

УДК 536.3+536.42

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА В СЛОЕ С ПРОЗРАЧНЫМИ И ПОЛУПРОЗРАЧНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Н. А. Рубцов, С. Д. Слепцов, Н. А. Саввинова*

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск

*Якутский государственный университет, 677000 Якутск

E-mails: sleptsov@itp.nsc.ru, nasavv@mail.ru

Проведено численное моделирование однофазной задачи Стефана в полупрозрачном слое с прозрачными, непоглощающими и частично поглощающими излучение границами. Показано, что при малых температурах среды на границе образца, подверженного облучению, определяющую роль играет конвекция, а при высоких — излучение. Отсутствие поглощения на границах слоя приводит к ускорению нагрева пластины и существенному замедлению процессов плавления.

Ключевые слова: излучение, поглощение, нагрев, фазовый переход, конвекция, теплопроводность.

Введение. Интерес к исследованиям радиационно-кондуктивного теплообмена в полупрозрачных средах с учетом фазового перехода первого рода существенно возрос, что обусловлено практической реализацией данного процесса (стекловарение, рост кристаллов, тепловая защита, таяние льдов). Впервые численное моделирование однофазной задачи Стефана в слое среды с различными показателями объемного поглощения и излучения материалами проведено в работе [1]. Авторы этой работы ввели преобразование, позволяющее фиксировать фронт фазового перехода [2]. Данное обстоятельство облегчает качественный анализ результатов решения, но затрудняет процесс вычисления. При этом радиационная часть задачи решалась методом дискретных ординат и направленного луча. Следуя [1], в работе [3] рассматривалась однофазная задача Стефана с учетом отражения излучения от границ полупрозрачного слоя. Принципиальное отличие данной работы от [1] заключается в применении эффективного метода средних потоков [4] для определения радиационной части уравнения энергии. Указанный метод позволил получить результаты, хорошо согласующиеся с результатами работы [1].

Постановка задачи и метод решения. В данной работе исследуется нагрев и последующее плавление бесконечного плоскопараллельного образца с полупрозрачной (поглощающей, излучающей и нерассеивающей) серой средой. Аналогично [5] первый этап решения задачи сводится к рассмотрению нестационарного радиационно-кондуктивного теплообмена в процессе нагрева образца излучением и конвекцией. На втором этапе, при достижении границей образца температуры плавления, рассматривается непосредственно задача Стефана. Образующаяся на границе жидкая фаза сублимируется и уносится за счет конвекции. Положение границы раздела фаз $S(t)$ определяется из решения краевой

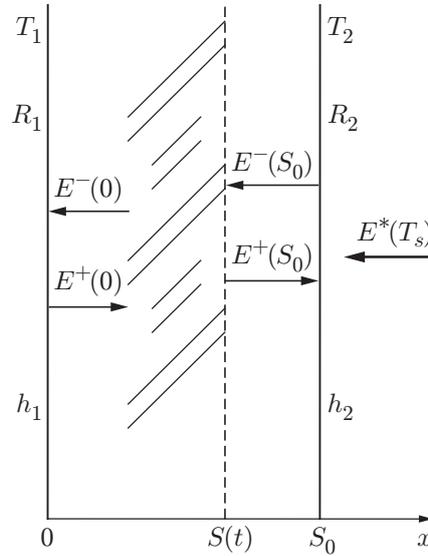


Рис. 1. Геометрическая схема задачи

задачи, которое сводится к определению полей температур и потоков в слое твердой фазы переменной толщины от $x = 0$ до $x = S(t)$ (рис. 1).

В предположении постоянных теплофизических свойств среды уравнение энергии в твердой фазе пластины имеет вид

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial E}{\partial x}, \quad 0 \leq x \leq S(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

где a, ρ — температуропроводность и плотность твердой фазы; c_p — теплоемкость при постоянном давлении; E — плотность результирующего радиационного потока в слое среды, которая выражается через интенсивности излучения вперед $I^+(x, \mu, t)$ и назад $I^-(x, \mu, t)$ следующим образом:

$$E(x, t) = 2\pi \int_0^1 (I^+(x, \mu, t) - I^-(x, \mu, t)) \mu d\mu = E^+(x, t) - E^-(x, t).$$

Здесь $E^\pm(x, t)$ — плотность потоков полусферического (в пределах телесных углов $\Omega = \pm 2\pi$) падающего излучения (см. рис. 1).

Применительно к случаю прозрачных (непоглощающих) границ краевые условия задачи, рассматриваемой на втором этапе решения, с учетом условия Стефана на границе раздела фаз имеют вид

$$-\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = h_1(T_1 - T(0, t)); \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T(S(t), t)}{\partial x} - h_2(T_2 - T(S(t), t)) = \rho\gamma \frac{\partial S(t)}{\partial t}. \quad (3)$$

Система (1)–(3) дополняется начальным условием

$$T(x, 0) = f(x), \quad S(0) = S_0. \quad (4)$$

Здесь λ — теплопроводность образца; h_i — коэффициент теплообмена с внешней средой; T_i — температура среды слева и справа от образца; γ — скрытая теплота плавления; индексы $i = 1, 2$ соответствуют левой и правой границам образца.

На первом этапе решения в уравнении энергии (1) $S(t)$ следует полагать тождественно равной начальной толщине S_0 , а правую часть уравнения (3) приравнять к нулю.

Приводя уравнения энергии к безразмерному виду, используем преобразование [2], в результате чего фронт фазового перехода становится фиксированной границей при $\xi = x/S(t) \equiv 1$. При этом используются безразмерные переменные $\theta = T/T_f$, $\xi = x/S(t)$, $s(\eta) = S(t)/S_0$, $\eta = \lambda t/(\rho c_p S_0^2)$. Уравнение (1) в указанных переменных принимает вид

$$\frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \xi \frac{\dot{s}}{s} \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} - \frac{1}{Ns} \frac{\partial \Phi(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (5)$$

а граничные условия (2), (3) сводятся к следующим:

$$-\frac{\partial \theta(0, \eta)}{\partial \xi} = s \text{Bi}_1(\theta_1 - \theta(0, \eta)); \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta(1, \eta)}{\partial \xi} - s \text{Bi}_2(\theta_2 - \theta(1, \eta)) = \frac{s\dot{s}}{\text{St}}. \quad (7)$$

Здесь $N = \lambda/(4\sigma_0 T_r^3 S_0)$ — радиационно-кондуктивный параметр; $\Phi^\pm(\xi, \tau) = E^\pm(x, t)/(4\sigma_0 T_r^4)$ — безразмерная плотность потока излучения; $\text{Bi}_i = h_i S_0/\lambda$ — число Био; $\text{St} = c_p T_r/\gamma$ — число Стефана; $T_r = T_f$ — определяющая температура, равная температуре фазового перехода; $\dot{s} = ds/d\eta$; σ_0 — постоянная Стефана — Больцмана.

Начальное условие (4) принимает вид

$$\theta(\xi, 0) = f(\xi), \quad s(0) = 1. \quad (8)$$

Если границы слоя частично поглощают, отражают и пропускают излучение, то краевые условия задачи (2), (3) записываются следующим образом:

$$-\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} + A_1[E^-(0, t) + \sigma_0 T_1^4] - \varepsilon_1(1 + n^2)\sigma_0 T^4(0, t) = h_1(T_1 - T(0, t)); \quad (9)$$

$$\lambda \frac{\partial T(S(t), t)}{\partial x} - h_2(T_2 - T(S(t), t)) - A_2[E^+(S(t), t) + E^*] + \varepsilon_2(1 + n^2)\sigma_0 T^4(S(t), t) = \rho\gamma \frac{dS(t)}{dt}. \quad (10)$$

Здесь A_i удовлетворяет балансовому соотношению безразмерных потоков на границах образца

$$A_i + R_i + D_i = 1, \quad (11)$$

где A_i , R_i , D_i — значения полусферических коэффициентов поглощения, отражения и пропускания границ; ε_i — степень черноты границ (ниже предполагается, что $\varepsilon_i = A_i$).

Безразмерная модификация уравнений (9), (10) имеет вид

$$-\frac{\partial \theta(0, \eta)}{\partial \xi} + s \text{Bi}_1(\theta(0, \eta) - \theta_1) - \frac{A_1 s}{N} \left(\Phi^- + \frac{\theta_1^4}{4} - \frac{1 + n^2}{4} \theta^4(0, \eta) \right) = 0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial \theta(1, \eta)}{\partial \xi} - s \text{Bi}_2(\theta_2 - \theta(1, \eta)) - \frac{A_2 s}{N} \left(\Phi^+ + F^* - \frac{1 + n^2}{4} \theta^4(1, \eta) \right) = \frac{s\dot{s}}{\text{St}}. \quad (13)$$

Решение задач в рассмотренных постановках сводится к определению температуры $\theta(\xi, \eta)$ и плотностей результирующего радиационного потока $\Phi(\xi, \eta)$ в области $G = \{0 \leq \xi \leq 1; 0 \leq \eta \leq \eta_1\}$, представляющей собой плоский слой твердой фазы. Положение фронта фазового перехода $s(\eta)$ меняется от 1 до 0.

Краевые задачи (5)–(7), а также уравнения (5), (12), (13) решаются конечно-разностным методом, нелинейная система неявных разностных уравнений — методом прогонки и итераций. В уравнениях (5)–(7), (12), (13) радиационные потоки представляют собой внутренние источники и определяются из решения уравнения переноса излучения с известным распределением температуры для плоского слоя излучающей и поглощающей среды.

Применительно к радиационному теплообмену широкие возможности для расчета переноса излучения в поглощающих и излучающих средах с учетом отражения излучения от граничных поверхностей предоставляет модифицированный метод средних потоков [3, 4]. В рамках этого метода интегродифференциальное уравнение переноса излучения сводится к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений для плоского слоя полупрозрачной среды. Дифференциальный аналог уравнения переноса излучения для полусферических потоков записывается в виде

$$\frac{d}{d\tau} (\Phi^+(\tau, \eta) - \Phi^-(\tau, \eta)) + (m^+(\tau)\Phi^+(\tau, \eta) - m^-(\tau)\Phi^-(\tau, \eta)) = n^2\Phi_0; \quad (14)$$

$$\frac{d}{d\tau} (m^+(\tau)\delta^+(\tau)\Phi^+(\tau, \eta) - m^-(\tau)\delta^-(\tau)\Phi^-(\tau, \eta)) + (\Phi^+(\tau, \eta) - \Phi^-(\tau, \eta)) = 0. \quad (15)$$

Граничные условия на прозрачных диффузно излучающих и отражающих поверхностях определяются следующим образом:

$$\Phi^+(0, \eta) = (1 - R_1) \frac{\theta_1^4}{4} + \left(1 - \frac{1 - R_1}{n^2}\right) \Phi^-(0, \eta); \quad (16)$$

$$\Phi^-(1, \eta) = (1 - R_2) \left(F^* + \frac{\theta_s^4}{4}\right) + \left(1 - \frac{1 - R_2}{n^2}\right) \Phi^+(1, \eta). \quad (17)$$

Здесь $\theta_1^4 = T_1^4/T_r^4$; $\theta_s^4 = T_s^4/T_r^4$; $F^* = E^*/(4\sigma_0 T_r^4)$ — безразмерная плотность потока, падающего на пластину с правой стороны; n — коэффициент преломления.

Граничные условия на диффузно отражающих, пропускающих и частично поглощающих (излучающих) поверхностях определяются следующим образом:

$$\Phi^+(0, \eta) = \varepsilon_1 n^2 \frac{\theta^4(0, \eta)}{4} + D_1 \frac{\theta_1^4}{4} + \left(1 - \frac{1 - R_1}{n^2}\right) \Phi^-(0, \eta); \quad (18)$$

$$\Phi^-(1, \eta) = \varepsilon_2 n^2 \frac{\theta^4(1, \eta)}{4} + D_2 F^* + \left(1 - \frac{1 - R_2}{n^2}\right) \Phi^+(1, \eta); \quad (19)$$

$$\Phi^\pm(\tau, \eta) = \frac{2\pi}{4\sigma T_r^4} \int_{0(-1)}^{1(0)} I(\tau, \mu) \mu d\mu,$$

$$m^\pm(\tau) = \frac{\int_{0(-1)}^{1(0)} I(\tau, \mu) d\mu}{\int_{0(-1)}^{1(0)} I(\tau, \mu) \mu d\mu},$$

$$\delta^\pm(\tau) = \frac{\int_{0(-1)}^{1(0)} I(\tau, \mu) \mu^2 d\mu}{\int_{0(-1)}^{1(0)} I(\tau, \mu) \mu d\mu}.$$

Здесь I — интенсивность излучения; μ — косинус угла между направлением распространения излучения и осью x ; $\tau = \alpha S(t)$ — оптическая толщина слоя в момент времени t ; α — коэффициент поглощения; R_i — коэффициент полусферического отражения излу-

чения непоглощающими границами слоя (вычисляется по формуле Уолша — Данкла). Значения m^\pm , δ^\pm определяются из рекуррентного соотношения, полученного с помощью формального решения уравнения переноса излучения [6, 7]. Плотность радиационного потока излучения определяется соотношением

$$\Phi(\tau, \eta) = \Phi^+(\tau, \eta) - \Phi^-(\tau, \eta). \quad (20)$$

Для решения радиационной задачи используются итерации, на каждом шаге которых краевая задача (14)–(20) решается методом матричной факторизации. Быстрая сходимость данного метода решения позволяет получать результаты с высокой степенью точности.

Были проведены численные расчеты полей температуры и радиационных потоков, а также определены положение фронта фазового перехода и изменение температуры левой границы образца. Для расчетов использованы следующие значения параметров: $S_0 = 0,1$ м, $T_f = 1000$ К, $T_1 = 300$ К, $T_2 = 900$ К, $E^* = 120$ кВт/м², $\rho = 2000$ кг/м³, $\lambda = 1$ Вт/(м·К), $a = 10^{-6}$ м²/с, $\gamma = 500$ кДж/кг, $h_{1,2} = 1$ Вт/(м²·К), $n = 1,5$, $\alpha = 10$ м⁻¹, $A_{1,2} = 0,1$, для прозрачных границ коэффициент отражения $R_{1,2} = 0,092$ вычислен по формуле Уолша — Данкла, для полупрозрачных границ $R_{1,2} = 0,1$.

По результатам работы [5] определены оптимальные параметры внешнего воздействия на объемно поглощающий слой с прозрачными (непоглощающими) границами. Это позволяет осуществлять равномерный нагрев образца до момента достижения условий фазового перехода. В настоящей работе исследованы ситуации, когда такой образец справа обтекается конвективным потоком при фиксированной температуре $T_2 = 900$ К.

На рис. 2 приведены результаты расчетов нагрева и плавления пластины с отражающей и непоглощающей границами за счет радиационно-конвективного нагрева правой поверхности. В этом случае процессы осуществляются при воздействии максимального потока излучения, проникающего в пластину (потери на отражение правой границей минимальные). Характер температурных полей в слое (рис. 2, а) определяется излучением и слабо зависит от температуры окружающей среды. Пластина достаточно быстро нагревается до температуры фазового перехода на правой границе (кривая 2 на рис. 2, а). При детальном рассмотрении температурного поля в процессе фазового перехода (рис. 2, б) четко видна зона перегрева вблизи правой границы образца, определяемая теплообменом при фиксированном значении температуры фазового перехода T_f . Максимальный перегрев наблюдается при $s = 0,9$ (рис. 2, б). По мере плавления пластины максимум температуры сдвигается к ее середине и распределение температуры в тонком слое ($s = 0,223$) становится квазиизотермическим. При этом процесс плавления оказывается растянутым во времени. Результирующий радиационный поток, имеющий отрицательный знак по абсолютному значению, монотонно увеличивается при удалении от правой стенки, со временем приобретает характер линейного распределения (рис. 2, в, г) и по мере плавления и уменьшения толщины пластины ($s \rightarrow 0,2$) становится близким к постоянному (кривые 3 на рис. 2, в, г). Последнее вызвано квазиизотермичностью материала тонкой пластины с малой оптической толщиной. В этом случае полный поток $q = -\lambda \partial T / \partial x + E$ в силу температурного распределения, близкого к изотермическому, оказывается практически равным плотности потока результирующего излучения: $q \approx E$.

Следует отметить, что в рассматриваемых условиях, когда границы слоя не поглощают, но пропускают излучение, возникновение фазового перехода в правой части слоя приводит к существенному увеличению времени плавления. В этом случае процесс плавления завершается при безразмерной толщине слоя $s \leq 0,2$.

Слабое поглощение излучения границами ($A_i = \varepsilon_i = 0,1$) несколько меняет характер нагрева пластины (рис. 3, а) и сокращает время плавления. В окрестности нагрее-

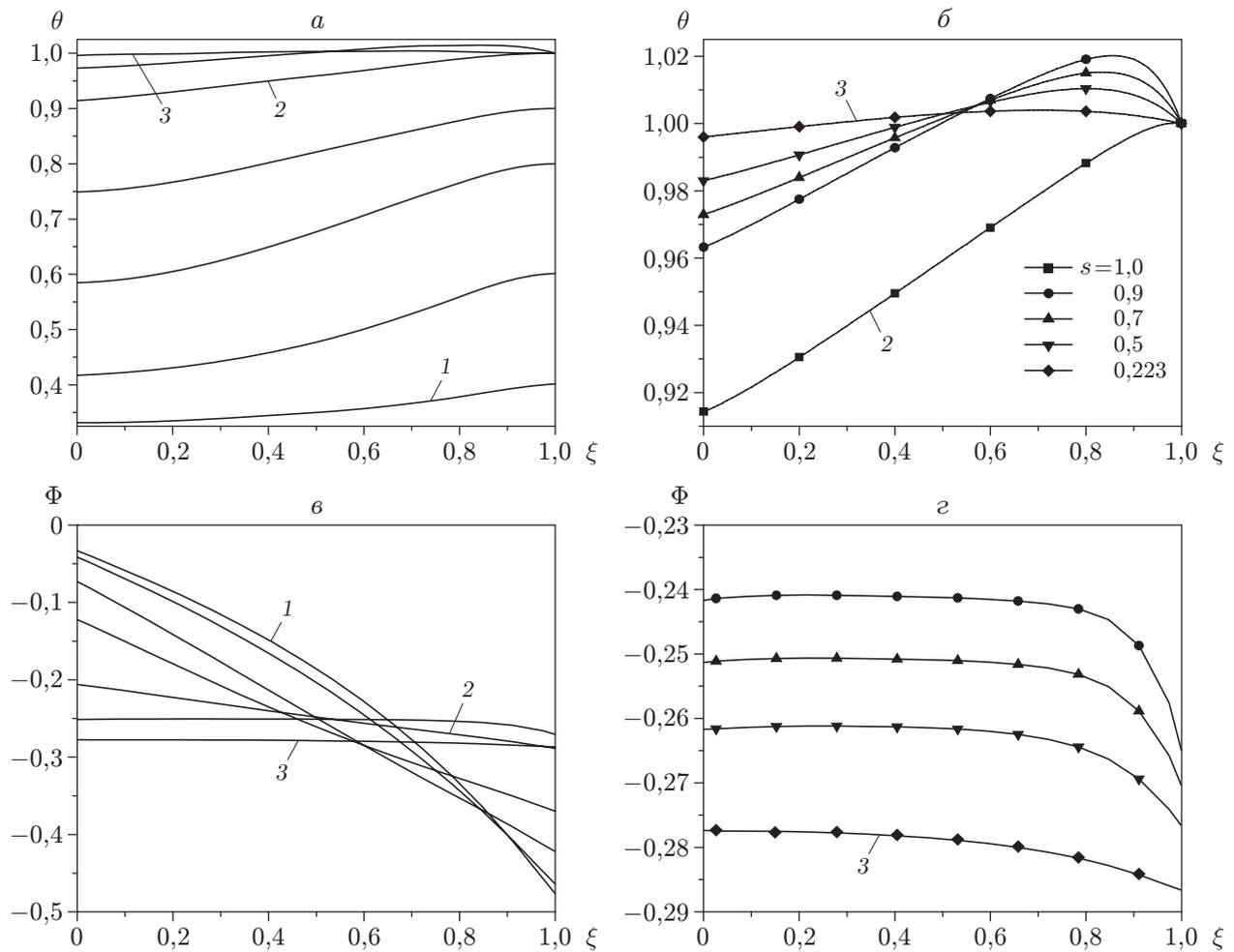


Рис. 2. Распределение температур (*a, б*) и плотности потока излучения (*в, г*) в образце в отсутствие поглощения при $R_2 = 0,092$, $T_2 = 900$ К:
a, в — нагрев и плавление; *б, г* — плавление; 1 — $t = 55$ с (начало процесса); 2 — $t = 1003$ с (начало фазового перехода); 3 — $t = 30\,753$ с (окончание процесса)

ваемой границы появляется экстремум, связанный с поглощением излучения в процессе нагрева (см. рис. 3,*a*) и наличием фазового перехода с фиксированным значением температур плавления (рис. 3,*б*). Распределение плотностей потоков результирующего излучения (рис. 3,*в,г*) характеризуется наличием перегибов кривых в период фазового перехода (рис. 3,*г*), обусловленных оптической неоднородностью, и становится квазилинейным в конце процесса (кривая 3 на рис. 3,*г*).

На рис. 4,*a* видно, что температура левой границы не зависит от оптических свойств границ, что объясняется конвективным охлаждением границы при $T_1 = 300$ К. Существенный рост температуры левой границы слоя отмечается в течение первых 1000 с процесса, т. е. до начала фазового перехода, затем кривая роста стабилизируется и выходит на квазистационарный режим. Положение фронта плавления в процессе нагрева и плавления пластины показано на рис. 4,*б*. Видно, что время плавления пластины зависит даже от незначительного поглощения излучения правой границей. Заметим, что указанное обстоятельство может оказаться существенным при учете помутнения поверхностного слоя, обусловленного изменением оптических свойств материала пластины при фазовом переходе.

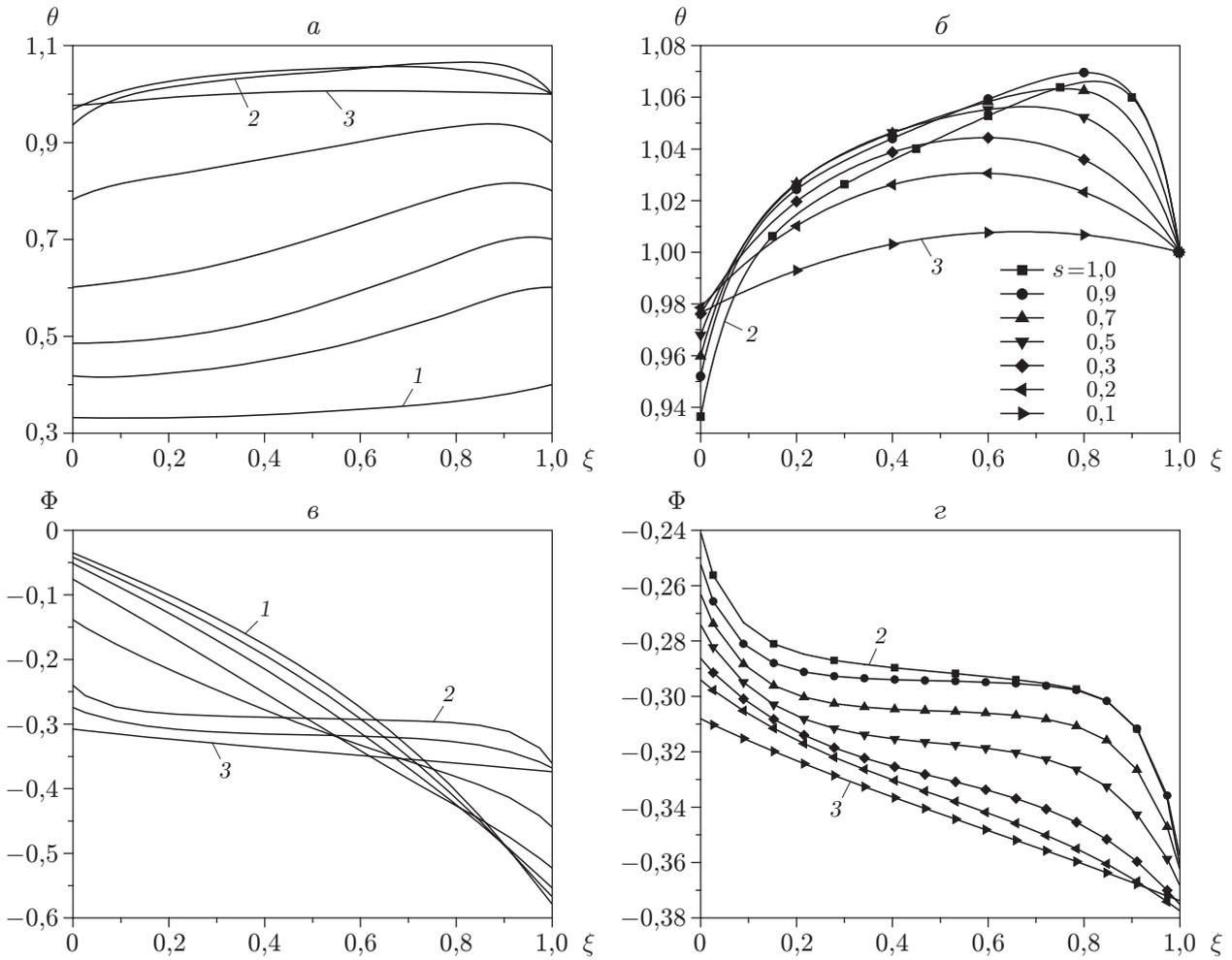


Рис. 3. Распределение температур (*а, б*) и плотности потока излучения (*в, г*) в образце при частичном поглощении излучения ($A_2 = 0,1$) и $R_2 = 0,1$, $T_2 = 900$ К:
а, в — нагрев и плавление; *б, г* — плавление; 1 — $t = 127$ с (начало процесса); 2 — $t = 1292$ с (начало фазового перехода); 3 — $t = 12890$ с (окончание процесса)

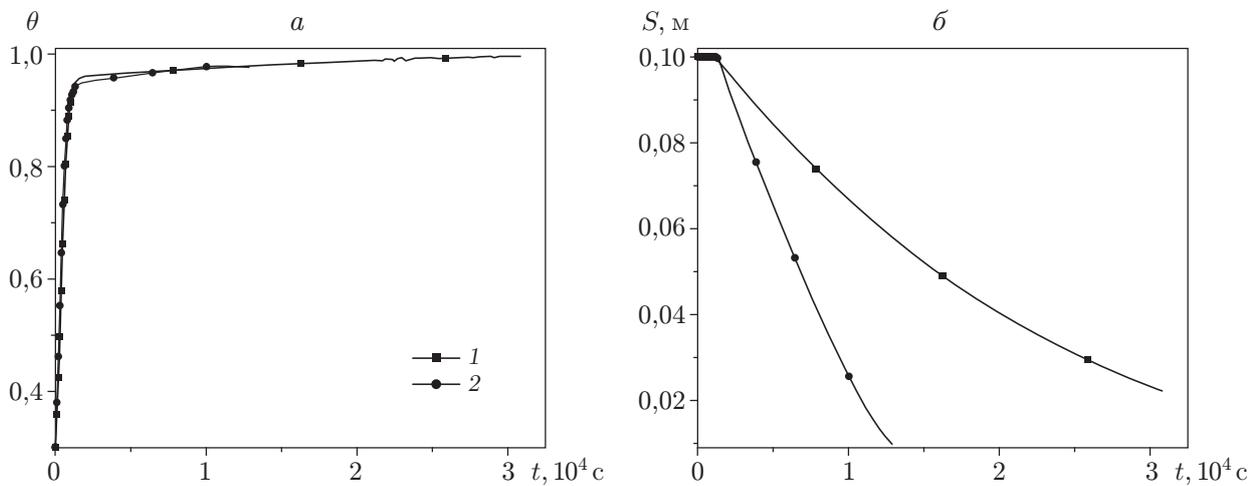


Рис. 4. Эволюция температуры левой границы со временем (*а*) и положение фронта плавления (*б*) при $T_2 = 900$ К, $A_2 = 0,1$:
 1 — прозрачная граница, 2 — полупрозрачная граница

Выводы. Полученные результаты позволяют оценить роль граничных условий в формировании теплового поля в плоской пластине при ее нагреве и плавлении. Отсутствие поглощения излучения границами пластины по сравнению с вариантами полного поглощения излучения границами образца, рассмотренными в [1, 3], приводит к существенному замедлению процессов плавления. Незначительное поглощение на облучаемой границе пластины, обусловленное возможным изменением оптических свойств материала пластины при фазовом переходе, существенно ускоряет процессы по сравнению с вариантом непоглощающих границ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Le Dez V., Yousefian F., Vaillon R., et al.** Problem de Stefan direct dans un milieu semitransparent gris // J. Phys. France. Ser. 3. 1996. V. 6. P. 373–390.
2. **Landau H. G.** Heat conduction in a melting solid // Quart. Appl. Math. 1950. V. 8. P. 81–94.
3. **Рубцов Н. А., Саввинова Н. А., Слепцов С. Д.** Однофазная задача Стефана для полупрозрачной среды с учетом отражения излучения // Теплофизика и аэромеханика. 2003. Т. 10, № 2. С. 255–264.
4. **Рубцов Н. А., Тимофеев А. М., Пономарев Н. Н.** О поведении коэффициентов переноса в прямых дифференциальных методах теории радиационного теплообмена в рассеивающих средах // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1987. Вып. 5, № 18. С. 3–8.
5. **Рубцов Н. А., Слепцов С. Д.** Влияние граничных условий на нестационарный радиационно-кондуктивный теплообмен в слое полупрозрачной среды // Теплофизика и аэромеханика. 2005. Т. 12, № 1. С. 95–103.
6. **Рубцов Н. А.** Теплообмен излучением в сплошных средах. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984.
7. **Рубцов Н. А., Тимофеев А. М., Саввинова Н. А.** Комбинированный теплообмен в полупрозрачных средах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2003.

Поступила в редакцию 14/VII 2005 г.
