

бым решением уравнения (20) ($T(\xi) = 0$), которое существует только, если $n > 1$ [6].

В [1] было показано, что в средах с коэффициентом температуропроводности anT^{n-1} ($n > 1$) тепловые возмущения распространяются с конечной скоростью. Конечность скорости распространения тепловых возмущений и снос жидкости в пристенной струе являются в итоге причинами существования в рассматриваемом случае стационарной поверхности — фронта «тепловой волны», разделяющей области с $T \neq 0$ и $T = 0$. Как отмечалось в [7], существование фронта «тепловой волны» связано с наличием особого решения обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего автомодельное распределение температуры.

В заключение отметим, что все установленные выше результаты автоматически переносятся на соответствующую задачу нелинейной диффузии.

Поступила 8 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Компанец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. — Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. М., Изд-во АН СССР, 1950.
2. Мартинсон Л. К., Павлов К. Б. К вопросу о пространственной локализации тепловых возмущений в теории нелинейной теплопроводности. — ЖВММФ, 1972 т. 12, № 4, с. 1048—1053.
3. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
4. Акатнов Н. И. Распространение плоской ламинарной струи жидкости вдоль твердой стенки. — «Труды ЛПИ. Энергомашиностроение. Техническая гидромеханика», 1953, № 5.
5. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. М., «Наука», 1965.
6. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Л., Гостехтеориздат, 1950.
7. Павлов К. Б. Пространственная локализация тепловых возмущений при нагревании сред с объемным поглощением тепла. — ПМТФ, 1973, № 5, с. 96—101.

УДК 532.72

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ К КАПЛЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ПЕКЛЕ И КОНЕЧНЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин,
В. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев

(Москва)

Первое приближение в задаче стационарной конвективной диффузии к сферической частице в однородном поступательном потоке было получено для нулевого [1] и для конечных чисел Рейнольдса [2, 3]. Двучленное разложение в случае стоксова обтекания твердой частицы дано в [4].

Предполагаем, что концентрация вещества, растворенного в потоке, постоянна вдали от капли, а на поверхности происходит полное его поглощение. В сферической системе координат, связанной с каплей, безразмер-

ное уравнение конвективной диффузии и граничные условия имеют вид (Re — число Пекле)

$$(1) \quad v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} = e^2 \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) \right\},$$

$$r = 1, \quad c = 0; \quad r = \infty, \quad c = 1,$$

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad e^2 = \text{Pe}^{-1} = \frac{D}{aU}.$$

Здесь в качестве масштабов концентрации, скорости и длины выбраны концентрация на бесконечности, скорость набегающего потока U и радиус капли a ; угол θ отсчитывается от направления потока на бесконечности.

Для поля скоростей используем выражения, полученные для капли методом сращиваемых асимптотических разложений [5]:

$$(2) \quad \psi = \psi_0 + \text{Re} \psi_1 \quad (\text{Re} = aU/\nu),$$

$$\psi_0 = \frac{1}{2} (r-1) \left[r - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\beta+1} \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right] \sin^2 \theta,$$

$$\psi_1 = \frac{1}{8} \frac{3\beta+2}{\beta+1} \psi_0 - \frac{1}{16} \frac{3\beta+2}{\beta+1} (r-1) \left[r - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\beta+1} - \frac{1}{10} \frac{\beta}{(\beta+1)^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{5\beta+6}{r^2} \right) \right] \sin^2 \theta \cos \theta,$$

где β — отношение вязкостей капли и окружающей ее жидкости; Re — число Рейнольдса.

Будем считать число Пекле большим (параметр e малым), введем растянутую координату Y в диффузионном пограничном слое и представим функцию тока (2) в виде ряда

$$(3) \quad \psi = \sum_{n=1}^{\infty} e^n Y^n \lambda_n(\theta), \quad \lambda_n(\theta) = \frac{\partial^n \psi}{\partial r^n} \Big|_{r=1}, \quad Y = \frac{r-1}{e},$$

$$\lambda_1(\theta) = \frac{1}{2(\beta+1)} \left\{ 1 + \frac{1}{8} \text{Re} \gamma(\beta) [1 - \gamma_1(\beta) \cos \theta] \right\} \sin^2 \theta = A(\theta),$$

$$\lambda_2(\theta) = \frac{1}{4} \gamma(\beta) \left\{ 1 + \frac{1}{8} \text{Re} \gamma(\beta) [1 - \gamma_2(\beta) \cos \theta] \right\} \sin^2 \theta, \dots,$$

$$\gamma(\beta) = \frac{3\beta+2}{\beta+1}, \quad \gamma_1(\beta) = \frac{4\beta+5}{5\beta+5}, \quad \gamma_2(\beta) = \frac{5\beta+2}{3\beta+2} \gamma_1(\beta).$$

Для того чтобы свести исходную задачу к последовательному решению уравнений теплопроводности, введем новые переменные

$$(4) \quad \zeta = A(\theta) Y, \quad t = T(\theta) = \int_0^\pi A(\tau) \sin \tau d\tau \quad (\theta = T^{-1}(t))$$

и будем искать решение в виде

$$(5) \quad c = \sum_{n=0}^{\infty} e^n c_n(\zeta, t).$$

Переходя в исходной задаче (1) к переменным (4) и используя представление (5), для последовательного определения $c_n(\zeta, t)$ имеем следу-

ющее уравнение и граничные условия:

$$(6) \quad (\partial/\partial t - \partial^2/\partial \xi^2) c_n = F_n(c_0(\xi, t), \dots, c_{n-1}(\xi, t)) = f_n(\xi, t),$$

$$\xi = 0, c_n = 0; \quad \xi = \infty, \quad c_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \geq 1, \end{cases}$$

$$F_0 = 0,$$

$$F_1(c_0) = \frac{2}{A^0(t)} \left\{ [1 - B(t)] \xi \frac{\partial}{\partial t} + \left[1 + \frac{1}{2} A^0(t) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \frac{d}{dt} \left(\frac{B(t)}{A^0(t)} \right) \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \right\} c_0(\xi, t), \dots,$$

$$A^0(t) = A(T^{-1}(t)), \quad B(t) = \lambda_2(T^{-1}(t)) [A^0(t)]^{-1},$$

где $F_n(c_0, \dots, c_{n-1})$ — коэффициент при e^n , определенный подстановкой выражения (5) в уравнение (3), при этом положено $c_n = 0$. При таком выборе переменных ξ, t (4) нулевой член представления (5) соответствует приближению диффузионного пограничного слоя [1].

Формулировка задачи (6) должна быть дополнена условием для концентрации в точке натекания $\theta^- = \pi$ (точке зарождения диффузионного пограничного слоя) $c(\theta^- = \pi) = 1$ [1]. Поэтому начальным условием для $c_n(\xi, t)$ примем

$$(7) \quad c_n(t=0) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \geq 1. \end{cases}$$

Решение задачи (6), (7) имеет вид [1, 6]

$$c_n(t, \xi) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\tau^2} d\tau, & \eta = \frac{\xi}{2t^{1/2}}, \quad n = 0, \\ \int_0^\infty \int_0^t [G(\xi, \xi, t - \tau) - G(\xi, -\xi, t - \tau)] f_n(\xi, \tau) d\tau d\xi, & n \geq 1, \end{cases}$$

$$G(\xi, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{(\xi - \xi)^2}{4t}\right\},$$

$$f_1(\xi, \tau) = \frac{2}{A^0(\tau)\sqrt{\pi\tau}} \left\{ 1 + (B(\tau) - 1 + \tau A^0(\tau) \frac{d}{d\tau} \left[\frac{B(\tau)}{A^0(\tau)} \right]) \frac{\xi^2}{2\tau} \right\} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau}\right), \dots$$

Безразмерный дифференциальный поток на каплю определяется в виде

$$(8) \quad j(\theta) = \frac{\partial c}{\partial r} \Big|_{r=1} = \frac{A(\theta)}{e} \frac{\partial c}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} e^n j_n(\theta),$$

$$j_n(\theta) = A(\theta) \frac{\partial c_n}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = A(\theta) \begin{cases} 2\pi^{-1/2} t^{-1/2}, & n = 0, \\ \int_0^\infty \int_0^t \Lambda(\xi, t - \tau) f_n(\xi, \tau) d\xi d\tau, & n \geq 1, \end{cases}$$

$$\Lambda(\xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\xi}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right).$$

Для полного диффузионного потока на каплю имеем

$$(9) \quad I = \int_{\partial\sigma} j d\sigma = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} e^n I_n,$$

$$I_n = 2\pi \int_0^{\pi} \sin \theta A(\theta) \left. \frac{\partial c_n}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} d\theta = 2\pi \int_0^{t_0} \left. \frac{\partial c_n}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} dt,$$

$$t_0 = \frac{2}{3(1+\beta)} \left(1 + \frac{1}{8} \operatorname{Re} \gamma(\beta) \right),$$

где величина $\left. \frac{\partial c_n}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}$ определена в выражении (8).

В [3] был получен главный член разложения (9). Переставляя пределы интегрирования в выражениях (8), (9) и последовательно интегрируя вначале по ξ , а потом по t , получаем следующий член ряда (9):

$$\operatorname{Sh}_1(\beta, \operatorname{Re}) = I_1/4\pi = \frac{4}{\pi t_0} \int_0^{t_0} \frac{\sqrt{\tau(t_0 - \tau)}}{A^0(\tau)} [1 + B(\tau)] d\tau.$$

Используя соотношения (3), (4), можно показать, что при $\operatorname{Re} = 0$ величина $I_1(\beta, 0)$ линейно зависит от параметра β . Поэтому удобно представить зависимость числа Шервуда от β и Re в виде

$$(10) \quad \operatorname{Sh}_1(\beta, \operatorname{Re}) = 0,825 + 0,620\beta + \Phi(\beta, \operatorname{Re}), \quad \Phi(\beta, 0) = 0.$$

Все коэффициенты и функция $\Phi(\beta, \operatorname{Re})$ в выражении (10) получены численно. Функция $\Phi(\beta, \operatorname{Re})$ представлена на фигуре, где кривые 1—5 соответствуют значениям $\beta = 0; 0,5; 1; 5; 10$ (число в круглых скобках указывает величину $\Phi(\beta, 100)$).

Видно, что $\operatorname{Sh}_1(\beta, \operatorname{Re})$ растет с ростом числа Рейнольдса, а величина вклада $\Phi(\beta, \operatorname{Re})$ в $\operatorname{Sh}_1(\beta, \operatorname{Re})$ при $0 \leq \operatorname{Re} \leq 10$ не превышает 7%.

Используя [3], получаем с точностью до $O(\operatorname{Re}^{-1/2})$, следующее выражение для числа Шервуда:

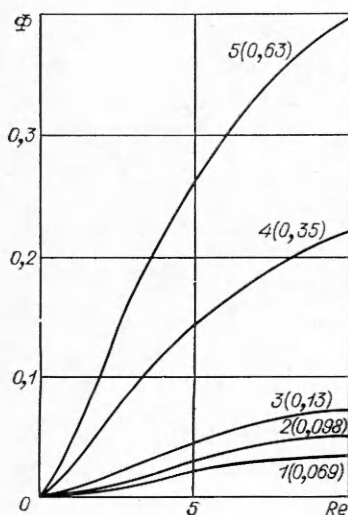
$$(11) \quad \operatorname{Sh}(\beta, \operatorname{Re}) = \operatorname{Pe}^{1/2} (\operatorname{Sh}_0 + \operatorname{Pe}^{1/2} \operatorname{Sh}_1) =$$

$$= 0,460 \operatorname{Pe}^{1/2} \left[\frac{1}{1+\beta} + \frac{3\beta+2}{(1+\beta)^2} \frac{\operatorname{Re}}{8} \right]^{1/2} +$$

$$+ 0,825 + 0,620\beta + \Phi(\beta, \operatorname{Re}).$$

Область применимости формулы (11) ограничена условием $\operatorname{Sh}_0 \gg \operatorname{Pe}^{-1/2} \operatorname{Sh}_1$, т. е. $\beta \operatorname{Re}^{-1/3} \ll 1$.

Отметим, что представление для концентрации в виде ряда (9) пригодно всюду, за исключением окрестности задней критической точки $\theta \leq O(\operatorname{Pe}^{-1/2})$ [4], где толщина диффузионного пограничного слоя $\delta = [j]^{-1}$ становится бесконечно большой. Аналогично [7] можно показать, что вклад этой области в полный диффузионный поток на каплю



имеет порядок $O(Re^{-1/2})$. Поэтому вычисление следующих членов ряда (9) приведет к дальнейшему улучшению формулы (11) лишь с получением решения для концентрации в области задней критической точки.

Поступила 27 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
2. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С. Диффузия к твердой сферической частице в потоке вязкой жидкости при конечных числах Рейнольдса. — «Изв. АН СССР. МЖГ», 1969, № 6.
3. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Чалюк А. Т. Диффузия к капле при больших числах Пекле и конечных числах Рейнольдса. — «Изв. АН СССР. МЖГ», 1972, № 2.
4. Acrivos A., Goddard J. D. Asymptotic expansions for laminar forced-convection heat and mass transfer. Pt 1. Low speed flows. — «J. Fluid Mech.», 1965, vol. 23, pt 2.
5. Taylor T. D., Acrivos A. On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number. — «J. Fluid Mech.», 1964, vol. 18, pt 3.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1972.
7. Sin P. H., Newman J. Mass transfer to the rear of a sphere in Stokes flow. — «Int. J. Heat and Mass Transfer», 1967, vol. 10, p. 1749—1756.

УДК 532.529.5 : 66.065.5

УРАВНЕНИЯ ТЕРМОГИДРОМЕХАНИКИ ДВУХФАЗНОЙ ПОЛИДИСПЕРСНОЙ СРЕДЫ С ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ ПРИ НЕПРЕРЫВНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЧАСТИЦ ПО РАЗМЕРАМ

И. Н. Дорохов, В. В. Кафаров, Э. М. Кольцова

(Москва)

1. Рассмотрим гетерогенную смесь двух фаз, из которых первая фаза несущая, а вторая присутствует в виде отдельных твердых частиц различных размеров, непосредственными взаимодействиями между которыми можно пренебречь. Примем гипотезу квазигомогенности [1—3]: расстояния, на которых параметры течения смеси меняются существенно, много больше размеров самих частиц и расстояний между ними. В каждой точке объема, занятого смесью, можно ввести объемные содержания фаз α_i и средние плотности ρ_i , причем

$$\rho = \rho_1 \alpha_1 + \rho_2 \alpha_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \rho_i = \rho_i^0 \alpha_i,$$

где индекс 1 относится к несущей фазе, а 2 — ко всей дисперсной фазе; ρ_i — плотность i -й составляющей смеси. Дисперсность второй фазы характеризуется функцией $f(r)$, так что $f(r)dr$ — число частиц в единице объема смеси, размеры (объемы) которых находятся в пределах от r до $r + dr$. Плотность второй фазы непрерывно распределена на отрезке $[0, R]$, где