

УДК 519.62, 621.38

## Моделирование нелинейных колебаний в микрогенераторе тактовой частоты\*

С.И. Фадеев<sup>1,2</sup>, В.В. Когай<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090

<sup>2</sup>Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mails: fadееv@math.nsc.ru (Фадеев С.И.), kogai@math.nsc.ru (Когай В.В.)

**Фадеев С.И., Когай В.В.** Моделирование нелинейных колебаний в микрогенераторе тактовой частоты // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд.-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 4. — С. 499–511.

В данной статье рассматривается математическая модель микрогенератора нового типа, основанная на возбуждении колебаний подвижного электрода в микрозазоре электростатическими силами. Принцип работы микрогенератора аналогичен известной теории часов со спусковым ударным механизмом с тем отличием, что в уравнении движения формулировка правой части учитывает электростатическую природу импульсного воздействия. При этом, как показывает численный анализ, ограниченные колебания с ростом времени стремятся в фазовой плоскости к устойчивому предельному циклу и, таким образом, возникающие колебания устойчивы по отношению к внешним возмущениям. При исследовании периодических колебаний в зависимости от параметров модели используется решение краевой задачи для уравнения с разрывной правой частью, преобразованной к виду, позволяющему применить метод продолжения решения по параметру. Этим способом определена область в пространстве параметров модели, в которой существуют устойчивые предельные циклы.

DOI: 10.15372/SJNM20190408

**Ключевые слова:** математическая модель, микрогенератор, задача Коши, краевая задача, периодические колебания, предельный цикл, устойчивость, фазовая плоскость, продолжение решения по параметру.

**Fadееv S.I., Kogai V.V.** The simulation of nonlinear oscillations in a micro clock generator // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2019. — Vol. 22, № 4. — P. 499–511.

In this paper, we consider a mathematical model of a new type of a microgenerator, based on generating the oscillations of a mobile electrode in a micro-gap due to electrostatic forces. The principle of operation of the generator is analogous to the well-known theory of the clock-escapement mechanism, with the difference that in the equation of motion the form of the right-hand side corresponds to the electrostatic nature of the impulse action. The numerical analysis shows that the bounded oscillations with an increase in time tend towards a stable limit cycle in the phase plane and, thereby, the emerging oscillations are stable with respect to external perturbations. In studying periodic oscillations, depending on the parameters of a model, we use the solution of the boundary value problem for the equation with a discontinuous right-hand side, transformed to a form allowing the application of the numerical continuation method. In this way, the area in the plane of the model parameters is defined, in which stable limit cycles exist.

**Keywords:** mathematical model, microgenerator, Cauchy problem, boundary value problem, periodic oscillations, limit cycle, phase plane, continuation of the solution with respect to the parameter.

---

\*Работа выполнена в рамках Комплексной программы фундаментальных исследований СО РАН “Междисциплинарные интеграционные исследования” на 2018–2020 гг. (проект № 273).

## Введение

Микроэлектромеханические системы (МЭМС) относятся к быстро развивающейся отрасли электронной промышленности по разработке принципиально новых микроэлектронных устройств с широким спектром практического применения [1–5]. В последние годы широкое распространение получили принципиально новые микроэлектромеханические генераторы тактовой частоты (МЭМС-генераторы). В данной статье приводятся результаты исследования математической модели микрогенератора, относящегося к приборам класса МЭМС.

В схеме рассматриваемого микрогенератора основной компонентой является подвижный электрод в виде недеформируемой микроплатформы, прикреплённой к пружине, совершающей колебания в межэлектродном микрозазоре в присутствии электрического поля. За счёт подкачки энергии в виде воздействия на подвижный электрод последовательности прямоугольных электростатических импульсов конечной длительности достигается режим незатухающих колебаний с постоянной амплитудой в среде с сопротивлением. При этом последовательность импульсов определяется самим процессом колебаний, когда импульсное воздействие происходит всякий раз в момент прохождения подвижным электродом исходной позиции с положительной скоростью. Тот же принцип подкачки энергии реализуется в известной теории работы часов со спусковым ударным механизмом [6].

Схема конструкции генератора частоты представлена на рисунке 1. Здесь 1 — неподвижный электрод, 2 — диэлектрик толщины  $h$  с высоким значением диэлектрической постоянной  $\varepsilon$ , 3 — подвижный электрод (платформа), 4 — воздушный зазор между поверхностью диэлектрика и поверхностью платформы, занимающей в текущий момент времени  $t$  положение  $Y(t)$ , 5 — пружина, 0 — положение платформы в начальный момент времени,  $V$  — постоянная разность потенциалов между электродами в моменты электростатического импульсного воздействия.

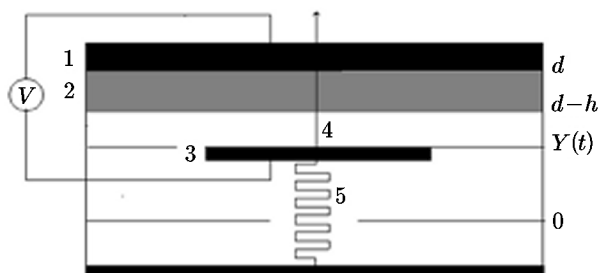


Рис. 1. Схема конструкции генератора частоты

Отметим, что важной особенностью данной конструкции является использование в межэлектродном микрозазоре тонкой кристаллической плёнки с большим значением диэлектрической проницаемости и с высокой электрической прочностью, покрывающей поверхность платформы [4]. Это даёт возможность значительно увеличить амплитуду прикладываемого к структуре напряжения без пробоя в воздушном зазоре.

## 1. Математическая модель

В предлагаемой математической модели микрогенератора нелинейные колебания недеформируемой платформы рассматриваются как колебания материальной точки мас-

сы  $M$  под воздействием повторяющихся электростатических импульсов и упругой силы пружины в среде с сопротивлением. Закон движения платформы, которая в начальный момент времени находится в невозмущённом состоянии, описывается решением  $Y(t)$  задачи Коши:

$$\begin{aligned} t \geq 0, \quad M \frac{d^2 Y}{dt^2} + 2B \frac{dY}{dt} + GY &= \sum_{k=0} F_k, \\ Y(0) = 0, \quad \frac{dY}{dt}(0) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $B > 0$  — параметр, определяющий сопротивление среды,  $G > 0$  — параметр, характеризующий жёсткость пружины.

Правую часть дифференциального уравнения (1) формирует последовательность прямоугольных импульсов длительности  $H$ , обусловленных электростатическим притяжением при постоянной разности потенциалов  $V$ , которые действуют на платформу на временных полуинтервалах  $(t_k, t_k + H]$ ;  $H < t_{k+1}$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $t_0 = 0$ . Вне этих полуинтервалов платформа совершает свободные колебания. Таким образом,  $F_k$  записывается в виде:

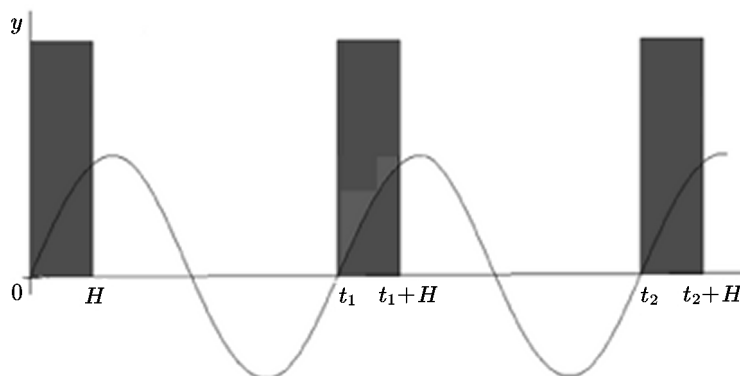
$$F_k = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2 \left( d + \frac{h}{\varepsilon} - Y \right)^2}, & t \in (t_k, t_k + H], \\ 0, & t \notin (t_k, t_k + H], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (2)$$

здесь  $S$  — площадь платформы,  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\varepsilon_0 = 8.85419 \cdot 10^{-12}$ . Зависимость силы электростатического притяжения электродов  $F_k$  от  $Y$  следует из теории плоского конденсатора с узким зазором между электродами, разделёнными воздушным зазором и слоем диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Значения  $t_k$ , определяющие момент подачи импульса, находятся в процессе интегрирования задачи Коши (1) при выполнении условий:

$$Y(t_k) = Y_k = 0, \quad \frac{dY}{dt}(t_k) = Y'_k > 0. \quad (3)$$

Важной составляющей численного исследования математической модели микрогенератора, представленной задачей Коши (1)–(3), является определение совокупности значений параметров модели (область  $\Omega$ ), при которых возникают ограниченные колебания платформы, не сопровождающиеся соударениями с поверхностью диэлектрика (см. рис. 1). Из физических соображений, например, очевидно, что существует пороговое значение разности потенциалов  $V$  в выражении (2) для  $F_k$ , зависящее от других параметров модели (величины зазора между электродами, жёсткости пружины, и т. д.). Превышение порогового значения приводит к соударению. В дальнейшем будут приведены результаты численного построения области  $\Omega$ .

Предположим, что решение задачи Коши (1)–(3) описывает ограниченные колебания. Тогда в соответствии с видом правой части (2) колебания платформы будут описываться последовательностью решений задач Коши на полуинтервалах  $(0, H]$ ,  $(H, t_1]$ ,  $(t_1, t_1 + H]$ ,  $(t_1 + H, t_2]$  и т. д. с соответствующими выражениями  $F_k$ , где  $t_1, t_2$  и т. д. — моменты подачи импульсов, определяемые условиями (3). При этом решение  $Y(t)$  задачи Коши (1) сохраняет непрерывность вместе с первой производной. Схема подачи импульсов, сопровождающих колебания, представлена на рис. 2.



**Рис. 2.** Временные интервалы воздействия прямоугольных импульсов на платформу

Согласно схеме, представленной на рис. 2, временной отрезок первого импульса, прерывающийся к  $t = t_0 = 0$ , используется для запуска микрорезонатора, в котором платформа в начальный момент времени находится в состоянии покоя. С учётом (2) колебания платформы на полуинтервале  $(0, H]$  описываются решением  $Y(t)$  задачи Коши:

$$t \in (0, H], \quad M \frac{d^2 Y}{dt^2} + 2B \frac{dY}{dt} + GY = \frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2 \left( d + \frac{h}{\varepsilon} - Y \right)^2}, \quad (4)$$

$$Y(t_0) = Y_0 = 0, \quad \frac{dY}{dt}(t_0) = Y'_0 = 0.$$

Пусть из решения (4) известны  $Y(t)$  вместе с производной  $\frac{dY}{dt}(t)$  при  $t = H$ , тогда

$$U_0 = Y(H), \quad U'_0 = \frac{dY}{dt}(H).$$

В силу непрерывности решения (1) вместе с производной колебания платформы на полуинтервале  $(H, t_1]$  описываются решением задачи Коши:

$$t \in (H, t_1], \quad M \frac{d^2 Y}{dt^2} + 2B \frac{dY}{dt} + GY = 0, \quad Y(H) = U_0, \quad \frac{dY}{dt}(H) = U'_0. \quad (5)$$

Интегрирование (5) завершается определением  $t_1$  из условий (3) для  $k = 1$ . Следующий шаг состоит в рассмотрении задачи Коши, аналогичной (4), на временном полуинтервале второго импульса:

$$t \in (t_1, t_1 + H], \quad M \frac{d^2 Y}{dt^2} + 2B \frac{dY}{dt} + GY = \frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2 \left( d + \frac{h}{\varepsilon} - Y \right)^2}, \quad (6)$$

$$Y(t_1) = Y_1 = 0, \quad \frac{dY}{dt}(t_1) = Y'_1$$

и так далее.

Отметим, что уравнения, описывающие колебания в простейшей модели часового механизма [6], следуют из (1)–(3) при условии, что  $F_k$  в последовательности прямоугольных импульсов (2) на временном полуинтервале  $(t_k, t_k + H]$  имеет постоянное значение, равное  $R_0 > 0$ :

$$F_k = \begin{cases} R_0, & t \in (t_k, t_k + H], \\ 0, & t \notin (t_k, t_k + H], \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

При этом решение задачи Коши описывает процесс выхода на периодическое решение, которому соответствует устойчивый предельный цикл в фазовой плоскости.

Завершает формулировку математической модели переход в уравнениях к безразмерным величинам. Пусть  $T$  и  $d + h/\varepsilon$  — масштабы времени и линейных размеров для переменных в задаче Коши (1). Дополнительно потребуем, чтобы масштаб времени  $T$  определялся из условия равенства единице безразмерной комбинации  $GT^2/M$ . После перехода в (1) к безразмерному времени  $\tau$  и безразмерному линейному размеру  $y$  по формулам

$$t = T\tau, \quad Y = \left(d + \frac{h}{\varepsilon}\right)y, \quad T = \sqrt{\frac{M}{G}} \quad (7)$$

получим преобразованную задачу Коши в виде

$$\tau \geq 0, \quad \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2b\frac{dy}{d\tau} + y = \sum_{k=0} f_k, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy}{d\tau}(0) = 0, \quad (8)$$

где

$$b = B\sqrt{\frac{1}{MG}}, \quad f_k = \begin{cases} \frac{q}{(1-y)^2}, & \tau \in (\tau_k, \tau_k + \delta], \quad \delta < \tau_{k+1}, \\ 0, & \tau \notin [\tau_k, \tau_k + \delta], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (9)$$

$$q = \frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2G\left(d + \frac{h}{\varepsilon}\right)^3}, \quad \delta = H\sqrt{\frac{G}{M}}, \quad \tau_k = t_k\sqrt{\frac{G}{M}}.$$

Значения  $\tau_k$  определяются из условий:

$$y(\tau_k) = y_k = 0, \quad \frac{dy}{d\tau}(\tau_k) = y'_k > 0. \quad (10)$$

Формулировка задачи Коши (8) содержит только три безразмерных параметра:  $q$ ,  $\delta$  и  $b$ , представляющих комбинации размерных параметров (9) задачи Коши (1). Это позволяет достаточно компактно в виде диаграмм отобразить свойства решений изучаемой математической модели в зависимости от параметров.

## 2. Метод вычислений

Пусть при заданной совокупности параметров  $q$ ,  $\delta$  и  $b$  решение  $y(\tau)$  задачи Коши (8) описывает ограниченные “безразмерные” колебания платформы, возникающие под воздействием повторяющихся прямоугольных импульсов длительности  $\delta$  с постоянной амплитудой  $q$  “безразмерной” силы электростатического притяжения платформы. В дальнейшем будет использоваться терминология, относящаяся к описанию колебаний решением задачи Коши (8) без упоминания о “безразмерности” величин.

В соответствии со схемой импульсов, представленной на рис. 2, рассмотрим временной отрезок  $(\tau_k, \tau_{k+1}]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , на котором описание колебаний микрорезонатора сводится к последовательному решению двух задач Коши на временных отрезках  $(\tau_k, \tau_k + \delta]$  и  $(\tau_k + \delta, \tau_{k+1}]$ .

На полуинтервале  $(\tau_k, \tau_k + \delta]$  рассматривается задача Коши, формулировка которой с учётом определения  $f_k$  в (9) имеет вид:

$$\begin{aligned} \tau \in (\tau_k, \tau_k + \delta], \quad \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2b \frac{dy}{d\tau} + y &= \frac{q}{(1-y)^2}, \\ y(\tau_k) = 0, \quad \frac{dy}{d\tau}(\tau_k) &= y'_k. \end{aligned} \quad (11)$$

Начальные условия в (11) следуют из интегрирования задачи Коши (8) на предыдущем временном полуинтервале. При  $k = 0$  задаются нулевые начальные условия. В результате численного интегрирования задачи Коши (11) с использованием, например, классического метода Рунге–Кутты четвёртого порядка находятся значения

$$u_k = y(\tau_k + \delta), \quad v_k = \frac{dy}{d\tau}(\tau_k + \delta).$$

Далее, решение продолжается на полуинтервал  $(\tau_k + \delta, \tau_{k+1}]$ , где  $f_k = 0$ , как решение задачи Коши для однородного уравнения

$$\tau \in (\tau_k + \delta, \tau_{k+1}], \quad \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2b \frac{dy}{d\tau} + y = 0, \quad y(\tau_k + \delta) = u_k, \quad \frac{dy}{d\tau}(\tau_k + \delta) = v_k. \quad (12)$$

Точное решение (12) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \xi = \tau - \tau_k - \delta, \quad b^2 < 1, \quad \Delta = \sqrt{1 - b^2}, \\ y(\tau) = e^{-b\xi} \left[ \left( \cos(\Delta\xi) + b \frac{\sin(\Delta\xi)}{\Delta} \right) u_k + \frac{\sin(\Delta\xi)}{\Delta} v_k \right], \\ \frac{dy}{d\tau}(\tau) = e^{-b\xi} \left[ -\frac{\sin(\Delta\xi)}{\Delta} u_k + \left( \cos(\Delta\xi) - b \frac{\sin(\Delta\xi)}{\Delta} \right) v_k \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда, в частности, определяется значение  $\tau_{k+1}$ , при котором  $y(\tau_{k+1}) = 0$ . В зависимости от начальных данных задачи Коши и знака  $u_k$  имеем

$$\begin{aligned} u_k > 0, \quad \tau_{k+1} &= \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{3\pi}{2} + \operatorname{arctg} \left( \frac{bu_k + v_k}{\Delta u_k} \right) \right], \\ u_k \leq 0, \quad \tau_{k+1} &= \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \left( \frac{bu_k + v_k}{\Delta u_k} \right) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

При этом выполняется условие импульсного воздействия

$$y(\tau_{k+1}) = y_{k+1} = 0, \quad \frac{dy}{d\tau}(\tau_{k+1}) = y'_{k+1} > 0,$$

и т. д. Таким образом, решение задачи Коши (8) находится как последовательность решений задач Коши (11), (12) на временных интервалах  $(\tau_k, \tau_{k+1}]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

Из численных экспериментов следует, что траектории в фазовой плоскости, определяемые решением задачи Коши (8)–(10), с ростом  $\tau$  стремятся к устойчивому предельному циклу, представляя в пределе устойчивые колебания с периодом  $T_p = \tau_{k+1} - \tau_k$ . Аналогично вычисление амплитуды колебаний на последовательности временных интервалов  $(\tau_k, \tau_{k+1}]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , позволяет в пределе определить амплитуду периодических колебаний.

### 3. Численные примеры

При малой временной длительности импульса и конечном значении произведения параметров  $q\delta$  возникающие колебания будут иметь такой же вид, как если бы возбуждались в результате чисто импульсных воздействий сосредоточенных сил величиной порядка  $q\delta$ . При этом воспроизводятся основные свойства колебаний, описанные в модели работы часового механизма [6], в частности выход на устойчивый предельный цикл решения задачи Коши (8)–(10).

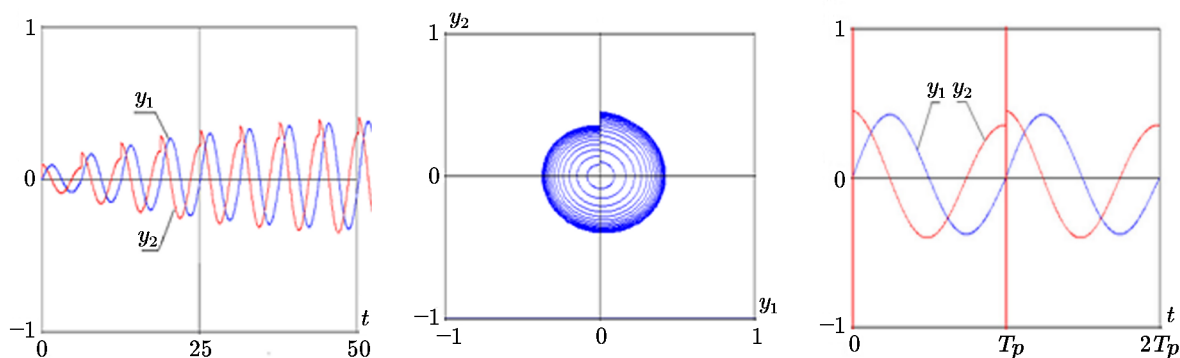
В то же время численное исследование рассматриваемой математической модели указывает на ряд нелинейных эффектов, связанных с электростатической природой импульсного воздействия, характеризуемого параметрами  $q$  и  $\delta$ . В частности, нелинейность проблемы проявляется в существовании областей параметров модели, в которых отсутствуют ограниченные колебания, а также областей, в которых форма колебаний не имеет физической интерпретации.

Результаты вычислений в рассмотренных ниже двух примерах иллюстрируют выход решения задачи (8)–(10) на устойчивый предельный цикл, качественно повторяя свойство колебаний, описанное в [6], при различных  $\delta$ .

На рис. 3 отражен переходной процесс на отрезке  $[0, 2000]$  по  $\tau$ , предшествующий образованию предельного цикла в фазовой плоскости  $(y_1, y_2)$ ,  $b = 0.04$ ,  $q = 10$ ,  $\delta = 0.01$ . При этом используются обозначения:

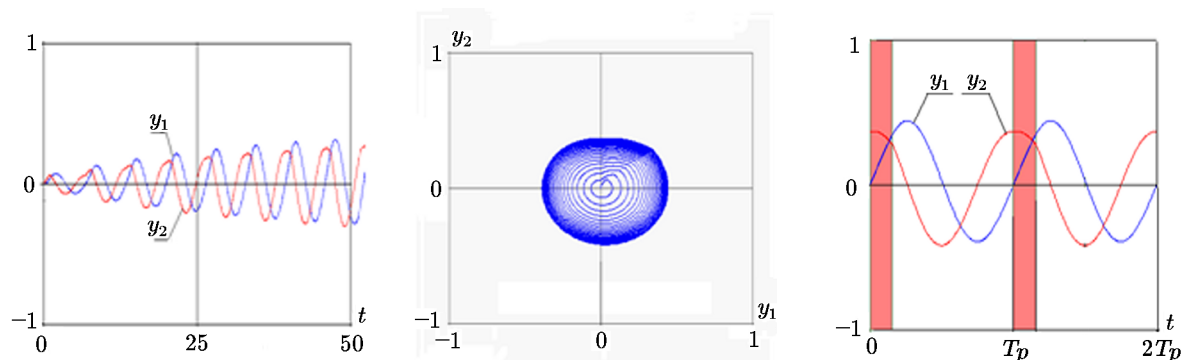
$$y_1(\tau) = y(\tau), \quad y_2(\tau) = \frac{dy}{d\tau}(\tau).$$

С течением времени фазовые траектории решения стремятся к устойчивому предельному циклу с периодом  $T_p = 6.2893$  и амплитудой  $A_m = 0.79893$ , которому соответствуют графики компонент  $y_1(\tau)$  и  $y_2(\tau)$  практически периодического колебания. Импульсный характер воздействия проявляется на графике компоненты  $y_2(\tau)$ , которая терпит практически разрыв при  $\tau = \tau_k$  в момент начала подачи импульса длительности  $\delta$ .



**Рис. 3.** Колебания, описываемые решением задачи Коши (8),  $b = 0.04$ ,  $q = 10$ ,  $\delta = 0.01$  на временном отрезке  $[0, 2000]$ . Построенные в итоге практически периодические решения приведены на временном отрезке, равном двум периодам  $T_p$ . Здесь каждый из отрезков  $[0, T_p]$  и  $[T_p, 2T_p]$  начинается с отрезка импульсного воздействия длительности  $\delta = 0.01$

Рассмотрим колебания, описываемые решением задачи Коши (8) при  $b = 0.04$ ,  $q = 0.08$ ,  $\delta = 1$ . Представленные в виде графиков на рис. 4 результаты вычислений аналогичны представлению на рис. 3. С течением времени колебания стремятся к устойчивому предельному циклу с периодом  $T_p = 6.4292$  и амплитудой  $A_m = 0.83143$ .



**Рис. 4.** Колебания, описываемые решением задачи Коши (8),  $b = 0.04$ ,  $q = 0.08$ ,  $\delta = 1$  на временном отрезке  $[0, 2000]$ . Построенные в итоге практически периодические решения приведены на временном отрезке, равном двум периодам  $T_p$ . Здесь каждый из отрезков  $[0, T_p]$  и  $[T_p, 2T_p]$  начинается с отрезка импульсного воздействия длительности  $\delta = 1$

Из рассмотренных примеров следует, что запуск микрорезонатора по схеме на рис. 2,  $b = 0.04$ ,  $q = 0.08$ , позволяет выйти на устойчивый предельный цикл, если  $0 < \delta < 1.1$ . Как будет показано в дальнейшем, кроме указанного интервала, существует другой интервал по параметру  $\delta$ , на котором существует устойчивый предельный цикл.

#### 4. Краевая задача, описывающая периодическое решение.

Из определения устойчивого предельного цикла следует, что соответствующие предельному циклу периодические колебания с периодом  $T_p$  описываются решением задачи Коши (8)–(10), если начальные условия принадлежат предельному циклу. В этом случае решение задачи Коши  $y(\tau)$  на отрезке, равном периоду, можно рассматривать как решение краевой задачи относительно  $y(\tau)$  и  $T_p$ , формулировка которой с учётом (8)–(10) имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \leq \tau \leq T_p, \quad \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2b \frac{dy}{d\tau} + y &= f, \\ y(0) = y(T_p), \quad \frac{dy}{d\tau}(0) &= \frac{dy}{d\tau}(T_p) \quad (\text{условия периодичности}), \\ y(0) = 0 & \quad (\text{условия трансверсальности}). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь параметр  $T_p$  подлежит определению, а

$$f = \begin{cases} \frac{q}{(1-y)^2}, & \tau \in [0, \delta), \quad \delta < T_p, \\ 0, & \tau \in (\delta, T_p]. \end{cases} \quad (16)$$

Отметим, что решение краевой задачи (15), (16), никак не связанное с проблемой устойчивости, определяет периодические колебания, описываемые решением задачи Коши (8)–(10), в случае их устойчивости.

Поскольку значение параметра  $T_p$  неизвестно, то организация численного исследования краевой задачи (15), (16), определённой на отрезке  $[0, T_p]$ , становится более простой, если краевые условия задаются на концах известного отрезка. Кроме того, предполагается, что рассматриваемая краевая задача имеет “стандартную” формулировку, в которой



краевые условия формулируются для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка нормального вида.

Выберем  $T_p$  в качестве масштаба аргумента  $\tau$ , полагая  $\tau = T_p \xi$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$ . Эквивалентная (15), (16) формулировка краевой задачи, в которой

$$y_1(\xi) = y(\xi), \quad y_2(\xi) = \frac{dy}{d\xi}(\xi),$$

после масштабирования записывается в виде

$$\begin{aligned} 0 \leq \xi \leq 1, \quad \frac{dy_1}{d\xi} &= T_p y_2, \quad \frac{dy_2}{d\xi} = T_p (f - 2by_2 - y_1), \\ y_1(0) &= y_1(1), \quad y_2(0) = y_2(1) \quad (\text{условия периодичности}), \\ y_1(0) &= 0 \quad (\text{условие трансверсальности}); \end{aligned} \quad (17)$$

$$f = \begin{cases} \frac{q}{(1-y)^2}, & \xi \in [0, \sigma), \quad \sigma = \frac{\delta}{T_p} < 1, \\ 0, & \xi \in (\sigma, 1]. \end{cases} \quad (18)$$

Обратим внимание, что в краевой задаче параметр  $\sigma$  определяет, согласно (18), положение разрыва производной функции  $y_2(\xi)$ , что затрудняет изучение зависимости решения от параметра  $\sigma$ . В связи с этим преобразуем краевую задачу (17), (18) к виду, в котором решение и производные решения краевой задачи будут уже непрерывно зависеть от параметров.

Разобьём отрезок  $[0, 1]$  по  $\xi$  на отрезки  $[0, \sigma]$  и  $[\sigma, 1]$ . И в соответствии с (18) переформулируем краевую задачу, полагая, что

$$\begin{aligned} u_1 &= y_1, & u_2 &= y_2, & \text{если } 0 \leq \xi < \sigma; \\ u_3 &= y_1, & u_4 &= y_2, & \text{если } \sigma \leq \xi < 1. \end{aligned}$$

При этом функции  $u_i(\xi)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , рассматриваются как решение краевой задачи:

$$\begin{aligned} 0 \leq \xi < \sigma, \quad \frac{du_1}{d\xi} &= T_p u_2, \quad \frac{du_2}{d\xi} = T_p \left( \frac{q}{(1-u_1)^2} - 2bu_2 - u_1 \right), \\ \sigma \leq \xi \leq 1, \quad \frac{du_3}{d\xi} &= T_p u_4, \quad \frac{du_4}{d\xi} = T_p (-2bu_4 - u_3), \\ u_1(0) &= u_3(1), \quad u_2(0) = u_4(1) \quad (\text{условия периодичности}), \\ u_1(\sigma) &= u_3(\sigma), \quad u_2(\sigma) = u_4(\sigma) \quad (\text{условия непрерывности}), \\ u_1(0) &= 0 \quad (\text{условие трансверсальности}). \end{aligned} \quad (19)$$

Краевая задача (19) принимает “стандартный” вид после преобразований, связанных с введением вместо  $\xi$  аргумента  $s$ ,  $s \in [0, 1]$ , при котором каждый из отрезков  $[0, \sigma]$ ,  $[\sigma, 1]$  переходит в отрезок  $[0, 1]$  по  $s$ . В итоге для определения функций  $u_i(s)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , и  $T_p$  имеем следующую краевую задачу для системы из 5 дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
& 0 \leq s \leq 1, \\
& \frac{du_1}{ds} = \delta u_2, \quad \frac{du_2}{ds} = \delta \left( \frac{q}{(1-u_1)^2} - 2bu_2 - u_1 \right), \\
& \frac{du_3}{ds} = (T_p - \delta)u_4, \quad \frac{du_4}{ds} = (T_p - \delta)(-2bu_4 - u_3), \\
& \frac{dT_p}{ds} = 0, \\
& u_1(0) = u_3(1), \quad u_2(0) = u_4(1) \quad (\text{условия периодичности}), \\
& u_3(0) = u_1(1), \quad u_4(0) = u_2(1) \quad (\text{условия непрерывности}), \\
& u_1(0) = 0 \quad (\text{условие трансверсальности}).
\end{aligned} \tag{20}$$

Связь между решениями краевой задачи (20) и краевой задачи (15), (16) имеет вид

$$\begin{aligned}
& y(\tau) = y_1(\tau), \quad \frac{dy}{d\tau}(\tau) = y_2(\tau), \\
& y_1(\tau) = \begin{cases} u_1(s), & s = \frac{\tau}{\delta}, \quad 0 \leq \tau < \delta, \\ u_3(s), & s = \frac{\tau - \delta}{T_p - \delta}, \quad \delta \leq \tau < T_p, \end{cases} \\
& y_2(\tau) = \begin{cases} u_2(s), & s = \frac{\tau}{\delta}, \quad 0 \leq \tau < \delta, \\ u_4(s), & s = \frac{\tau - \delta}{T_p - \delta}, \quad \delta \leq \tau < T_p. \end{cases}
\end{aligned} \tag{21}$$

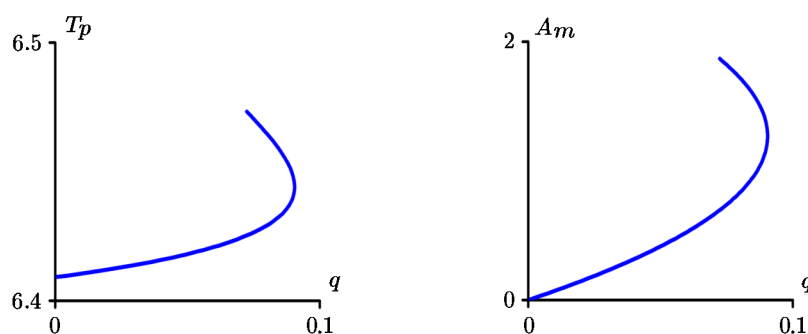
Выбранный в данной статье способ численного исследования краевой задачи (20) от параметров основывается на варианте метода продолжения по параметру решения краевой задачи в общей постановке, сформулированной на конечном отрезке для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейными краевыми условиями достаточно общего вида [7]. Здесь используется идея метода множественной стрельбы, предложенного С.К. Годуновым для решения линейных краевых задач. Метод множественной стрельбы редуцирует проблему к системе нелинейных уравнений, определяемой на серии задач Коши метода множественной стрельбы, относительно сеточных значений решения в узлах разбиения отрезка. Далее применяется вариант метода продолжения по параметру решения системы нелинейных уравнений с параметром, важной особенностью которого является возможность учёта множественности решений, возникающей в некоторой области изменения параметра в процессе продолжения по параметру.

Неформализуемой проблемой применения рассматриваемого метода продолжения по параметру, как и любого другого, является задание приемлемого начального приближения решения нелинейной краевой задачи при стартовом значении параметра, поскольку это требует учёта индивидуальных особенностей задачи. В случае краевой задачи (20) эффективным решением этой проблемы является использование решения задачи Коши (8)–(10) для определения периода и формы периодических колебаний. Это позволяет получить достаточно хорошее начальное приближение стартового решения краевой задачи (20) в итерационном процессе по Ньютону. Далее следует стандартная реализация алгоритма метода продолжения по параметру от стартового значения параметра.

При численном исследовании краевой задачи (20) метод продолжения решения по параметру использовался для определения областей в пространстве параметров  $q$ ,  $\delta$  и  $b$ , в которых существуют устойчивые периодические колебания, с границами возникновения множественности периодических решений.

Пример появления множественности периодических решений краевой задачи (20) в зависимости от параметров  $q$ ,  $b = 0.04$ ,  $\delta = 1$  представлен на рис. 5 в виде диаграмм зависимостей периода  $T_p$  и амплитуды периодических колебаний  $A_m$  от параметра  $q$ . Как показали вычисления, при возрастании  $q$  от 0 до  $q_0$ ,  $q_0 = 0.09045$ , решение краевой задачи, представленное диаграммами, описывает устойчивые периодические решения. Точки поворота на графиках при  $q = q_0$  служат границей множественности решений. После точек поворота возрастающие с убыванием  $q$  ветви графиков представляют неустойчивые периодические решения. При этом значения периода  $T_p$  и амплитуды  $A_m$  после поворота соответствуют естественному ограничению  $y(\tau) < 1$  решения краевой задачи. При  $q > q_0$  краевая задача не имеет решения в некоторой окрестности точки поворота и, следовательно, отсутствуют ограниченные колебания.

Аналогичный вид имеют диаграммы зависимостей периода  $T_p$  и амплитуды  $A_m$  периодических колебаний от параметра  $\delta$  на отрезке  $[0, \delta_0]$  с точкой поворота  $\delta_0 = 1.095$ .



**Рис. 5.** Диаграммы зависимости периода  $T_p$  и амплитуды периодических колебаний  $A_m$  от параметра  $q$  краевой задачи (20), полученные методом продолжения решения по параметрам  $q$ ,  $b = 0.04$ ,  $\delta = 1$ . Точка поворота при  $q = q_0 = 0.09045$  является границей множественности периодических решений

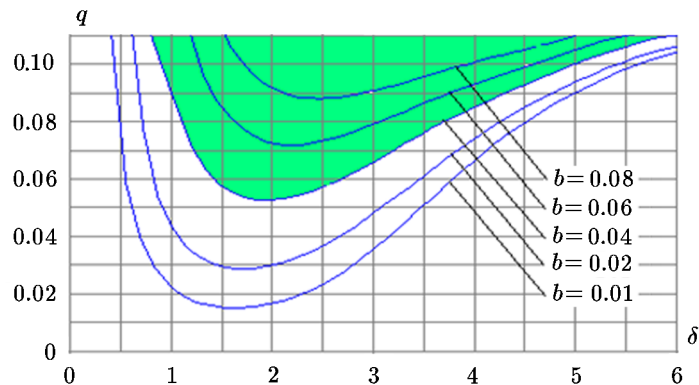
С использованием метода продолжения решения по параметрам  $q$  и  $\delta$  построены области в плоскости  $(q, \delta)$ ,  $0 < q < 0.11$ ,  $0 < \delta < 6$ , при различных значениях параметра  $b$ , в которых не существует ограниченных колебаний, описываемых решением задачи Коши (8)–(10). Результаты представлены на рис. 6. Как следствие применения метода продолжения по параметру, границы областей состоят из точек поворота. В качестве примера выделена область, соответствующая  $b = 0.04$ . Вне этих областей в прямоугольнике  $0 < q < 0.11$ ,  $0 < \delta < 6$  решение краевой задачи (20) определяет периодические колебания, устойчивость которых установлена численно из решения задачи Коши (8)–(10).

Ограничение  $\delta < 6$  связано с правилом задания последовательности импульсных воздействий, согласно которому импульс должен воздействовать всякий раз, когда платформа проходит нулевое положение с положительной скоростью. В связи с этим рассматриваются только те периодические решения  $y(\tau)$ , у которых на временном отрезке импульсного воздействия производная может принимать нулевое значение не более одного раза.

Диаграммы на рис. 6 носят универсальный характер, позволяя по заданной совокупности параметров математической модели микрогенератора найти значения безразмерных комбинаций:

$$q = \frac{\varepsilon_0 V^2 S}{2 \left( d + \frac{h}{\varepsilon} \right)^3}, \quad \delta = H \sqrt{\frac{G}{M}}, \quad b = B \sqrt{\frac{1}{MG}}.$$

Обращение к диаграммам даёт возможность определить существование ограниченных решений задачи Коши (1)–(3), выходящих на устойчивый предельный цикл.



**Рис. 6.** Диаграммы, определяющие в прямоугольнике на плоскости параметров  $(q, \delta)$ ,  $0 < q < 0.11$ ,  $0 < \delta < 6$ , при различных значениях параметра  $b$  области, в которых отсутствуют ограниченные колебания. Вне этих областей существуют устойчивые периодические колебания, определяющие в фазовой плоскости устойчивый предельный цикл

## 5. Заключение

Установленное в данной статье стремление ограниченных решений задачи Коши (1)–(3) к устойчивому предельному циклу в фазовой плоскости является важным свойством. Существование предельного цикла позволяет рассматривать задачу Коши как математическую модель микрогенератора, возбуждающего устойчивые периодические колебания подвижного элемента в среде с сопротивлением под воздействием последовательности электростатических импульсов постоянной длительности, реализующей обратную связь с колебательным процессом. В рамках модели это означает устойчивость периодических колебаний в микрорезонаторе к внешним возмущениям.

Предложенными в статье методами численного исследования математической модели в зависимости от параметров была установлена область значений параметров модели, при которых существует устойчивый предельный цикл, и тем самым, были указаны границы работоспособности микрогенератора.

Полученные результаты могут быть полезны для оценок параметров приборов при разработке микрогенераторов указанного типа.

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования “Центр данных ДВО РАН”, г. Хабаровск, <http://lits.ccfefbras.ru/>.

*Благодарности.* Авторы выражают благодарность Э.Г. Косцову, предложившему авторам статьи рассмотреть модель микрогенератора по аналогии с моделью простейшей схемы часов со спусковым ударным механизмом.

## Литература

1. **Косцов Э.Г.** Состояние и перспективы микро- и нанoeлектромеханики // Автометрия. — 2009. — Т. 45, № 3. — С. 3–52.
2. **Younis M.I.** MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics. — Springer Science & Business Media, 2011.

3. **Гринберг Я.С., Пашкин Ю.А., Ильичёв Е.В.** Наномеханические резонаторы // УФН. — 2012. — Т. 182, № 4. — С. 407–436.
4. **Косцов Э.Г., Фадеев С.И.** Новые электромеханические резонаторы для гигагерцевых частот // Автометрия. — 2013. — Т. 10, № 2. — С. 115–122.
5. **Фадеев С.И., Пиманов Д.О.** Исследование периодических решений в математических моделях микромеханики при импульсном периодическом воздействии // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. — 2013. — Т. 13, вып. 3. — С. 122–140.
6. **Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.** Теория колебаний. — М.: ФМ, 1959.
7. **Когай В.В., Фадеев С.И.** Применение продолжения по параметру на основе метода множественной стрельбы для численного исследования нелинейных краевых задач // Сиб. журн. индустр. математики. — 2001. — Т. 4, № 1. — С. 83–101.

*Поступила в редакцию 28 сентября 2018 г.*

*После исправления 20 ноября 2018 г.*

*Принята к печати 25 июля 2019 г.*

### Литература в транслитерации

1. **Koscov E.G.** Sostoyanie i perspektivy mikro- i nanoelektromekhaniki // Avtometriya. — 2009. — Т. 45, № 3. — С. 3–52.
2. **Younis M.I.** MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics. — Springer Science & Business Media, 2011.
3. **Grinberg Ya.S., Pashkin Yu.A., Il'ichev E.V.** Nanomekhanicheskie rezonatory // UFN. — 2012. — Т. 182, № 4. — С. 407–436.
4. **Koscov E.G., Fadeev S.I.** Novye elektromekhanicheskie rezonatory dlya gigogercevykh chastot // Avtometriya. — 2013. — Т. 10, № 2. — С. 115–122.
5. **Fadeev S.I., Pimanov D.O.** Issledovanie periodicheskikh resheniy v matematicheskikh modelyakh mikromekhaniki pri impul'snom periodicheskom vozdeystvii // Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika, mekhanika, informatika. — 2013. — Т. 13, vyp. 3. — С. 122–140.
6. **Andronov A.A., Vitt A.A., Khaykin S.E.** Teoriya kolebaniy. — М.: FM, 1959.
7. **Kogay V.V., Fadeev S.I.** Primenenie prodolzheniya po parametru na osnove metoda mnozhestvennoy strel'by dlya chislennogo issledovaniya nelineynykh kraevykh zadach // Sib. zhurn. industr. matematiki. — 2001. — Т. 4, № 1. — С. 83–101.

