УДК 519.245

Исследование суперэкспоненциального роста среднего потока частиц методом Монте-Карло*

Г.З. Лотова[1,2], Г.А. Михайлов[1,2]

[1]Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

[2]Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mails: lot@osmf.sscc.ru (Лотова Г.З.), gam@sscc.ru (Михайлов Г.А.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 3, Vol. 16, 2023.

Лотова Г.З., Михайлов Г.А. Исследование суперэкспоненциального роста среднего потока частиц методом Монте-Карло // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 3. — С. 277–285.

На решении тестовой задачи для односкоростного процесса переноса частиц с изотропным рассеянием и размножением в стохастической среде проводится сравнительный анализ двух алгоритмов оценки взвешенного среднего потока частиц: по частицам и по столкновениям. Показано, что первый из них предпочтительнее для простой оценки среднего потока, а второй — для оценки параметров возможного суперэкспоненциального роста потока. Рассматриваются две модели случайной среды: хаотическая "мозаика Вороного" и сферически "слоистая мозаика". При одинаковом среднем корреляционном радиусе для слоистой мозаики суперэкспоненциальный рост оказался более сильным.

DOI: 10.15372/SJNM20230304

Ключевые слова: *статистическое моделирование, асимптотика по времени, случайная среда, поток частиц, поле Вороного.*

Lotova G.Z., Michailov G.A. Study of superexponential growth of the mean partile flux by Monte Carlo method // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 3. — P. 277–285.

A comparative analysis of two algorithms for estimation of weighted mean particle flux — "by particles" and "by collisions" — is made on the basis of test problem solving for a single-speed particle propagation process with scattering and multiplication in a random medium. It is shown that the first algorithm is preferable for a simple estimation of the mean flux and the second one, for estimation of the parameters of a possible superexponential flux growth. Two models of the random medium are considered: a chaotic "Voronoi mosaic" and "a spherically layered mosaic". For a fixed mean correlation radius, the superexponential growth has been stronger for the layered mosaic.

Keywords: *statistical simulation, time asymptotics, random media, particle flux, Voronoi mosaic.*

1. Введение

1.1. Известно (см., например, [1]), что плотность потока частиц $\Phi(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ в системе, образованной размножающей средой в области $\mathbf{D}$, в достаточно широких условиях является

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект № 0251-2021-0002).

асимптотически экспоненциальной по времени t: $\Phi(t,\mathbf{r},\mathbf{v}) \sim \mathrm{e}^{\lambda t}\Phi(\mathbf{r},\mathbf{v})$, $t \to \infty$. Временна́я постоянная λ является ведущим характеристическим числом соответствующего однородного стационарного кинетического уравнения

$$(\mathbf{v}, \operatorname{grad}\Phi) + \Big(\sigma + \frac{\tau}{v}\Big)\Phi = \sigma_s \int w_s(\mathbf{v}' \to \mathbf{v}, \mathbf{r})\Phi'\, d\mathbf{v}' + \sigma_f \int \nu(\mathbf{r}, \mathbf{v}') w_f(\mathbf{v}' \to \mathbf{v}, \mathbf{r})\Phi'\, d\mathbf{v}'. \quad (1.1)$$

Здесь $\Phi \equiv \Phi(\mathbf{r},\mathbf{v})$ — стационарная плотность потока (характеристическая функция уравнения (1.1)), $\Phi' \equiv \Phi(\mathbf{r},\mathbf{v}')$; $\sigma \equiv \sigma(\mathbf{r},\mathbf{v})$ — полное сечение (коэффициент ослабления); $\sigma = \sigma_s + \sigma_f + \sigma_c$, σ_s — сечение рассеяния, σ_f — сечение деления (w_s, w_f — соответствующие индикатрисы), σ_c — сечение поглощения; ν — число частиц, вылетающих из точки деления; $\mathbf{v} = v\,\omega$ — вектор скорости, ω — единичный вектор направления, $v = |\mathbf{v}|$; $\mathbf{r}$ — пространственная точка.

С целью построения и исследования алгоритмов метода Монте-Карло далее в качестве соответствующей уравнению (1.1) (см., например, [2]) математической модели процесса переноса используется однородная обрывающаяся с вероятностью 1 цепь Маркова, состояниями которой являются фазовые точки $x_n = (\mathbf{r}_n, \mathbf{v}_n, t_n)$, $n = 0, 1, \ldots, N_c$, последовательных “столкновений частицы с элементами вещества”, где $\mathbf{r}_n$ — точка n-го столкновения, $\mathbf{v}_n$ — скорость непосредственно перед столкновением, а $t_n = t_{n-1} + \dfrac{|\mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_n|}{|\mathbf{v}_n|}$ есть время “жизни” сталкивающейся частицы. Рассматриваемая цепь определяется плотностью $f(x)$ распределения начального столкновения x_0 и субстохастической плотностью $k(x', x)$ перехода из состояния x' в x, которая получается (см., например, [2]) из следующей характеризации процесса переноса, определяющей уравнение (1.1). Отношения $\sigma_s(x)/\sigma(x)$, $\sigma_f(x)/\sigma(x)$ и $\sigma_c(x)/\sigma(x)$ равны вероятностям рассеяния, деления и поглощения непосредственно после столкновения в фазовой точке x, а плотность распределения длины ℓ свободного пробега из $\mathbf{r}'$ в $\mathbf{r}$ равна $p(\ell) = \sigma(r(\ell))\exp(-\tau_{\mathrm{op}}(\ell))$, где $\tau_{\mathrm{op}}(\ell)$ — оптическая длина пробега [2]. Плотность столкновений $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)$ представляет собой ряд Неймана для интегрального уравнения второго рода $\varphi = K\varphi + f$, $f \equiv \varphi_0$, где K — интегральный оператор с ядром $k(\cdot,\cdot)$ [2]; предполагается, что $\|K\|_{L_1} < 1$.

Используемая обычно в теории переноса интенсивность излучения $\Phi(x)$ (плотность потока частиц) связана с плотностью столкновений соотношением $\varphi(x) = \sigma(x)\Phi(x)$. Методы Монте-Карло, как правило, используются для оценки линейных функционалов вида $J_h = (\varphi, h) = (\sigma\Phi, h)$, $h \in L_\infty$. Для построения весовых алгоритмов используется цепь Маркова с начальной плотностью $f_0(x)$ и плотностью перехода $p(x', x)$. При этом вводятся вспомогательные веса по формулам: $Q_0 = \dfrac{f(x_0)}{f_0(x_0)}$, $Q_n = \dfrac{Q_{n-1}k(x_{n-1}, x_n)}{p(x_{n-1}, x_n)}$. Если выполняются “условия несмещенности” [2], то $J_h = \mathrm{E}\,\xi$, где $\xi = \sum_{n=0}^{N_c} Q_n h(x_n)$. Если, кроме того, $\|K_p\| < 1$, где K_p — оператор с ядром $\dfrac{k^2(x', x)}{p(x', x)}$, и $\dfrac{f^2}{f_0} \in L_1(X)$, то $\mathrm{D}\xi < +\infty$. Случайная величина ξ называется “оценкой по столкновениям” для функционала J_h. Заметим, что при переходе $x_{n-1} \to x_n$ вес пересчитывается путем домножения на весовые множители, соответствующие элементарным переходным событиям: выбор типа столкновения (поглощение, размножение или рассеяние), выбор нового направления пробега, выбор длины свободного пробега [2]. Если все весовые множители меньше единицы, то при $\|K\| < 1$ имеем и $\|K_p\| < 1$. Известно (см., например, [2]) соотношение, состоящее в том, что если в реализуемой вспомогательной модели используется сечение поглощения $\sigma_c + \dfrac{\lambda_0}{v}$, то текущий вес частицы в момент времени t после реализации столкновения без поглощения домножается на величину $\exp(\lambda_0 t)$ и, следовательно, к получаемой в результате расчетов оценке значения λ надо добавлять λ_0. Это соотношение вытекает также непосредственно из уравнения (1.1). Однако правило пересчета веса показывает, что в момент t столкновения он равен $\left(\sigma + \frac{\lambda_0}{v}\right)\frac{\exp(\lambda_0 t)}{\sigma}$.

1.2. Далее рассматривается односкоростной процесс переноса частиц: $\mathbf{v} = \omega$; предполагается, что $\sigma \equiv \sigma(\mathbf{r})$ — случайное поле, причем отношения $\frac{\sigma_s}{\sigma}$, $\frac{\sigma_f}{\sigma}$, а также индикатрисы рассеяния и деления фиксированы. Если $h_0(\mathbf{r}) = \frac{I_{\mathbf{D}}(\mathbf{r})}{\sigma(\mathbf{r})}$, где $I_{\mathbf{D}}$ – индикатор области $\mathbf{D}$, то функционал $J(t,\sigma) = (\varphi, h_0) = \int\int \varphi(\mathbf{r},\omega,t)h_0(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}\,d\omega$ представляет собой полный поток частиц в области $\mathbf{D}$ для заданного момента времени t.

Как и в [3], полагаем, что $J(t,\sigma) \asymp \exp(\lambda(\sigma)t)$ при $t \to \infty$ для $f_0(t) = \delta(t)$ и $\int_0^\infty f(t)\exp(-\lambda(\sigma)t)\,dt < C_0 < +\infty$. Соответственно этому, предполагая гауссовость случайной величины $\lambda(\sigma)$ и равномерность (по σ) предельного перехода $J(t,\sigma) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} C(\sigma)\mathrm{e}^{\lambda(\sigma)t}$, можно оценить асимптотику функции $\mathrm{E}J(t,\sigma) = J_t$ при $t \to \infty$:

$$J_t \sim \frac{C}{\sqrt{2\pi}d}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx)\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2d^2}\right)dx,$$

где $a = \mathrm{E}\lambda(\sigma)$, $d^2 = \mathrm{D}\lambda(\sigma)$. При этом также предполагается, что множители $C(\sigma)$ и $\mathrm{e}^{\lambda(\sigma)t}$ в асимптотике слабо коррелированы и, следовательно, $C \approx \mathrm{E}C(\sigma)$. Используя формулу (11) из [4, пп. 2.3.15], получаем

$$J_t \approx C\exp\left(\frac{d^2}{2}t^2 + at\right). \tag{1.2}$$

Следовательно, можно предположить, что

$$\frac{d\ln J_t}{dt} \approx d^2 t + a. \tag{1.3}$$

Отметим, что формулы (1.2), (1.3) могут служить основой для численных исследований конкретных вариантов задачи. Определяемый формулой (1.2) закон роста среднего числа частиц можно назвать “суперэкспоненциальным”.

2. Оценка взвешенного среднего потока $J_t = \mathrm{E}J(t,\sigma)$

2.1. Символом $f_t^{(m)}$ далее обозначается m-кратная производная от функции f по t. Предполагается, что $f(\mathbf{r},\omega,\mathbf{t}) \equiv \mathbf{0}$ при $t < 0$.

Лемма 2.1 [3]. *Пусть точка* $(\mathbf{r}_0,\omega_0)$ *распределена для* $t_0 \equiv 0$ *с плотностью* $f_0(\mathbf{r},\omega)$, *выполняются условия несмещенности* [2] *и*

$$\left|\frac{f_t^{(m)}(\mathbf{r},\omega,t)}{f_0(\mathbf{r},\omega)}\right| < C_0 < +\infty, \quad \|K_p\| < 1.$$

Тогда выполняется соотношение $J^{(m)}(t) = \mathrm{E}\xi_t^{(m)}$, *где*

$$\xi_t^{(m)} = \sum_{k=0}^{N_c} Q_k h(\mathbf{r}_k,\mathbf{v}_k)\frac{f_t^{(m)}(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0,t-t_k)}{f_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)}, \quad Q_0 \equiv 1, \tag{2.1}$$

причем $\mathrm{D}\xi_t^{(m)} < +\infty$, $m = 0,1,\dots n$.

Лемма 2.2. *В условиях леммы 2.1 справедливо равенство*

$$\frac{J_t'}{J_t} = \frac{d\ln J_t}{dt} = \frac{\mathrm{E}\xi'(\Omega,\sigma)}{\mathrm{E}\xi(\Omega,\sigma)} \approx \frac{\tilde{J}_t'}{\tilde{J}_t}\,, \tag{2.2}$$

где $\tilde{J}_t'$, $\tilde{J}_t$ *— соответствующие статистические оценки, получаемые методом двойной рандомизации.*

Для каждой реализации среды здесь можно строить лишь одну траекторию Ω частицы, используя (2.2) для $m = 0; 1$.

Отметим, что полная дисперсия оценки $\tilde{J}_t'/\tilde{J}_t$ оценивается сверху стандартным способом с помощью линеаризации дроби (2.2).

2.2. Рассмотрим теперь прямой алгоритм оценки величины J_t путем подсчета взвешенного числа частиц, находящихся в области $\mathbf{D}$ в момент времени t, с весом $v = |\mathbf{v}|$ соответственно [5]. При этом допускается весовая модификация с пересчетом веса в точках столкновений (см. далее пункт 4) так же, как при построении оценки ξ_t. Соответствующий алгоритм дает простейшую весовую оценку η_t, причем $\mathrm{E}\eta_t = J_t$, если используется двойная рандомизация.

3. Мозаичные вычислительные модели случайных полей $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})$

Однородные изотропные случайные поля $\sigma(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in R_3$, можно рассматривать как естественные математические модели оптической плотности в активной части D случайно возмущенной физической, размножающей частицы, системы. Для решения задач теории переноса наиболее подходящими являются широко представленные в литературе [6–9] мозаичные модели $\sigma(\mathbf{r})$, основанные на случайном разбиении пространства с независимым выбором значения σ в каждом из элементов разбиения.

Детальные численные исследования (см., например, [6]) показали, что осредненная вероятность прохождения частицы в значительной степени определяется корреляционным радиусом $L = \int_0^\infty k(l)\,dl$, где $k(l)$ — коэффициент корреляции между значениями поля $\sigma(\mathbf{r})$, $\sigma(\mathbf{r}')$ при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = l$, и одномерным распределением среды. В связи с этим в настоящей работе для исследования осредненного потока частиц используется имеющее простой геометрический смысл мозаичное поле Вороного. Оно строится на основе базового пуассоновского точечного потока $\{\mathbf{r}_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, интенсивности λ_p, который определяет разбиение пространства на ячейки, каждая из которых является множеством точек, наиболее близких к одной из точек потока (мозаика или диаграмма Вороного). Геометрические свойства такого разбиения детально изучены, например, в [7]. Элементы разбиения являются выпуклыми многогранниками, и $L \approx 0.459\lambda_p^{-1/3}$ [7].

Сказанное выше показывает, что сравнительный анализ результатов в настоящей задаче при фиксированном одномерном распределении можно проводить на основе значения L. Практически важно распространить такой анализ на задачи с неслучайной, т. е. геометрически фиксированной, мозаикой, например, со случайными сферическими слоями, как в простейшей тестовой задаче [3]. С целью построения подходящей для этого числовой характеристики заметим, что нормированная корреляционная функция для луча $r(t,\omega) = \mathbf{r} + \omega t$, $t \geq 0$, с началом в элементе $S \subset D$ мозаики равна $I_S(r(t,\omega))$, а корреляционная длина $l(r,\omega) = \int_0^\infty I_S(r(t,\omega))\,dt$. Предположим теперь, что известна приближенная плотность $g(\mathbf{r},\omega)$ распределения квантов после рассеяний в рассматриваемой задаче. Тогда в качестве искомой числовой характеристики целесообразно рассмотреть величину

$$L_{\mathrm{eff}}(g) = \int\limits_D \int\limits_\Omega g(\mathbf{r}, \omega) l(\mathbf{r}, \omega)\, d\mathbf{r}\, d\omega\,, \tag{3.1}$$

которую можно назвать эффективным корреляционным радиусом.

Ясно, что для однородной мозаики с выпуклыми элементами (типа мозаики Вороного) в случае достаточно большой области D выполняется соотношение $L_{\mathrm{eff}} \approx L$.

4. Весовая модификация односкоростного процесса переноса с изотропным рассеянием

4.1. Для проведения тестовых расчетов рассматривался односкоростной процесс переноса частиц в среде со случайной плотностью $\rho = \rho(\mathbf{r})$ и макроскопическими сечениями $\rho\sigma^{(0)}$, $\rho\sigma_s^{(0)}$, $\rho\sigma_f^{(0)}$, где

$$\sigma^{(0)} = 1, \qquad \sigma_s^{(0)} = 0.97, \qquad \sigma_f^{(0)} = 0.03, \qquad \nu = 2.5, \qquad v = 1.$$

Одномерное распределение поля $\rho(r)$ равномерно на отрезке $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$.

Для построения эффективных алгоритмов метода Монте-Карло в сформулированную модель было введено поглощение с постоянным неслучайным коэффициентом $\frac{\sigma_c}{v}$, который приводит к замене $\lambda \mapsto \lambda - \frac{\sigma_c}{v}\ \ \forall\,\sigma$, как указано в конце п. 1.1. Отметим, что такой прием является универсальным и может существенно повысить эффективность весового метода, исключая необходимость ветвления моделируемых траекторий.

Используя уравнение переноса (1.1), можно сделать замену $\rho\sigma_f \mapsto \rho\sigma_f + \sigma_c$, $\nu \mapsto \dfrac{\nu\rho\sigma_f}{\rho\sigma_f + \sigma_c}$. При выполнении работы [3] моделировался процесс переноса с константами $\sigma_s^* = \rho\sigma_s,\ \sigma_f^* = \rho\sigma_f + \sigma_c,\ \nu^* = 1$. Вспомогательные веса при этом определялись по формуле $Q_n = Q_{n-1}\dfrac{\rho_n\sigma_f\nu}{\rho_n\sigma_f + \sigma_c}$. Было использовано значение σ_c, для которого $\dfrac{\nu\rho\sigma_f}{\rho\sigma_f + \sigma_c} < 1$ и тем самым [2] $\|K_p\| < 1\ \forall\sigma$. Для проведения более трудоемких расчетов с полем $\rho(\mathbf{r})$ типа Вороного (см. п. 5) было использовано далее "продвинутое" осреднение, состоящее в том, что моделировался процесс с константами $\sigma_s^* = 0$, $\sigma_f^* = \rho\sigma_s + \rho\sigma_f + \sigma_c$, $\nu^* = 1$, а вес в каждой точке столкновения домножался на величину

$$q^*(\rho) = \frac{\sigma_s + \nu\sigma_f}{\sigma_s + \sigma_f + \frac{\sigma_c}{\rho}} \le \frac{\sigma_s + \nu\sigma_f}{\sigma_s + \sigma_f + \frac{\sigma_c}{1+\varepsilon}}.$$

Отсюда имеем

$$\max_\rho q^*(\rho) = 1 \qquad \text{при} \qquad \sigma_c = \sigma_f(\nu - 1)(1+\varepsilon). \tag{4.1}$$

4.2. В расчетах, как и в [3], был использован метод максимального сечения (см., например, [2]) с $\sigma_{\max} = 1 + \varepsilon$. Для уменьшения дисперсии оценок, основанных на соотношении (2.2), значения ξ_t и ξ_t' вычислялись для всех столкновений, включая "дельта-рассеяние", в отличие от работы [3], где они вычислялись только для "физических" столкновений. Таким образом, для построения оценок потока частиц использовались элементарные оценки вида $\xi_t^{(0)} = \sum_{n=0}^{N_c} \frac{\psi_n(t)}{\sigma_{\max}}$, где $\psi_n(t)$ вычислялись, соответственно лемме 2.1, для каждого столкновения. Для физических столкновений соответствующая формула имеет вид $\xi_t^{(1)} = \sum_{n=0}^{N_c} \frac{\psi_n(t)\delta_n}{\sigma_n}$, где δ_n — индикатор физического столкновения.

Лемма 4.1. *Выполняется соотношение* $\mathrm{D}\xi_t^{(0)} \le \mathrm{D}\xi_t^{(1)}$.

Доказательство этого утверждения следует из того, что

$$\mathrm{E}\Big(\xi_t^{(1)} \mid \Omega\Big) = \sum_{n=0}^{N_c} \mathrm{E}\left(\frac{\psi_n(t)\delta_n}{\sigma_n} \,\Big|\, \Omega\right) = \sum_{n=0}^{N_c} \frac{\psi_n(t)}{\sigma_n} \frac{\sigma_n}{\sigma_{\max}} = \xi_t^{(0)}.$$

Это утверждение распространяется и на величину разности $\xi_{t+\Delta t} - \xi_t$, т. е. переход от $\xi_t^{(1)}$ к $\xi_t^{(0)}$ улучшает и свойства оценки функциональной зависимости потока частиц, тем самым уточняя регрессионные оценки коэффициентов d^2, a.

5. Результаты расчетов

В [3] были предварительно получены оценки коэффициентов d^2 и a, определяющих суперэкспоненциальную зависимость (1.2) для сферически симметричной слоистой случайной мозаики $\sigma(\mathbf{r})$ в шаре радиуса $R = 7.72043$ (критическом при $\rho \equiv 1$) с параметрами: число равнообъемных слоев $m = 6$; значения $\rho = \rho_i$ $(i = 1, \ldots, 6)$ в этих слоях независимы и равномерно распределены на отрезке $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ при $\varepsilon = 0.3$; $\sigma_s = 0.97$, $\sigma_f = 0.03$, $\nu = 2.5$, как указано в п. 3. Плотность распределения первых столкновений была взята в виде

$$f(\mathbf{r}, t) = 4t\exp(-2t)g(\mathbf{r}), \quad t > 0, \quad r = |\mathbf{r}| < R, \tag{5.1}$$

где $g(\mathbf{r}) = C\dfrac{\sin(æ(1)\,r)}{r}$ — улучшенное диффузионное приближение к пространственной характеристической функции для $\sigma = 1, æ(1) = 0.3739866$ [10]. В (2.1) полагали также $h(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \dfrac{h_1(\mathbf{r})}{\sigma(\mathbf{r})}$, где $h_1(\mathbf{r}) = \dfrac{\sin(æ(1)\,r)}{r}$, причем (см. [10]) $æ(\rho) = \dfrac{\pi(\sigma_s + \nu\sigma_f)\rho}{R(\sigma_s + \nu\sigma_f) + 0.71044}$. При этом $J_t^{(m)} = \Big(\Phi, h_1 \dfrac{f_t^{(m)}}{f_0}\Big)$, т. е. вычисляются функционалы от потока частиц. Расчеты показали, что использование таких функциональных параметров алгоритма существенно улучшает важную здесь сходимость $\dfrac{J_t'(\rho)}{J_t(\rho)} \to \lambda$ при $t \to \infty$ $\forall\,\rho$, в сравнении с вариантом, в котором $f(\mathbf{r}, t)$ определяется формулой (5.1), а $h(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \equiv 1$. Отметим, что формула (3.1) для данной слоистой мозаики дает значение $L_{\text{eff}}(g) = 2.186$.

Как указано в п. 3, практически более реальны стохастически однородные случайные поля $\sigma(\mathbf{r})$, естественным вариантом которых является поле Вороного. Расчеты значений функции J_t были проведены "методом столкновений" (C) и "методом частиц" (P), соответственно изложенному в п. 2. Для двух вариантов поля ρ — слоистого и Вороного — с помощью алгоритма C были вычислены оценки функции $\dfrac{J_t'}{J_t}$ в точках $t = 1, \ldots, 10, \ldots, 20$, приведенные на графиках рисунка, причем доверительные интервалы имеют ширину $\pm\tilde{\sigma}_t = \pm\sqrt{\tilde{\mathrm{D}}(J_t'/J_t)/N}$, почти точно совпадающую с диаметрами значков узловых значений. Здесь N — число траекторий. Затем на основе линейной регрессионной аппроксимации (при $15 \le t \le 20$) были получены оценки коэффициентов d^2 и a (см. таблицу 1).

Таблица 1. Регрессионные оценки коэффициентов a и d^2

t	слоистая мозаика	поле Вороного $L_{\text{eff}} = 2.186$
$\tilde{a} \cdot 10^5$	0.6 ± 1.5	-35 ± 4.0
$\tilde{d}^2 \cdot 10^5$	5.3 ± 0.1	3.4 ± 0.2

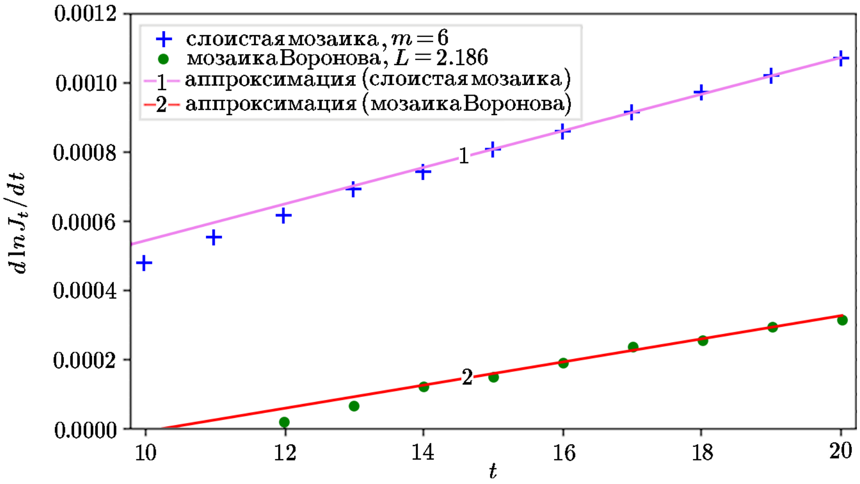

Рис. Оценки логарифмической производной и регрессионная аппроксимация

Для сферической мозаики оказалось возможным оценить также методом линеаризации по ε значения $\mathrm{D}\lambda$ и $\mathrm{E}\lambda$, причем оказалось, что $d^2 \approx \mathrm{D}\lambda$, $a \approx \mathrm{E}\lambda$ [3].

Таблица 1 показывает, что при переходе от слоистой мозаики к однородному полю $\sigma(\mathbf{r})$ со значением величины $L = L_{\text{eff}}(g)$ "суперэкспоненциальность" ослабевает, т. к., по-видимому, увеличивается средняя вероятность вылета частицы из среды. Это свойство вероятности вылета было выявлено при выполнении работы [11].

Базовый пуассоновский точечный поток для поля Вороного строился в шаре радиуса $R_1 = 10 \approx R + L_{\text{eff}}(g)$. Проведенные в [6] модельные расчеты показывают, что такое ограничение потока обеспечивает достаточно высокую точность оценки средней вероятности вылета частицы, которая играет определенную роль в рассматриваемой задаче.

В табл. 2 приведены оценки функции $J_t \exp(-\sigma_c t)$ и соответствующие значения среднеквадратических погрешностей δ для алгоритмов C и P. Они показывают некоторую предпочтительность алгоритма частиц для оценки среднего потока. Это связано с сильным изменением начальной плотности $f(t)$, которое и увеличивает дисперсию оценок в алгоритме C. Однако для вычисления параметров a, d суперэкспоненциальной оценки зависимости потока от времени более эффективен алгоритм C, т. к. он дает возможность вычисления производной J'_t, причем можно вычислять и старшие производные.

Таблица 2. Значения $\tilde{J}_t \exp(-\sigma_c t) \pm \delta$ при $N = 4 \cdot 10^7$, $L = L_{\text{eff}}$

t	алгоритм P	алгоритм C
1	0.124232 ± 0.000019	0.124224 ± 0.000020
5	0.173482 ± 0.000015	0.173503 ± 0.000024
10	0.129091 ± 0.000016	0.129098 ± 0.000022
15	0.096123 ± 0.000015	0.096135 ± 0.000020
20	0.071658 ± 0.000014	0.071666 ± 0.000018

Заметим, что алгоритм частиц можно модифицировать так же, как и алгоритм столкновений, используя соответствующую функцию Грина по времени. Ясно, что это приведет к такому же увеличению дисперсии оценок, как и в алгоритме C. Однако при этом необходимо оптимально определять таблицу базовых значений $\{t_i\}$.

Литература

1. **Дэвисон Б.** Теория переноса нейтронов.— М.: Атомиздат, 1960. Перевод: Davison B. Neutron Transport Theory.— Oxford: Clarendon Press, 1957.
2. **Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А. и др.** Метод Монте-Карло в атмосферной оптике.— Новосибирск: Наука, 1976. Перевод: Marchuk G.I., Mikhailov G.A., Nazareliev M.A. et al. The Monte Carlo Methods in Atmospheric Optics.— Springer-Verlag, 1980.
3. **Михайлов Г.А., Лотова Г.З.** Алгоритмы метода Монте-Карло для исследования временной асимптотики потока частиц с размножением в случайной среде // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления.— 2020.— Т. 490, № 1.— С. 47–50.— DOI: 10.7868/S2686954320010051. Перевод: Mikhailov G.A., Lotova G.Z. Monte Carlo algorithms for estimating time asymptotics of multiplication particle flow in a random medium // Doklady Mathematics.— 2020.— Vol. 101, № 1.— P. 40–42.— DOI: 10.1134/S1064562420010056.
4. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** Интегралы и ряды.— М.: Наука, 1981.
5. **Смелов В.В.** Лекции по теории переноса нейтронов.— М.: Атомиздат, 1978.
6. **Ambos A.Yu., Mikhailov G.A.** Solution of radiative transfer theory problems for “realistic” models of random media using the Monte Carlo method // Rus. J. Num. Anal. Math. Model.— 2016.— Vol. 31, № 3.— P. 1–10.
7. **Gilbert E.N.** Random subdivisions of space into crystals // Ann. Math. Statist.— 1962.— № 33.— P. 958–972.
8. **Serra J.** Image Analysis and Mathematical Morphology.— London: Academic press, 1982.
9. **Зуев В.Е., Титов Г.А.** Оптика атмосферы и климат // Современные проблемы атмосферной оптики. Т. 9.— Томск: Изд-во “Спектр” ИОА СО РАН, 1996.
10. **Романов Ю.А.** Точные решения односкоростного кинетического уравнения и их использование для расчета диффузионных задач (усовершенствованный диффузионный метод) // Исследование критических параметров реакторных систем.— М.: Госатомиздат, 1960.— С. 3–26.
11. **Medvedev Il.N., Mikhailov G.A.** New correlative randomized algorithms for statistical modeling of radiation transfer in stochastic medium // Rus. J. Num. Anal. Math. Model. — 2021. — Vol. 34, № 1. — P. 43–55.

Поступила в редакцию 18 ноября 2022 г.
После исправления 23 декабря 2022 г.
Принята к печати 10 апреля 2023 г.

Литература в транслитерации

1. **Devison B.** Teoriya perenosa neitronov.— M.: Atomizdat, 1960. Perevod: Davison B. Neutron Transport Theory.— Oxford: Clarendon Press, 1957.
2. **Marchuk G.I., Mikhailov G.A., Nazaraliev M.A. i dr.** Metod Monte-Karlo v atmosfernoi optike.— Novosibirsk: Nauka, 1976. Perevod: Marchuk G.I., Mikhailov G.A., Nazareliev M.A. et al. The Monte Carlo Methods in Atmospheric Optics.— Springer-Verlag, 1980.
3. **Mikhailov G.A., Lotova G.Z.** Algoritmy metoda Monte-Karlo dlya issledovaniya vremennoi asimptotiki potoka chastic s razmnozheniem v sluchainoi srede // Dokl. RAN. Matematika, informatika, processy upravleniya.— 2020.— T. 490, № 1.— C. 47–50.— DOI: 10.7868/S2686954320010051. Perevod: Mikhailov G.A., Lotova G.Z. Monte Carlo algorithms for estimating time asymptotics of multiplication particle flow in a random medium // Doklady Mathematics.— 2020.— Vol. 101, № 1.— P. 40–42.— DOI: 10.1134/S1064562420010056.

4. **Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.** Integraly i ryady. — M.: Nauka, 1981.

5. **Smelov V.V.** Lekcii po teorii perenosa neitronov. — M.: Atomizdat, 1978.

6. **Ambos A.Yu., Mikhailov G.A.** Solution of radiative transfer theory problems for "realistic" models of random media using the Monte Carlo method // Rus. J. Num. Anal. Math. Model. — 2016. — Vol. 31, № 3. — P. 1–10.

7. **Gilbert E.N.** Random subdivisions of space into crystals // Ann. Math. Statist. — 1962. — № 33. — P. 958–972.

8. **Serra J.** Image Analysis and Mathematical Morphology. — London: Academic press, 1982.

9. **Zuev V.E., Titov G.A.** Optika atmosfery i klimat // Sovremennye problemy atmosfernoi optiki. T. 9. — Tomsk: Izd-vo "Spektr" IOA SO RAN, 1996.

10. **Romanov Yu.A.** Tochnye resheniya odnoskorostnogo kineticheskogo uravneniya i ikh ispol'zovanie dlya rascheta diffuzionnykh zadach (usovershenstvovannyi diffuzionnyi metod) // Issledovanie kriticheskikh parametrov reaktornykh sistem. — M.: Gosatomizdat, 1960. — S. 3–26.

11. **Medvedev Il.N., Mikhailov G.A.** New correlative randomized algorithms for statistical modeling of radiation transfer in stochastic medium // Rus. J. Num. Anal. Math. Model. — 2021. — Vol. 34, № 1. — P. 43–55.