

6. *Срубицк Л. С., Юдович В. И.* Асимптотика слабых разрывов течений жидкости при исчезающей вязкости.— «Докл. АН СССР», 1971, т. 199, № 3.
7. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— «Усп. мат. наук», 1957, т. 12, № 5.
8. *Срубицк Л. С.* О потере устойчивости несимметричных строго выпуклых тонких пологих оболочек.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
9. *Овсянников Л. В.* Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей.— В кн.: Общие уравнения и примеры. Новосибирск, «Наука», 1967.
10. *Петров А. Г.* Нестационарный пограничный слой на сферическом пузыре.— «Вестн. МГУ», 1971, № 1.

УДК 532.529.5

## КАПЛЯ В ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Мурга

(Новосибирск)

В настоящее время не существует работ, посвященных вынужденному движению капли, помещенной в осциллирующую жидкость. Однако этот вопрос представляет собой значительный интерес. Рассматриваемая задача моделирует, например, гидродинамические процессы, происходящие при облучении длинноволновым звуком капелек одной жидкости, находящихся в другой жидкости, возникающие при этом стационарные течения могут существенно влиять на процессы тепло- и массопереноса.

В предлагаемой работе рассматривается задача о нахождении поля скоростей внутри и вне капли, совершающей вынужденное колебательное движение вследствие взаимодействия ее с окружающей жидкостью, которая на достаточно большом удалении от капли осциллирует заданным образом, причем  $s/R \ll 1$  ( $s$  — амплитуда смещения частиц жидкости,  $R$  — радиус капли).

Граница раздела двух сред совершает сложное движение, состоящее из перемещения ее как целого, а также из деформации, т. е. из отклонения ее формы от первоначально сферической. Обе жидкости (внутри и вне капли) считаются вязкими и несжимаемыми. Силы тяжести отсутствуют. Картина течения предполагается осесимметричной по отношению к прямой, проходящей через центр тяжести капли и имеющей направление, совпадающее с направлением движения невозмущенной жидкости (в дальнейшем, при использовании сферической системы координат, полярная ось будет совпадать с осью симметрии). Движение жидкости предполагается периодическим по времени.

Область разбивается на две: внешнюю (область вне капли) и внутреннюю (область внутри капли). Все величины, кроме независимых переменных, относящиеся к внутренней области, снабжены штрихами. Начало координат связано с центром тяжести капли. Исходные уравнения для внешней области записываются в виде

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + [\mathbf{w} - \mathbf{v}_0] \nabla \cdot \mathbf{w} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{w},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0,$$

где  $\mathbf{w}$  — скорость частиц жидкости в неподвижной системе координат;  $p$  — давление;  $\rho$  — плотность;  $\nu$  — коэффициент кинематической вязко-

сти;  $v_0$  — скорость движения центра тяжести капли (эта величина должна быть найдена в процессе решения задачи).

Решение для внешней области должно быть ограниченным; кроме того, на бесконечно большом удалении от капли должно выполняться условие

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \cos \omega t,$$

где  $\mathbf{u}$  — амплитуда скорости невозмущенной жидкости;  $\omega$  — угловая частота колебаний.

Для внутренней области исходные уравнения имеют аналогичный вид. Решение также должно быть ограниченным.

На границе раздела двух областей должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{w}'; \\ n_k \Pi_{ik} - n_k \Pi'_{ik} &= \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) n_i, \end{aligned}$$

где  $\Pi_{ik}$  — компоненты тензора напряжений;  $n_i$  — компоненты вектора единичной нормали к поверхности раздела;  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $R_1, R_2$  — главные радиусы кривизны поверхности раздела;  $k, i=1, 2, 3$ ; по повторяющемуся индексу производится суммирование (относительно последнего из написанных условий см. [1]).

В соответствии с методами теории возмущений решение данной задачи будем искать в виде рядов по степеням малого параметра  $s/R$ , причем ограничимся первыми двумя членами разложения, т. е. представим  $\mathbf{w}, \mathbf{w}', p, p'$  в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2; \quad p = p_1 + p_2; \\ \mathbf{w}' &= \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2; \quad p' = p'_1 + p'_2. \end{aligned}$$

Для первого приближения имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p_1 + \nu \Delta \mathbf{v}_1, \\ \Delta \mathbf{v}_1 &= 0. \end{aligned}$$

Граничные условия в указанном приближении линейны и однородны относительно компонент вектора скорости. Это следует из того, что поскольку давление  $p_1$  является линейным выражением относительно компонент  $\mathbf{v}_1$ , то и компоненты тензора напряжений  $\Pi_{ik}$  также линейны по отношению к  $\mathbf{v}_1$  (то же самое имеет место для  $\Pi'_{ik}$ ). Известно [1], что в первом приближении

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{R} - \frac{2\xi}{R^2} - \frac{1}{R^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right),$$

где  $R$  — радиус невозмущенной сферической капли;  $\xi$  — величина отклонения точки поверхности капли от среднего (невозмущенного) положения;  $\theta$  — полярный угол в сферической системе координат. Так как

$$\xi = \int v_{r1} dt,$$

где  $v_{r1}$  — радиальная компонента вектора  $\mathbf{v}_1$  на поверхности капли, то выражение для  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  линейно по отношению к  $v_{r1}$ . Однородность граничных условий следует из того, что давление  $p_1$ , входящее в выражения для компонент тензора напряжений, определяется с точностью до произвольной функции от времени.

В первом приближении граничные условия на поверхности капли, слабо отклоняющейся от сферической, можно заменить условиями на невозмущенной сфере.

Можно утверждать, что решение в указанном приближении не содержит стационарных компонент. Действительно, в силу линейности уравнений и граничных условий, задачи о нахождении стационарных и осциллирующих компонент решаются отдельно. На бесконечном удалении от капли стационарные компоненты должны исчезать (по условию), и поэтому вследствие однородности стационарной задачи решением для упомянутых стационарных компонент может быть только нуль.

Полагаем  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} \exp(-i\omega t)$ ;  $p_1 = p \exp(-i\omega t)$  (смысл имеет только вещественная часть), где  $\mathbf{v}$  и  $p$  — функции координат (то же самое и для  $\mathbf{v}'_1, p'_1$ ). Уравнения для  $\mathbf{v}$  и  $p$  имеют вид

$$(1) \quad -i\omega \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \nu \Delta \mathbf{v}, \\ \nabla \mathbf{v} = 0.$$

Это аналогично и для  $\mathbf{v}'$ ,  $p'$ . Граничные условия с учетом сказанного выше запишутся в виде (используется сферическая система координат)

$$(2) \quad \mathbf{v}/r \rightarrow \infty \rightarrow \mathbf{u}; \quad \mathbf{v}/r=R = \mathbf{v}'/r=R; \\ \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \Big|_{r=R} = \mu' \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v'_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v'_\theta}{\partial r} - \frac{v'_\theta}{r} \right) \Big|_{r=R}; \\ -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R} = -p' + 2\mu' \frac{\partial v'_r}{\partial r} + \frac{\alpha}{R^2 i \omega} \left[ 2v_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \times \right. \\ \left. \times \left( \sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right] \Big|_{r=R}.$$

Формулировка граничных условий в виде (2) (с добавлением требования ограниченности решения в обеих областях) позволяет полностью решить поставленную задачу в первом приближении, в частности, можно будет найти скорость перемещения капли как целого, а также определить изменение формы капли.

Во втором приближении остановимся только на стационарном решении, так как осциллирующее решение определяется в основном первым приближением (с точностью до малых величин порядка  $(s/R)^2$ ). Для стационарного течения имеем уравнения

$$(3) \quad \langle [(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) \nabla] \mathbf{v}_1 \rangle = - \frac{1}{\rho} \nabla p_2 + \nu \Delta \mathbf{v}_2, \\ \nabla \mathbf{v}_2 = 0,$$

где угловые скобки означают осреднение по периоду колебания. Аналогично запишутся уравнения и для  $\mathbf{v}_2$ ,  $p_2$ .

Формулируем граничные условия. На бесконечном удалении от капли скорость  $\mathbf{v}_2$  должна исчезать. Из симметрии задачи ясно, что капля как целое не может совершать стационарного движения. Поверхность капли имеет в среднем по времени постоянную форму, слабо отличающуюся от сферической; поэтому можно считать (с точностью до малых величин, определяемых следующими приближениями), что в среднем по времени капля является просто шаром, покоящимся во внешней жидкости, тогда

на поверхности капли достаточно потребовать обращения в нуль радиальных компонент скорости  $v_{2r}$  и  $v'_{2r}$ , а также равенства касательных компонент скорости  $v_{2\theta}$  и  $v'_{2\theta}$  снаружи и внутри капли.

Полностью граничные условия запишутся в виде

$$v_2|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0; \quad v_{2r}|_{r=R} = v'_{2r}|_{r=R} = 0; \quad v_{2\theta}|_{r=R} = v'_{2\theta}|_{r=R};$$

$$\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_{2r}}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{2\theta}}{\partial r} - \frac{v_{2\theta}}{r} \right) \Big|_{r=R} = \mu' \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v'_{2r}}{\partial \theta} + \frac{\partial v'_{2\theta}}{\partial r} - \frac{v'_{2\theta}}{r} \right) \Big|_{r=R}.$$

К этим соотношениям необходимо добавить требование ограниченности решения в обеих областях.

Переходим к решению задачи первого приближения. Покажем, что в этом приближении капля будет сохранять сферическую форму. Действительно, если это так, то решение, удовлетворяющее уравнениям (1) и граничным условиям (2), можно искать в виде

$$v_r = f(r) \cos \theta; \quad v_\theta = \varphi(r) \sin \theta; \quad p = \psi(r) \cos \theta.$$

При этом множитель при коэффициенте поверхностного натяжения  $\alpha$  в (2) обращается в нуль тождественно, т. е. решение не зависит от  $\alpha$ . Непротиворечивость этого результата с предположением о сферичности капли доказывает (при условии, что решение единственно) справедливость указанного предположения.

Бэтчелор [2] указывает на аналогичный факт для случая стационарного движения капли в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса (задача Адамара — Рыбчинского). В обоих случаях это — результат пренебрежения нелинейными членами в задаче.

Решение для осциллирующих компонент, ограниченное и удовлетворяющее граничным условиям на бесконечном удалении от капли, имеет вид

$$(4) \quad v_r = u \cos \theta \left[ a \exp(ikr) \left( \frac{2}{ikr^3} - \frac{2}{r^2} \right) - \frac{2b}{r^3} + 1 \right];$$

$$v_\theta = u \sin \theta \left[ a \exp(ikr) \left( \frac{1}{ikr^3} - \frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) - \frac{b}{r^3} - 1 \right];$$

$$p = u \cos \theta \mu k^2 \left( \frac{b}{r^2} + r \right);$$

$$v'_r = 2u \cos \theta \left\{ c \left[ \exp(i\kappa r) \left( \frac{1}{r^3} - \frac{i\kappa}{r^2} \right) - \exp(-i\kappa r) \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \left( \frac{1}{r^3} + \frac{i\kappa}{r^2} \right) \right] - d \right\};$$

$$v'_\theta = u \sin \theta \left\{ c \left[ \exp(i\kappa r) \left( \frac{1}{r^3} - \frac{i\kappa}{r^2} - \frac{\kappa^2}{r} \right) - \exp(-i\kappa r) \left( \frac{1}{r^3} + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{i\kappa}{r^2} - \frac{\kappa^2}{r} \right) \right] + 2d \right\};$$

$$p' = -2du \cos \theta \mu' \kappa^2 r.$$

Здесь  $k = \frac{1-i}{\delta}$ ;  $\kappa = \frac{1+i}{\delta}$ ;  $\delta = \sqrt{\frac{\nu}{2\omega}}$ ;  $a, b, c, d$  — неопределенные

константы, которые должны быть найдены из граничных условий на поверхности капли (2). В дальнейшем будем считать, что  $|kR| \gg 1$ ;  $|\kappa R| \gg 1$ , тогда будем иметь

$$(5) \quad a = -\frac{3iR}{k} \exp(ikR) \frac{\left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right) \left(2\sigma - \frac{\mu'}{\mu}\right)}{\left(1 + 2\frac{\rho'}{\rho}\right) \left(\frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{\mu'}{\mu}\right)};$$

$$c = \frac{3}{\varepsilon i \kappa^2} \exp(i\kappa R) \frac{\left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right)}{\left(1 + 2\frac{\rho'}{\rho}\right) \left(\frac{\sigma}{\varepsilon} + \frac{\mu'}{\mu}\right)};$$

$$b = -\frac{R^3 \left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right)}{1 + 2\frac{\rho'}{\rho}};$$

$$d = -\frac{3}{2 \left(1 + 2\frac{\rho'}{\rho}\right)}, \quad \text{где } \varepsilon = \frac{1}{ikR}, \quad \sigma = \frac{1}{i\kappa R}.$$

Скорость движения капли  $v_0$  определяется из первого или четвертого соотношений в (4) при  $r=R$  и равна

$$v_0 = \frac{3\rho}{\rho + 2\rho'} u \cos \omega t,$$

что совпадает с известным выражением для скорости твердого шара с плотностью  $\rho'$ , помещенного в идеальную осциллирующую жидкость с плотностью  $\rho$ .

Для нахождения стационарных компонент течения  $v_2, v_2'$  перепишем уравнения (3) в виде

$$(6) \quad v\Delta \operatorname{rot} v_2 = -\langle \operatorname{rot} [(v_1 - v_0) \times \operatorname{rot} v_1] \rangle = \varepsilon \varphi(r) \sin 2\theta,$$

где  $\varepsilon$  — азимутальный орт в сферической системе координат. После вычислений имеем для  $\varphi(r)$  и  $\varphi'(r)$

$$\varphi(r) = \frac{u^2}{\delta^2 R^3} \exp(-\eta) \left\{ \frac{a_1^2 + a_2^2}{\delta} [\cos \eta - \sin \eta - \exp(-\eta)] + \right.$$

$$\left. + \frac{3i\eta}{R^2} [a_1 (\cos \eta - \sin \eta) - a_2 (\cos \eta + \sin \eta)] \right\};$$

$$\varphi'_r = \frac{2u^2}{\delta^2 R^3} \exp(\eta') (c_1^2 + c_2^2) [\exp(\eta') - \sin \eta' - \cos \eta'].$$

Здесь  $\eta = \frac{r-R}{\delta}$ ;  $\eta' = \frac{r-R}{\delta'}$ ; вещественные константы  $a_1, a_2, c_1, c_2$  связаны с константами  $a, c$  из (5) следующим образом:

$$a_1 + ia_2 = a \exp(ikR); \quad c_1 + ic_2 = c \exp(-i\kappa R).$$

Вводя функцию тока  $\psi$  ( $v_{2r} = -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ ;  $v_{2\theta} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$ ) и представляя ее в виде

$$\psi = \Phi(r) \sin 2\theta \sin \theta,$$

перепишем уравнение (6) в виде

$$(7) \quad \frac{\Phi''''}{r} - 12 \frac{\Phi''}{r^3} + 24 \frac{\Phi'}{r^4} = \frac{\varphi(r)}{v}.$$

Граничные условия на поверхности капли примут вид

$$(8) \quad \begin{aligned} \Phi|_{r=R} = \Phi'|_{r=R} = 0; \\ \Phi_r|_{r=R} = \Phi'_r|_{r=R}; \\ \mu \left( \frac{\Phi_{rr}}{R} - 2 \frac{\Phi_r}{R^2} \right) \Big|_{r=R} = \mu' \left( \frac{\Phi'_{rr}}{R} - 2 \frac{\Phi'_r}{R^2} \right) \Big|_{r=R}. \end{aligned}$$

Решение для  $\Phi$  и  $\Phi'$ , ограниченное и удовлетворяющее граничному условию на бесконечности ( $v_2 \rightarrow 0$ ), записывается в виде

$$(9) \quad \begin{aligned} \Phi = A/r^2 + B + \Phi^0; \\ \Phi' = Cr^5 + Dr^3 + \Phi'^0, \end{aligned}$$

где  $\Phi^0$  и  $\Phi'^0$  являются частными решениями (7), определяемыми по формулам

$$\begin{aligned} \Phi^0 &= \frac{R}{v} \iiint \iiint \varphi(r) dr; \\ \Phi'^0 &= \frac{R}{v'} \iiint \iiint \varphi'(r) dr. \end{aligned}$$

Очевидно, найденные таким образом частные решения удовлетворяют (при условии  $|kR| \gg 1$ ;  $|\kappa R| \gg 1$ ) уравнению (7).  $A, B, C, D$  — неопределенные константы, которые находятся из граничных условий (8). После вычислений получаем

$$\begin{aligned} \Phi^0 &= \frac{u^2 \delta^2}{v R^2} \left\{ - \frac{a_1^2 + a_2^2}{4\delta} \left[ \frac{1}{4} \exp(-2\eta) + \exp(-\eta) (\cos \eta - \sin \eta) \right] + \right. \\ &+ \frac{3b}{R^2} \left[ \frac{a_2 - a_1}{4} \exp(-\eta) \eta \cos \eta + \frac{a_1 + a_2}{4} \exp(-\eta) \eta \sin \eta + \right. \\ &+ \left. \left. a_1 \exp(-\eta) \sin \eta + a_2 \exp(-\eta) \cos \eta \right] \right\}; \\ \Phi'^0 &= \frac{u^2 (c_1^2 + c_2^2)}{v' \delta' R^2} \left[ \frac{1}{8} \exp(2\eta') + \frac{1}{2} \exp(\eta') (\cos \eta' + \sin \eta') \right]; \\ A &= \frac{R^3 \left( \alpha_2 R^2 - 5 \frac{\mu'}{\mu} \alpha_1 \right)}{10 \left( 1 + \frac{\mu'}{\mu} \right)}; \quad B = - \frac{R^3 \left( \alpha_2 - 5 \frac{\mu'}{\mu} \frac{\alpha_1}{R^2} \right)}{10 \left( 1 + \frac{\mu'}{\mu} \right)}; \\ C &= - \frac{\alpha_2 + 5 \frac{\alpha_1}{R^2}}{10 R^2 \left( 1 + \frac{\mu'}{\mu} \right)}; \quad D = \frac{\alpha_2 R^2 + 5 \alpha_1}{10 R^2 \left( 1 + \frac{\mu'}{\mu} \right)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{u^2}{4R^2} \left[ 5 \frac{c_1^2 + c_2^2}{v' \delta'^2} - \frac{5}{2v} (a_1^2 + a_2^2) - 9 \frac{b\delta}{R^2 v} (a_1 - a_2) \right]; \\ \alpha_2 &= \frac{u^2}{v R^3} \left[ \frac{3}{4\delta} (a_1^2 + a_2^2) + \frac{3ba_1}{R^2} \right] + \frac{3}{2} \frac{\mu'}{\mu} \frac{u^2 (c_1^2 + c_2^2)}{v' \delta'^3 R^3}. \end{aligned}$$

В частности, если  $\frac{\mu'}{\mu} \rightarrow \infty$ ,  $\frac{\rho'}{\rho} \rightarrow \infty$  (твердый шар, покоящийся в

осциллирующей жидкости), то по (5)

$$a_1 = a_2 = -\frac{3}{4} R\delta; \quad \dot{b} = \frac{R^3}{2}; \quad c_1 = 0; \quad c_2 = \frac{3\delta'^3 R}{4\delta \frac{\mu'}{\mu}}.$$

Тогда

$$A = \frac{45}{8 \cdot 16} \frac{u^2 \delta^2 R^3}{\nu}; \quad B = -\frac{45 u^2 \delta^2 R}{8 \cdot 16 \nu}; \quad C = 0; \quad D = 0.$$

Внутри капли течения нет. Определим касательную составляющую скорости  $v_{2\theta}$  на границе «пограничного слоя» ( $\eta \gg 1$ ) во внешней жидкости. С помощью (9) имеем

$$v_{2\theta}(\delta) = \frac{1}{R} \Phi_r \sin 2\theta = -\frac{2A}{R^4} \sin 2\theta = -\frac{45 u^2}{32 R \omega} \sin 2\theta,$$

что совпадает с результатом, полученным в [3]. Если  $\frac{\mu'}{\mu} \rightarrow 0; \frac{\rho'}{\rho} \rightarrow 0$  (модель пузыря в жидкости), то

$$a_1 = 0; \quad a_2 = 3\delta^2; \quad c_1 = 0; \quad c_2 = -3/2 R\delta^2; \quad b = -R^3$$

и

$$C = -\frac{45 u^2 \delta'^2}{32 \nu' R^4}; \quad D = \frac{45 u^2 \delta'^2}{32 \nu' R^2}.$$

Константы  $A$  и  $B$  по порядкам величин равны

$$A \sim \frac{u^2 \delta^3 R^2}{\nu}; \quad B \sim \frac{u^2 \delta^3}{\nu}.$$

Величина касательной составляющей скорости внутри капли при  $\eta' \ll -1$  равна

$$v'_{2\theta}(\delta') = -\frac{45 u^2}{8 R \omega} \sin 2\theta.$$

Вне капли скорость  $v_{2\theta}(\delta)$  по порядку величины равна

$$v_{2\theta}(\delta) \sim \frac{u^2}{R \omega} \frac{\delta}{R},$$

следовательно,

$$|v_{2\theta}(\delta)| \ll |v'_{2\theta}(\delta')|.$$

Автор выражает благодарность В. Е. Накорякову за постоянное внимание и помощь в работе.

Поступила 5 X 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1953, 119, 287, 292.
2. Batchelor G. K. An introduction to fluid dynamics. Cambridge at the University Press, 1970. Рус. пер.: Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973, с. 302.
3. Накоряков В. Е., Бурдуков А. П., Болдарев А. М., Терлеев П. Н. Тепло- и массообмен в звуковом поле. Новосибирск, ротанпринт Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1970, с. 18.

## ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ РАЗБАВЛЕННЫХ ЭМУЛЬСИЙ

В. Ф. Медведев, Л. П. Медведева

(Грозный)

Получено уравнение для определения коэффициента гидравлического сопротивления разбавленных эмульсий с использованием концепции турбулентной вязкости и явления гашения турбулентных пульсаций. Результаты теории сравниваются с экспериментом.

Если некоторая масса жидкости попадает в турбулентный поток не смешивающейся с ней жидкости, обладающий достаточно высокой степенью турбулентности, то возникает дробление этой жидкости под воздействием турбулентных пульсаций [1-3]. В этом случае при малом содержании диспергируемой жидкости образуется разбавленная эмульсия. Наименьший диаметр капелек такой эмульсии будет превышать внутренний масштаб турбулентных пульсаций и может быть определен в зависимости от межфазного натяжения  $\sigma$ , плотности дисперсионной среды  $\rho_1$ , внутреннего диаметра трубы  $D$  и средней скорости течения  $w$  по формуле А. Н. Колмогорова [2,3]

$$(1) \quad d = 2\sqrt{2} \left( \frac{\sigma}{k\rho_1} \right)^{3/5} \frac{D^{2/5}}{w^{6/5}},$$

где  $k \approx 0,5$  — коэффициент сопротивления при обтекании капли.

Для описания турбулентного течения разбавленных эмульсий используется концепция вязкости, развитая в полуэмпирической теории турбулентности М. Д. Миллионщикова [4-6], при этом учитывается влияние диспергированной жидкости на коэффициенты динамической  $\mu_э$  и турбулентной  $\mu_{тэ}$  вязкости эмульсии.

Разбавленные эмульсии ведут себя подобно простым жидкостям и подчиняются законам Ньютона и Пуазейля. Уравнение движения разбавленных эмульсий в трубе запишем в виде

$$(2) \quad (\mu_э + \mu_{тэ}) \frac{du}{dy} = \tau,$$

где  $u$  и  $\tau$  — скорость и касательное напряжение на расстоянии  $y$  от стенки трубы. Касательное напряжение в данном сечении в предположении осевой симметрии связано с касательным напряжением на стенке  $\tau_0$  соотношением

$$\tau = \tau_0(1 - y_0),$$

где  $y_0$  — безразмерное расстояние от стенки, определяемое отношением  $y$  к радиусу трубы  $r$ , т. е.  $y_0 = y/r$ .

Влияние глобул диспергированной жидкости на коэффициент динамической вязкости разбавленной эмульсии проявляется в том, что динамическая вязкость эмульсии  $\mu_э$  возрастает с ростом содержания дисперсной фазы  $\beta$ , превышая вязкость дисперсионной среды  $\mu_1$ . Бринкман [7] для случая, когда капли движутся независимо одна от другой, получил

$$(3) \quad \mu_э = \mu_1(1 - \beta)^{-2,5}.$$

Для разбавленных эмульсий формула (3) дает хорошее согласование с опытными данными и может быть использована в уравнении движения (2).



Для течения эмульсий в трубе масштабом для пульсационных скоростей в области развитой турбулентности является динамическая скорость, соответствующая касательному напряжению на данном радиусе [4-6]:

$$(4) \quad v_{*y_3} = v_{*3} \sqrt{1 - y_0},$$

где  $v_{*3} = \sqrt{\tau_w / \rho_3}$  — динамическая скорость. При этом плотность эмульсии  $\rho_3$  определяется аддитивно  $\rho_3 = \rho_1(1 - \beta) + \rho_2\beta$ , где  $\rho_2$  — плотность дисперсной фазы.

Уравнение (2) может быть представлено в виде

$$(5) \quad (v_3 + v_{T3}) \frac{d^2 u}{dy^2} = v_{*3}^2 (1 - y_0) = v_{*y3}^2,$$

где  $v_3$  — коэффициент кинематической вязкости эмульсии ( $v_3 = \mu_3 / \rho_3$ );  
 $v_{T3}$  — турбулентная кинематическая вязкость ( $v_{T3} = \mu_{T3} / \rho_3$ ).

Определим турбулентную кинематическую вязкость как произведение динамической скорости  $v_{*y3}$  на данном радиусе и пути смешения  $l_3$

$$(6) \quad v_{T3} = v_{*y3} l_3.$$

Тогда уравнение (5) с учетом (4), (6) примет вид

$$(v_3 + v_{*3} l_3 \sqrt{1 - y_0}) \frac{du}{dy} = v_{*3}^2 (1 - y_0).$$

Из этого уравнения видно, что при достаточно больших значениях числа Рейнольдса, когда вязкостью можно пренебречь, логарифмическому профилю соответствует изменение  $l_3$  по радиусу в соответствии с формулой

$$l_3 = a_3 (y - \delta_\Delta) \sqrt{1 - y_0},$$

где  $a_3$  — безразмерный коэффициент,  $\delta_\Delta$  — толщина ламинарного подслоя. Для однофазных жидкостей значение безразмерного коэффициента и толщины ламинарного подслоя определены в [4-6] на основании обработки экспериментальных данных:  $a = 0$  для ламинарного течения и  $a = 0,39$  для развитого турбулентного течения и  $\delta = v_* \delta_\Delta / \nu = 7,8$ .

Влияние глобул диспергированной жидкости на турбулентную кинематическую вязкость проявляется в уменьшении длины пути смешения по сравнению с турбулентным течением однофазной жидкости.

Поскольку пленка поверхностно-активных веществ, адсорбируемых на поверхности раздела жидкостей, препятствует проникновению пульсационных движений внутрь глобул, то уменьшение длины пути смешения при турбулентном течении эмульсии определяется прежде всего уменьшением объема, в котором происходит диссипация турбулентной энергии (из общего объема ядра турбулентного потока необходимо исключить объем, занимаемый глобулами дисперсной фазы), т. е. в безразмерный коэффициент длины пути смешения следует ввести множитель  $(1 - \beta)$ . Кроме того, поскольку размер капелек рассматриваемой эмульсии превышает внутренний масштаб турбулентности дисперсионной среды  $\lambda_0$ , происходит некоторое гашение турбулентных пульсаций на поверхности этих капелек. Если считать, что полное гашение турбулентных пульсаций в дисперсионной среде имеет место в эмульсии с плотной упаковкой глобул такого диаметра  $d_n$ , что просвет между ними не превышает  $\lambda_0$ , то эффективность гашения турбулентных пульсаций на поверхности глобул

разбавленной эмульсии может быть учтена множителем  $(1 - S/S_{\Pi})$  к безразмерному коэффициенту длины пути смешения, где  $S/S_{\Pi}$  -- отношение межфазных поверхностей разбавленной и наиболее плотной эмульсий. Таким образом,

$$a_3 = 0,39(1 - \beta)(1 - S/S_{\Pi}).$$

Объемная доля дисперсной фазы при теснейшем расположении глобул в плотной эмульсии  $\beta_{\Pi} = 0,741$  [8].

Поэтому

$$(7) \quad \frac{S}{S_{\Pi}} = \frac{\beta}{0,741} \frac{d_{\Pi}}{d}.$$

Рассматривая модель теснейшего расположения глобул, из геометрических представлений найдем, что наибольший размер просвета между глобулами составляет  $h = 0,365d_{\Pi}$ . Внутренний масштаб турбулентности дисперсионной среды  $\lambda_0$  определим из условия, что число Рейнольдса для движения масштаба  $\lambda_0$  равно единице [3]:

$$\lambda_0 = \frac{D}{\text{Re}_1^{3/4}} = \left( \frac{D^{1/3} \mu_1}{w \rho_1} \right)^{3/4}.$$

Приравнивая  $h$  и  $\lambda_0$ , найдем, что

$$(8) \quad d_{\Pi} = 2,74 \left( \frac{D^{1/3} \mu_1}{w \rho_1} \right)^{3/4}.$$

Подставляя в (7) выражения (1), (8), получаем

$$S/S_{\Pi} = 0,863\beta M^{0,15},$$

где  $M = \frac{\mu_1^5 w^3}{D \rho_1 \sigma^*}$  -- безразмерный параметр.

В результате для безразмерного коэффициента длины пути смешения окончательно имеем

$$(9) \quad a_3 = 0,39(1 - \beta)(1 - 0,863\beta M^{0,15}).$$

Толщину ламинарного подслоя, очевидно, можно считать аналогично однофазной жидкости:  $\delta = v_{*3} \delta_{\Lambda} / v_3 = 7,8$ .

Таким образом, уравнение движения разбавленной эмульсии в трубе принимает вид

$$[b_3 + a_3(y_0 - \delta_0)(1 - y_0)] \frac{du/v_{*3}}{dy_0} = 1 - y_0,$$

где  $b_3 = v_3 / rv_{*3}$ ,  $\delta_0 = \delta_{\Lambda} / r$ ,

$$a_3 = 0 \text{ при } y_0 < \delta_0;$$

$$a_3 = 0,39(1 - \beta)(1 - 0,863\beta M^{0,15}) \text{ при } y_0 \geq \delta_0.$$

Интегрируя это уравнение с учетом плавного смыкания с ламинарным подслоем, имеем

$$(10) \quad \frac{u}{v_{*3}} = \frac{1}{b_3} \left( y_0 - \frac{y_0^2}{2} \right) \text{ при } y_0 < \delta_0,$$

$$\frac{u}{v_{*a}} = \frac{1}{2a_a} \left\{ \ln \left[ 1 + \frac{a_a}{b_a} (y_0 - \delta_0)(1 - y_0) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1 - \delta_0}{V\Delta} \ln \frac{\{V\Delta + [2y_0 - (1 + \delta_0)]\} \{V\Delta - (\delta_0 - 1)\}}{\{V\Delta - [2y_0 - (1 + \delta_0)]\} \{V\Delta + (\delta_0 - 1)\}} \right\} + \delta \left( 1 - \frac{\delta_0}{2} \right)$$

при  $y_0 \geq \delta_0$ , где  $V\Delta = \sqrt{4 \frac{b_a}{a_a} + (1 - \delta_0)^2}$ .

Формулы (10) дают распределение скорости во всем диапазоне изменения  $y_0$  от 0 до 1. Причем на оси трубы, т. е. при  $y_0=1$ , удовлетворяется условие  $du/dy=0$ .

Коэффициент сопротивления при течении эмульсии в трубах определяется формулой

$$\lambda_a = 2 \frac{D}{L} \frac{\Delta p}{\rho_a w^2} = 8 \left( \frac{v_{*a}}{w} \right)^2,$$

где  $\Delta p$  — перепад давления на длине  $L$ .

Среднее значение скорости определяется интегралом

$$w = 2 \int_0^1 (1 - y_0) u dy_0.$$

При этом интегрирование разбивается на два участка: от 0 до  $\delta_0$ , где  $a_a=0$ , и от  $\delta_0$  до 1, где  $a_a$  определяется по (9). При интегрировании от  $\delta_0$  до 1, следуя [4-6], воспользуемся заменой выражения (10) для этого интервала на выражение

$$\frac{u}{v_{*a}} = \frac{1}{a_a} \ln \left[ 1 + \frac{a_a}{b_a} (y_0 - \delta_0) \right] + \delta + f(y_0/b_a),$$

которое при малых значениях  $b_a$  отличается от (10) лишь малой поправкой  $f(y_0/b_a)$ , проявляющей только вблизи оси трубы.

Формулы для  $w/v_{*a}$  и  $\lambda_a$  имеют вид

$$(11) \quad \frac{w}{v_{*a}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}_a b_a = \frac{1}{b_a} \left( \delta_0^2 - \delta_0^3 + \frac{\delta_0^4}{4} \right) + \frac{a_a^2}{a_a^3} \left[ \alpha^2 \left( \ln \alpha - \frac{3}{2} \right) + \right. \\ \left. + 2\alpha - \frac{1}{2} \right] + \delta - \varepsilon; \\ \lambda_a = \frac{8}{\left( \frac{\operatorname{Re}_a b_a}{2} \right)^2},$$

#### Физические свойства жидкостей при температуре 20°C

Рабочая жидкость	Вязкость кинематическая, м <sup>2</sup> /с	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Межфазное натяжение на границе раздела трансформаторное масло—вода, Н/м
Вода	1,7 · 10 <sup>-6</sup>	998	44,8 · 10 <sup>-3</sup>
Трансформаторное масло *	24,3 · 10 <sup>-6</sup>	896	

\* В трансформаторном масле поверхностно-активными являются асфальтово-смолистые вещества.

