражение

$$M_{11} = -D(w_{,11} + \nu_0 w_{,22}) - \alpha v, \quad M_{22} = -D(\nu_0 w_{,11} + w_{,22}) - \alpha v,$$

$$M_{12} = -D(1 - \nu_0)w_{,12},$$

где эффективные цилиндрическая жесткость D , коэффициент Пуассона ν_0 и управляющий коэффициент α определяются следующими формулами:

© А. О. Ватульян, Н. Б. Лапицкая, А. В. Наседкин, А. С. Скалиух, А. Н. Соловьев. 1995

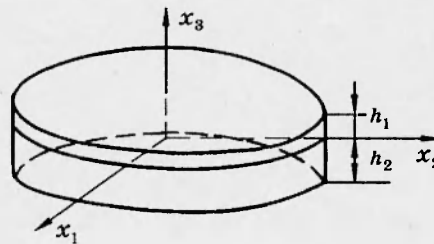


Рис. 1

$$D = \frac{1}{3}(h_1^3 B_{11}(1 + \beta) + h_2^3 A_{11}) - \frac{1}{8}(B_{22} + A_{22}), \quad \nu_0 = \frac{D_{22}}{D},$$

$$D_{22} = \frac{1}{3}(h_1^3 B_{11}(\nu + \beta) + \nu_M h_2^3 A_{11}) + \frac{1}{8}(B_{22} - A_{22}),$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}d \left(h_1 - \frac{B_{11}h_1^2(1 + \nu) - A_{11}h_2^2(1 + \nu_M)}{B_{11}h_1(1 + \nu) + A_{11}h_2(1 + \nu_M)} \right),$$

$$A_{22} = \frac{(B_{11}h_1^2(1 + \nu) - A_{11}h_2^2(1 + \nu_M))^2}{B_{11}h_1(1 + \nu) + A_{11}h_2(1 + \nu_M)},$$

$$B_{22} = \frac{(B_{11}h_1^2(1 - \nu) - A_{11}h_2^2(1 - \nu_M))^2}{B_{11}h_1(1 - \nu) + A_{11}h_2(1 - \nu_M)},$$

$$d = \frac{d_{31}}{s_{11}(1 - \nu)}, \quad A_{11} = \frac{1}{s_{11}^M(1 - \nu_M^2)}, \quad B_{11} = \frac{1}{s_{11}(1 - \nu^2)},$$

$$\beta = \frac{d^2}{4\Theta B_{11}}, \quad \nu_M = -\frac{s_{12}^M}{s_{11}^M}, \quad \nu = -\frac{s_{12}}{s_{11}}, \quad \Theta = \Theta_{33} - 2d_{31}d.$$

Здесь s_{ij} , s_{ij}^M — упругие податливости керамики и металла соответственно; Θ_{33} — диэлектрическая проницаемость; d_{31} — пьезомодуль; $w = w(x_1, x_2)$ — прогиб поверхности пластины $x_3 = 0$. Используя уравнение равновесия пластины

$$M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} = 0,$$

получаем уравнение изгиба полупассивного биморфа:

$$D\Delta^2 w = -\alpha\Delta v, \quad (1.1)$$

которое по форме совпадает с классическим уравнением изгиба тонких упругих пластин с приведенной цилиндрической жесткостью D . В роли поперечной нагрузки q здесь выступает выражение $-\alpha\Delta v$.

Граничные условия на контуре Γ пластины для уравнения (1.1) вытекают из физических условий закрепления и кинематических гипотез Кирхгофа [6] и по форме также совпадают с обычными граничными условиями при изгибе упругих пластин. Именно для жесткого защемления на Γ $w = \partial w / \partial n = 0$, для шарнирного опирания $w = 0$, $M_{nn} = 0$ и, наконец, для свободного края

$$M_{nn} = 0, \quad \tilde{Q}_n^* = Q + \frac{\partial M_{n\tau}}{\partial \tau} = 0, \quad Q_n = -D \frac{\partial}{\partial n} (\Delta w) - \alpha \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad (1.2)$$

где n — нормаль к Γ ; τ — орт касательной; Q_n — перерезывающая сила.

2. Рассмотрим круглую в плане биморфную пластину радиуса a со свободным краем. В этом случае краевую задачу изгиба удобно исследовать в полярной системе координат ρ, θ ($x_1 = a\rho \cos \theta$, $x_2 = a\rho \sin \theta$, $0 \leq \rho \leq 1$).

Запишем краевую задачу (1.1), (1.2) в безразмерной форме

$$\Delta^2 w = \Delta U, \quad k_1 w = U, \quad \rho = 1, \quad k_2 w = U, \quad \rho = 1. \quad (2.1)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, а дифференциальные выражения k_1 и k_2 определяются в полярной системе координат соотношениями

$$k_1 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \nu_0 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right),$$

$$k_2 = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left((2 - \nu_0) \frac{\partial}{\partial \rho} - (3 - \nu_0) \frac{1}{\rho} \right), \quad (2.2)$$

$$U = -\frac{\alpha a^2}{D w_0} v, \quad \bar{\nabla}^2 v = \frac{w}{w_0}$$

(w_0 — характерный прогиб пластины).

Разобьем круг $\rho \leq 1$ на $2N + 1$ участков (секций) окружностями $\rho = \rho_1, \rho = \rho_2$. ($0 < \rho_1 < \rho_2 < 1$) и отрезками лучей $\theta = k\Delta\theta$ ($\Delta\theta = 2\pi/N, k = 0, 1, \dots, N-1$), $\rho_1 \leq \rho \leq 1$. В результате пластина будет разбита на круговую область s_0 и $2N$ секторных областей $s_n, n = 1, 2, \dots, 2N$ (рис. 2). Построим решение задачи (2.1), (2.2) для кусочно-постоянной функции U , что соответствует описанному секционированию пластины.

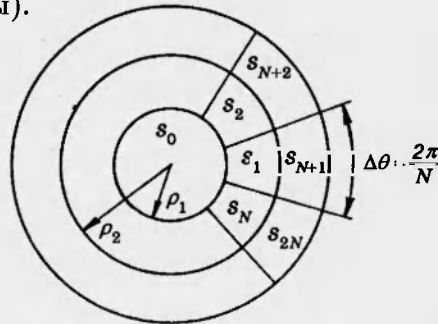


Рис. 2

Примем, что на каждой из областей s_k значение функции U является постоянным:

$$U(\rho, \theta) = \sum_{k=0}^{2N} U_k \chi(s_k)$$

(U_k — постоянное значение U в области s_k , а $\chi(s_k)$ — характеристическая функция области s_k).

Используя разложение искомой функции W в ряд Фурье по θ , можно получить представление

$$W(\rho, \theta) = \sum_{k=-3}^{2N} U_k W_k(\rho, \theta), \quad (2.3)$$

где

$$U_{-3} = A_0, \quad U_{-2} = A_1^{(1)}, \quad U_{-1} = A_1^{(2)}, \quad W_{-3} = 1, \quad W_{-2} = \rho \cos \theta, \quad W_{-1} = \rho \sin \theta,$$

$$W_0 = \frac{1}{2} \gamma_1 \rho_1^2 \rho^2 + \begin{cases} \frac{1}{2} \rho_1^2 \left(\ln \rho_1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} \rho^2, & \rho \leq \rho_1, \\ \frac{1}{2} \rho_1^2 \ln \rho, & \rho \geq \rho_1, \end{cases}$$

$$W_k(\rho, \theta) = W_0^{(1)}(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n^{(1)}(\rho) T_{kn}(\theta) \quad (1 \leq k \leq N), \quad (2.4)$$

$$W_k(\rho, \theta) = W_0^{(2)}(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n^{(2)}(\rho) T_{kn}(\theta) \quad (N < k \leq 2N),$$

$$T_{kn}(\theta) = \cos n\theta S_{kn} + \sin n\theta C_{kn},$$

$$S_{kn} = \sin n\theta_k - \sin n\theta_{k-1}, \quad C_{kn} = \cos n\theta_{k-1} - \cos n\theta_k, \quad \theta = k\Delta\theta = k \frac{2\pi}{N}.$$

Отметим, что $W_n^{(k)}(\rho)$ есть известные функции ρ и в силу их громоздкости здесь не приводятся.

3. Полученное решение $W(\rho, \theta)$ задачи изгиба можно рассматривать как функцию, зависящую и от значения U_k , т. е.

$$W = W(\rho, \theta, U_{-3}, U_{-2}, \dots, U_{2N}).$$

При этом установленная по (2.3) зависимость прогиба W от U_k позволяет перейти к исследованию практически важной задачи об оптимизации формы полупассивного биморфа.

Предположим, что требуется обеспечить прогиб биморфной пластины, близкий по форме к некоторой наперед заданной непрерывно дифференцируемой функции $F(\rho, \theta)$ за счет выбора управляющих напряжений U_k . Разложим эту функцию в обобщенный ряд Фурье по системе тригонометрических полиномов Цернике $Z_k(\rho, \theta)$ [8], образующих базис в $L_2(S)$:

$$Z_1 = 1, \quad Z_2 = 2\rho \cos \theta, \quad Z_3 = 2\rho \sin \theta, \quad Z_4 = 2\rho^2 - 1, \quad Z_5 = \rho^2 \sin 2\theta, \dots$$

Разложение имеет вид

$$F(\rho, \theta) = w_0 \sum_{k=1}^{\infty} a_k Z_k(\rho, \theta).$$

Построим далее функционал

$$J(U_{-3}, U_{-2}, \dots, U_{2N}) = \frac{1}{S} \int_S \left(W - \sum_{k=1}^{\infty} a_k Z_k \right)^2 dS, \quad (3.1)$$

определяющий отклонение прогиба W от функции F (S — площадь пластины в плане, $W = \sum a_k W_k$).

Назовем оптимальными такие значения U_m , которые доставляют минимум функционалу (3.1). Используя принцип суперпозиции, оптимальные управляющие напряжения U_m можно представить в виде

$$U_m = \sum_{k=1}^{\infty} a_k U_{km},$$

где U_{km} — управляющие напряжения на m -м электроде, аппроксимирующие k -й полином Цернике, определяемые из решения следующей алгебраической системы:

$$\sum_{n=-3}^{2N} U_{kn} B_{nm} = f_{km}, \quad B_{nm} = \int_S W_n W_m dS, \quad f_{km} = \int_S Z_k W_m dS, \quad (3.2)$$

причем U_{km} доставляют минимум k -му функционалу невязки

$$J_k = \frac{1}{S} \left(\int_S Z_k^2 dS - \sum_{m=-3}^{2N} U_{mk} f_{km} \right),$$

характеризующему среднеквадратичное отклонение формы поверхности пластины от k -го полинома Цернике. Из условия минимума получим ли-

нейную алгебраическую систему уравнений:

$$\sum_{n=-3}^{2N} U_n \int_S W_n W_m dS = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_S Z_k W_m dS, \quad m = -3, -2, \dots, 2N.$$

Система (3.2) обладает рядом эффективных вычислительных свойств: матрица B_{nm} симметрична, неотрицательно определена и не зависит от вида функции F . Отметим также, что, используя формулы (2.4), несложно аналитически вычислить интегралы в (3.2) по углу θ , и тогда коэффициенты матрицы и компоненты вектора правых частей будут выражаться только через интегралы по радиальной переменной ρ .

Проведена оптимизация по определению безразмерных радиусов секционирования ρ_1, ρ_2 для базового 17-электродного покрытия. Найдены значения $\rho_1 = 0,4, \rho_2 = 0,7$ и рассчитаны управляющие напряжения U_n ($n = -3, -2, \dots, 16$), которые приведены в таблице, причем значениям $n = -3, -2, -1$ соответствуют: U_{-3} — поступательное перемещение пластины, U_{-2}, U_{-1} — повороты пластины относительно координатных осей. Здесь k — номер полинома Цернике, n — номер электрода. Заметим, что в таблице приведены данные, начиная только с $k = 4$, поскольку полиномы Z_k для $k = 1, 2, 3$ соответствуют перемещению пластины как жесткого целого.

n	k					
	4	5	6	7	8	11
	$J_k \cdot 10^3$					
	0	5,1	5,1	0,611	0,611	0,32
U_n						
-3	0,32	0	0	0	0	-0,78
-2	0	0	0	0	2,76	0
-1	0	0	0	2,76	0	0
0	0,53	0	0	0	0	-26,5
1	0,53	5,1	5,62	5,62	13,57	-0,2
2	0,53	5,1	-5,1	13,57	5,62	-0,2
3	0,53	-5,1	-5,1	13,57	-5,62	-0,2
4	0,53	-5,1	5,1	5,62	13,57	-0,2
5	0,53	5,1	5,1	-5,62	-13,57	-0,2
6	0,53	5,1	-5,1	-13,57	-5,62	-0,2
7	0,53	-5,1	-5,1	-13,57	5,62	-0,2
8	0,53	-5,1	5,1	-5,62	13,57	-0,2
9	0,53	-11,24	-11,24	5,66	13,66	36,0
10	0,53	-11,24	11,24	13,66	5,66	36,0
11	0,53	11,24	11,24	13,66	-5,66	36,0
12	0,53	11,24	-11,24	5,66	-13,66	36,0
13	0,53	-11,24	-11,24	-5,66	-13,66	36,0
14	0,53	-11,24	11,24	-13,66	-5,66	36,0
15	0,53	11,24	11,24	-13,66	5,66	36,0
16	0,53	11,24	-11,24	-5,66	13,66	36,0

Отметим, что в таблице не приведены результаты для $k = 9, 10$, поскольку соответствующие полиномы Цернике, пропорциональные $\sin 3\theta$ и $\cos 3\theta$, нельзя хорошо приблизить при выбранном секционировании ($N = 8$). Для хорошей аппроксимации этих полиномов необходимо брать $N = 6, 9$ или 12 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Харди Дж. Активная оптика: новая техника управления световым пучком // Тр. Ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике: Пер. амер. журн. Proc. IEEE. 1978. Т. 66, № 6. С. 31–85.
2. Kokorovsky S. Analysis of adaptive optical elements made from piezoelektric bimorphs // J. Opt. Soc. Amer. 1979. V. 69, N 1. P. 181–187.
3. Halevi P. Bimorphs piezoelektric flexible mirror: graphical solution and compavition with experiment // J. Opt. Soc. Amer. 1983. V. 73, N 1. P. 110–113.
4. Hudgin R., Lipson S. G. Analysis of monolithic piezoelektric mirror // J. Appl. Phys. 1975. V. 46, N 2. P. 510–512.
5. Воронцов М. А., Кудряшов А. В., Шмальгаузен В. И. Гибкие зеркала для адаптивных систем атмосферной оптики. Теоретический анализ // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27, № 3. С. 1419–1430.
6. Гетман И. П., Устинов Ю. А. К теории неоднородных электроупругих плит // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43, № 5. С. 924–932.
7. Ватульян А. О., Гетман И. П., Лапицкая Н. Б. Об изгибе пьезоэлектрической биморфной пластины // Прикл. механика. 1991. Т. 27, № 10. С. 101–105.
8. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970.

*Поступила в редакцию 27/V 1994 г.,
в окончательном варианте — 19/VII 1994 г.*
