УДК 532.1-3

О ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Г. Г. Денисов, В. В. Новиков

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики
Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского,
603005 Нижний Новгород
E-mail: novikov@mm.unn.ru

Изучено течение вязкой жидкости, заполняющей пространство между сферической и эллипсоидальной поверхностями, вращающимися с различными угловыми скоростями. Обсуждаются условия возникновения и особенности радиальных течений жидкости. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании ряда геофизических явлений, связанных с динамикой жидкого ядра Земли.

Ключевые слова: вращающиеся поверхности, вязкая жидкость, радиальное течение, магнитное поле Земли.

В настоящее время установлено, что скорость вращения твердого ядра Земли, которое при относительном движении совершает один оборот предположительно за 200–400 лет [1, 2], превышает скорость вращения мантии. Исходя из этого предложено объяснение долгопериодических вариаций продолжительности суток [3, 4]. Цель настоящей работы — показать, что данная модель допускает возможность радиального течения в жидком ядре, наличие которого определяет существование магнитного поля Земли, и возможность корреляции некоторых особенностей течения жидкости и свойств магнитного поля.

Рассматривается следующая задача. Однородная несжимаемая вязкая жидкость заполняет пространство между вращающимися поверхностями подобно жидкости, находящейся между твердым ядром Земли и ее мантией. Внутреннее тело имеет форму эллипсоида и вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \boldsymbol{e}_z$, где $\boldsymbol{e}_z$ — единичный вектор в направлении оси Oz неподвижной системы координат $Oxyz$. Внешняя поверхность — сфера радиусом R с центром в точке O — вращается вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью ω_2.

В системе $Ox_1y_1z_1$, связанной с внутренним телом, уравнение его поверхности имеет вид

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{a^2} = 1.$$

В сферической системе координат r, φ_1, θ, согласованной с системой $Ox_1y_1z_1$, это уравнение записывается в виде

$$r^2(1 + 2\mu \sin^2\theta \, \sin^2\varphi_1)/a^2 = 1,$$

где $2\mu = a^2/b^2 - 1$. В дальнейшем предполагается, что форма этой поверхности близка к сферической, т. е. $\mu \ll 1$. В этом случае уравнение принимает вид

$$r \approx a(1 - \mu \sin^2\theta \, \sin^2\varphi_1),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-01-00411).

где a — радиус сферы, описывающей эллипсоид. Заменой φ_1 на $\varphi - \omega_1 t$ уравнение поверхности приводится к уравнению в сферической системе координат r, φ, θ, согласованной с неподвижной системой координат $Oxyz$:

$$r = a(1 - \mu \sin^2\theta + \mu \sin^2\theta\ \cos 2(\varphi - \omega_1 t)).$$

Предположим, что число Рейнольдса мало:

$$\omega_1 a^2/\nu \ll 1, \qquad \omega_2 R^2/\nu \ll 1.$$

Тогда в уравнении Навье — Стокса

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \boldsymbol{v},$$

где p, ρ, ν — давление, плотность и вязкость жидкости соответственно, можно опустить нелинейную составляющую силы инерции вследствие ее малости. Применив затем к уравнению операцию rot, получим

$$\frac{\partial \operatorname{rot} \boldsymbol{v}}{\partial t} = \nu \operatorname{rot} \Delta \boldsymbol{v}. \tag{1}$$

Скорость течения жидкости должна удовлетворять также уравнению неразрывности

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \tag{2}$$

и условиям прилипания к поверхностям, ограничивающим жидкость.

Скорости точек поверхностей, а следовательно, краевые условия для скорости течения жидкости имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{v}_\text{с} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r}_\text{с} = \omega_2 \boldsymbol{e}_z \times R\boldsymbol{e}_r = \omega_2 R \sin\theta\, \boldsymbol{e}_\varphi,\\ \boldsymbol{v}_\text{э} = \omega_1 r_\text{э} \sin\theta \boldsymbol{e}_\varphi = a\omega_1 \Big[\Big(1 - \frac{3}{4}\mu\Big)\sin\theta + \frac{\mu}{4}\sin 3\theta + \frac{\mu}{8}(3\sin\theta - \sin 3\theta)(\mathrm{e}^{2i\varphi_1} + \mathrm{e}^{-2i\varphi_1})\Big]\boldsymbol{e}_\varphi.\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь степени тригонометрических функций выражены через функции кратных углов.

Решение задачи (1)–(3) удобно искать с использованием шаровых векторов $\boldsymbol{Y}^k_{im}(\theta, \varphi)$, которые задаются формулами [5]

$$\boldsymbol{Y}^0_{lm} = \mathrm{e}^{im\varphi}\Big(-\frac{im}{\sin\theta}P^m_l \boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial P^m_l}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\varphi\Big),$$

$$\boldsymbol{Y}^+_{lm} = \mathrm{e}^{im\varphi}\Big((l+1)P^m_l \boldsymbol{e}_r - \frac{im}{\sin\theta}P^m_l \boldsymbol{e}_\varphi - \frac{\partial P^m_l}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta\Big),$$

$$\boldsymbol{Y}^-_{lm} = \mathrm{e}^{im\varphi}\Big(lP^m_l \boldsymbol{e}_r + \frac{im}{\sin\theta}P^m_l \boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial P^m_l}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta\Big),$$

где $P^m_l(\cos\theta)$ $(l = 1, 2, \ldots,\ -l \leqslant m \leqslant l)$ — полиномы Лежандра; $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_\theta$ — орты сферической системы координат.

Приведем используемые в дальнейшем известные формулы [5]:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{U}_{lm} = \Big[(l+1)\Big(\varphi'_+ + \frac{l+2}{r}\varphi_+\Big) + l\Big(\varphi'_- - \frac{l-1}{r}\varphi_-\Big)\Big]\mathrm{e}^{im\varphi}P^m_l(\cos\varphi),$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{U}_{lm} = \Big(\varphi'_- - \frac{l-1}{r}\,\varphi_- - \varphi'_+ - \frac{l+2}{r}\,\varphi_+\Big)\boldsymbol{Y}^0_{lm}(\theta,\varphi) + \\ + \frac{l}{2l+1}\Big(\varphi'_0 - \frac{l}{r}\,\varphi_0\Big)\boldsymbol{Y}^+_{lm}(\theta,\varphi) - \frac{l+1}{2l+1}\Big(\varphi'_0 + \frac{l+1}{r}\,\varphi_0\Big)\boldsymbol{Y}^-_{lm}(\theta,\varphi), \qquad (4)$$

$$\Delta\boldsymbol{U}_{lm} = \Big(\varphi''_0 + \frac{2}{r}\,\varphi'_0 - \frac{l(l+1)}{r^2}\,\varphi_0\Big)\boldsymbol{Y}^0_{lm}(\theta,\varphi) + \\ + \Big(\varphi''_+ + \frac{2}{r}\,\varphi'_+ - \frac{(l+1)(l+2)}{r^2}\,\varphi_+\Big)\boldsymbol{Y}^+_{lm}(\theta,\varphi) + \Big(\varphi''_- + \frac{2}{r}\,\varphi'_- - \frac{(l-1)l}{r^2}\,\varphi_-\Big)\boldsymbol{Y}^-_{lm}(\theta,\varphi).$$

Здесь $\boldsymbol{U}_{lm}(r,\theta,\varphi) = \varphi_0(r)\boldsymbol{Y}^0_{lm}(\theta,\varphi) + \varphi_+(r)\boldsymbol{Y}^+_{lm}(\theta,\varphi) + \varphi_-(r)\boldsymbol{Y}^-_{lm}(\theta,\varphi)$. Отметим, что при любом значении $\varphi_0(r)$ дивергенция первого члена $\boldsymbol{U}_{lm}(r,\theta,\varphi)$ равна нулю.

С помощью шаровых векторов выражения (3) для скоростей точек поверхностей в неподвижной системе координат r,φ,θ запишем следующим образом:

$$\boldsymbol{v}_{\text{с}} = \omega_2 R\boldsymbol{Y}^0_{10}(\theta), \\ \boldsymbol{v}_{\text{э}} = \omega_1 a\Big(\Big(1 - \frac{4}{5}\,\mu\Big)\boldsymbol{Y}^0_{10}(\theta) - \frac{2}{15}\,\mu\boldsymbol{Y}^0_{30}(\theta) + \frac{1}{30}\,i[2\boldsymbol{Y}^+_{22}(\theta,\varphi_1) - 3\boldsymbol{Y}^-_{22}(\theta,\varphi)] - \frac{\mu}{6}\,\boldsymbol{Y}^0_{32}(\theta,\varphi_1)\Big) + \text{к.с.}. \qquad (5)$$

Здесь

$$\boldsymbol{Y}^0_{10}(\theta,\varphi) = \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi, \qquad \boldsymbol{Y}^0_{30}(\theta,\varphi) = (\sin\theta + 5\sin 3\theta)\boldsymbol{e}_\varphi,$$

$$\boldsymbol{Y}^+_{2\pm2}(\theta,\varphi) = \mathrm{e}^{\pm 2i\varphi}(3\sin^2\theta\,\boldsymbol{e}_r \mp 2i\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi - \sin 2\theta\,\boldsymbol{e}_\theta),$$

$$\boldsymbol{Y}^-_{2\pm2}(\theta,\varphi) = \mathrm{e}^{\pm 2i\varphi}(2\sin^2\theta\,\boldsymbol{e}_r \pm 2i\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi + \sin 2\theta\,\boldsymbol{e}_\theta),$$

$$\boldsymbol{Y}^0_{3\pm2}(\theta,\varphi) = \mathrm{e}^{\pm 2i\varphi}[(-(1/4)\sin\theta + (3/4)\sin 3\theta)\boldsymbol{e}_\varphi - i\sin 2\theta\boldsymbol{e}_\theta],$$

к.с. — группа функций, комплексно-сопряженных с выражениями, содержащими функции $\boldsymbol{Y}^\pm_{2\pm2}$, $\boldsymbol{Y}^0_{3\pm2}$. Нетрудно показать, что в выражениях (5) для скоростей на поверхностях тел отсутствуют компоненты скорости в направлениях $\boldsymbol{e}_r$ и $\boldsymbol{e}_\theta$.

Краевая задача (1), (2), (5) допускает решение в следующем виде:

$$\boldsymbol{v} = \xi^0_{10}(r)\boldsymbol{Y}^0_{10} + \xi^0_{30}(r)\boldsymbol{Y}^0_{30} + \psi^+_{22}(r,t)\boldsymbol{Y}^+_{22} + \psi^-_{22}(r,t)\boldsymbol{Y}^-_{22} + \psi^0_{32}(r,t)\boldsymbol{Y}^0_{32} + \text{к.с.}. \qquad (6)$$

В силу линейности уравнений (1), (2) каждый член суммы (6) удовлетворяет этим уравнениям. Решение поставленной задачи сводится к определению функций, зависящих от r.

Первые два слагаемых в выражении для скорости жидкости обозначим $\boldsymbol{v}_1$. Эти слагаемые не зависят от переменной φ, т. е. в неподвижной и подвижной системах координат $\boldsymbol{v}_1$ имеет один и тот же вид. Следовательно, составляющая скорости $\boldsymbol{v}_1$ не зависит от времени. В силу условия $\operatorname{div}\boldsymbol{v}_1 = 0$ уравнение (1) для этой составляющей принимает вид $\Delta\boldsymbol{v}_1 = 0$. В соответствии с (4) функции $\xi^0_{10}(r)$, $\xi^0_{30}(r)$ определяются из уравнений

$$\frac{d^2\xi^0_{10}}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{d\xi^0_{10}}{dr} - \frac{2}{r^2}\,\xi^0_{10} = 0, \qquad \frac{d^2\xi^0_{30}}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\xi^0_{30}}{dr} - \frac{12}{r^2}\xi^0_{30} = 0.$$

Отсюда находим $\xi^0_{10} = a_1 r + b_1 r^{-2}$, $\xi^0_{30} = a_2 r^3 + b_2 r^{-4}$.

Остальные составляющие вектора скорости (обозначим их $\boldsymbol{v}_2$) в неподвижной системе координат изменяются со временем, а в системе координат, связанной с эллипсоидом, стационарны. Иными словами, зависимость $\boldsymbol{v}_2$ от времени возникает при переходе от переменной φ_1 к φ. Поскольку $\varphi_1 = \varphi - \omega_1 t$, для функций $\psi^q_{lm}(r,t)$, входящих в (6), имеем

$$\psi^q_{lm}(r,t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\,\xi^q_{lm}(r), \qquad \lambda = -2i\omega_1.$$

Подставляя $\boldsymbol{v}_2$ в (1), с учетом (4) получаем следующие уравнения для $\xi^0_{32}(r)$, $\xi^{\pm}_{22}(r)$:

$$\lambda\xi^0_{32} = \nu\Big(\frac{d^2\xi^0_{32}}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{d\xi^0_{32}}{dr} - \frac{12}{r^2}\,\xi^0_{32}\Big),$$

$$\lambda\Big(\frac{d\xi^+_{32}}{dr} + \frac{4}{r}\,\xi^+_{22}\Big) = \nu\Big(\frac{d^3\xi^+_{22}}{dr^3} + \frac{6}{r}\,\frac{d^2\xi^+_{22}}{dr^2} - \frac{6}{r^2}\,\frac{d\xi^+_{22}}{dr} - \frac{24}{r^3}\,\xi^+_{22}\Big),$$

$$\lambda\Big(\frac{d\xi^-_{22}}{dr} - \frac{1}{r}\,\xi^-_{22}\Big) = \nu\Big(\frac{d^3\xi^-_{22}}{dr^3} + \frac{1}{r}\,\frac{d^2\xi^-_{22}}{dr^2} - \frac{6}{r^2}\,\frac{d\xi^-_{22}}{dr} + \frac{6}{r^3}\,\xi^-_{22}\Big).$$

Предположение о малости числа Рейнольдса позволяет находить решение каждого из уравнений в виде ряда по параметру $\lambda r^2/\nu \ll 1$. Сохраняя в нем линейные по этому параметру члены, получаем

$$\xi^0_{32}(r) = a_3 r^3\Big(1 + \frac{1}{18}\,\frac{\lambda}{\nu}\,r^2\Big) + b_3 r^{-4}\Big(1 - \frac{1}{10}\,\frac{\lambda}{\nu}\,r^2\Big),$$

$$\xi^+_{22}(r) = a_4 r^{-2}\Big(1 - \frac{1}{6}\,\frac{\lambda}{\nu}\,r^2\Big) + b_4 r^3\Big(1 + \frac{1}{18}\,\frac{\lambda}{\nu}\,r^2\Big) + c_4 r^{-4},$$

$$\xi^-_{22}(r) = a_5 r^{-2}\Big(1 - \frac{1}{10}\,\frac{\lambda}{\nu}\,r^2\Big) + b_5 r^3\Big(1 + \frac{1}{28}\,\frac{\lambda}{\nu}\,r^2\Big) + c_5 r.$$

Для составляющих скорости, содержащих шаровые векторы $\boldsymbol{Y}^0_{lm}$, уравнение неразрывности (2) автоматически удовлетворяется. Для функций $\xi^+_{22}(r)$, $\xi^-_{22}(r)$ из уравнения (2) следует соотношение

$$3\Big(\frac{d\xi^+_{22}}{dr} + 4\,\frac{1}{r}\,\xi^+_{22}\Big) + 2\Big(\frac{d\xi^-_{22}}{dr} - \frac{1}{r}\,\xi^-_{22}\Big) = 0,$$

которое позволяет однозначно определить эти функции. Из данного соотношения следует, что $a_5 = a_4$, $b_5 = -21b_4/4$.

В неподвижной системе координат выражение для скорости течения имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(r,t) &= \boldsymbol{v}_1(r,\theta,\varphi) + \boldsymbol{v}_2(r,\theta,\varphi,t) = \xi^0_{10}(r)\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi + \xi^0_{30}(r)(\sin\theta + 5\sin 3\theta)\boldsymbol{e}_\varphi + \\ &+ \mathrm{e}^{-2i\omega_1 t}\,\mathrm{e}^{2i\varphi}\{\xi^0_{32}(r)[(-\sin\theta + 3\sin 3\theta)\boldsymbol{e}_\varphi - 4i\sin 2\theta\boldsymbol{e}_\theta] + \xi^+_{22}(r)(3\sin^2\theta\,\boldsymbol{e}_r - \\ &- 2i\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi - \sin 2\theta\,\boldsymbol{e}_\theta) + \xi^-_{22}(r)(2\sin^2\theta\,\boldsymbol{e}_r + 2i\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi + \sin 2\theta\,\boldsymbol{e}_\theta)\} + \text{к.с.}.\end{aligned} \qquad (7)$$

Приравнивая выражение (7) при $r = R$ и $r = a$ к выражениям для скоростей поверхностей сферы и эллипсоида (5), получаем

$$\begin{gathered}\xi^0_{10}(R) = \omega_2 R, \quad \xi^0_{10}(a) = \omega_1 a(1 - 4\mu/5),\\ \xi^0_{30}(R) = 0, \quad \xi^0_{30}(a) = \mu\omega_1 a/20, \qquad \xi^0_{32}(R) = 0, \quad \xi^0_{32}(a) = -\mu a\omega_1/6,\\ \xi^+_{22}(R) = 0, \quad \xi^+_{22}(a) = i\mu a\omega_1/15, \qquad \xi^-_{22}(R) = 0, \quad \xi^-_{22}(a) = -i\mu a\omega_1/10.\end{gathered} \qquad (8)$$

Из системы уравнений (8) находим входящие в выражение для $\xi^q_{lm}(r)$ величины a_i, b_i, c_i. Коэффициенты a_1, b_1, a_2, b_2 не содержат параметр λ/ν и равны

$$a_1 = \omega_2 + \frac{a^3}{R^3 - a^3}\Big(\omega_2 - \omega_1 + \frac{4}{5}\,\mu\omega_1\Big), \qquad b_1 = -\frac{a^3R^3}{R^3 - a^3}\Big(\omega_2 - \omega_1 + \frac{4}{5}\,\mu\omega_1\Big),$$

$$a_2 = -\omega_1\,\frac{1}{20}\,\mu\,\frac{a^5}{R^7 - a^7}, \qquad b_2 = \omega_1\,\frac{1}{20}\,\mu\frac{a^5R^7}{R^7 - a^7}.$$

Остальные коэффициенты a_i, b_i, c_i зависят от параметра $\lambda R^2/\nu \ll 1$, который при вычислении этих коэффициентов в случае малых μ может быть опущен. Для a_3, b_3 имеем

$$a_3 = \omega_1\,\frac{1}{6}\,\mu\,\frac{a^5}{R^7 - a^7}, \qquad b_3 = -\omega_1\,\frac{1}{6}\,\mu\,\frac{a^5R^7}{R^7 - a^7}.$$

Запишем систему уравнений для a_4, b_4, c_4, c_5, которая следует из краевых условий для функций $\xi^+_{22}(r)$, $\xi^-_{22}(r)$ и условия $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$:

$$\xi^+_{22}(r) = a_4r^{-2} + b_4r^3 + c_4r^{-4} = \begin{cases} 0, & r = R, \\ i\mu a\omega_1/15, & r = a, \end{cases}$$

$$\xi^-_{22}(r) = a_4r^{-2} - \frac{21}{4}\,b_4r^3 + c_5r = \begin{cases} 0, & r = R, \\ -i\mu a\omega_1/10, & r = a. \end{cases}$$

Представляет интерес определение вида выражения для скорости течения жидкости в системе координат, вращающейся с угловой скоростью ω_2 вместе с внешней сферой (виртуальный вид течения с поверхности Земли). Переход к этой системе осуществляется заменой φ на $\varphi + \omega_2t$ и добавлением к выражению (7) слагаемого $-\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r} = -\omega_2 r\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi$. В данной системе координат внешняя сфера покоится ($\omega_{\text{с}} = 0$), а $\omega_{\text{э}} = \omega_1 - \omega_2$.

Таким образом, для вычисления коэффициентов a_i, b_i, c_i в (8) необходимо положить $\omega_2 = 0$, а ω_1 заменить на $\omega_1 - \omega_2$.

Рассмотрим некоторые особенности течения во вращающейся системе координат. Стационарная составляющая скорости

$$\boldsymbol{v}_1(r,\theta) = \{[\xi^0_{10}(r) + \xi^0_{30}(r)]\sin\theta + 5\xi^0_{30}(r)\sin 3\theta\}\boldsymbol{e}_\varphi$$

удовлетворяет условиям

$$\xi^0_{10}(R) = 0, \qquad \xi^0_{10}(a) = (\omega_1 - \omega_2)a(1 - 4\mu/5),$$

$$\xi^0_{30}(R) = 0, \qquad \xi^0_{30}(a) = (\omega_1 - \omega_2)a\mu/20.$$

При $\omega_1 > \omega_2$ основная (синусоидальная) составляющая $\boldsymbol{v}_1$ направлена по вектору $\boldsymbol{e}_\varphi$, т. е. применительно к Земле — на восток. Другая, существенно меньшая (порядка μ) составляющая $\boldsymbol{v}_1$ в зависимости от знака $\sin 3\theta$ направлена на восток или на запад. В приэкваториальных широтах, где $\sin 3\theta < 0$, эта составляющая направлена на запад и при $r = a$ равна $-(1/4)\mu a(\omega_1 - \omega_2)\boldsymbol{e}_\varphi$.

Отмеченная особенность движения жидкости подобна поведению магнитного поля на поверхности Земли: дрейф на запад структурных особенностей (недипольной составляющей) магнитного поля в приэкваториальных широтах со скоростью 0,2° в год и отсутствие такого дрейфа в средних широтах [6]. Именно вследствие наличия дрейфа на запад структурных особенностей магнитного поля ранее ошибочно считалось, что твердое ядро вращается медленнее мантии [7].

Во вращающейся вместе с внешней поверхностью системе координат переменная составляющая скорости течения $\boldsymbol{v}_2$ изменяется со временем периодически с частотой $2(\omega_1-\omega_2)$. Удвоенная разность угловых скоростей мантии и твердого ядра находит объяснение в динамике Земли. В работах [3, 4] долгопериодические изменения угловой скорости вращения Земли исследованы в модели, основанной на том, что твердое ядро Земли является эллипсоидальным и скорость его вращения превышает скорость вращения мантии. Показано, что при относительном движении твердое ядро совершает один оборот приблизительно за 120 лет, т. е. $\omega_1-\omega_2 \approx 2\pi/120$. Поэтому вследствие эллипсоидальности ядра временные изменения скорости течения происходят с периодом, составляющим приблизительно 60 лет. При этом обнаруживается еще одно сходство особенностей полученного течения жидкости между вращающимися поверхностями с поведением магнитного поля Земли. Во временном спектре вековых магнитных вариаций четко выделяется составляющая с периодом порядка 60 лет [6].

Заметим, что обычно дрейф на запад структурных особенностей магнитного поля Земли и вековые магнитные вариации объясняются наличием термоконвекционных процессов в жидком ядре Земли [6].

Радиальное течение жидкости и зависимость скорости течения от времени обусловлены вращением эллипсоидального внутреннего тела вокруг оси, перпендикулярной оси его симметрии. При совпадении оси симметрии с осью вращения тела радиальное течение и временная зависимость скорости $\boldsymbol{v}$ отсутствуют.

Действительно, пусть ось Oz является осью симметрии эллипсоида, т. е. уравнение поверхности имеет вид

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{a^2}+\frac{z_1^2}{b^2}=1.$$

В сферических координатах при условии, что $2\mu=a^2/b^2-1\ll 1$, имеем

$$r=a(1-\mu\cos^2\theta).$$

Выражение для скорости жидкости на поверхности внутреннего тела принимает вид

$$\boldsymbol{v}_э=\omega_1 a(1-\mu\cos^2\theta)\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi=\omega_1 a[(1-\mu/5)\boldsymbol{Y}_{10}^0(\theta)-(\mu/20)\boldsymbol{Y}_{30}^0(\theta)].$$

В этом случае в силу симметрии решение задачи о течении жидкости между сферой и эллипсоидом не зависит от φ, а следовательно, и от времени:

$$\boldsymbol{v}=\xi_{10}^0(r)\boldsymbol{Y}_{10}^0+\xi_{30}^0(r)\boldsymbol{Y}_{30}^0=[\xi_{10}^0\sin\theta+\xi_{30}^0(\sin\theta+5\sin 3\theta)]\,\boldsymbol{e}_\varphi.$$

Здесь

$$\xi_{10}^0=a_1r+b_1r^{-2},\qquad \xi_{30}^0=a_2r^3+b_2r^{-4},$$

$$a_1=\frac{1}{R^3-a^3}\Big(\omega_2R^3-\omega_1a^3\Big(1-\frac{\mu}{5}\Big)\Big),\qquad b_1=-\frac{a^3R^3}{R^3-a^3}\Big(\omega_2-\omega_1\Big(1-\frac{\mu}{5}\Big)\Big),$$

$$a_2=\frac{1}{20}\,\mu\,\frac{\omega_1a^5}{R^7-a^7},\qquad b_2=-\frac{1}{20}\,\mu\,\frac{\omega_1a^5R^7}{R^7-a^7}.$$

Отметим, что в приэкваториальной области дрейф течения на запад возникает как в случае, когда ось вращения и ось симметрии поверхности перпендикулярны, так и в случае, когда они совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Song X., Richards R. G.** Seismological evidence for differential rotation of the Earth's inner core // Nature. 1996. V. 382, N 6588. P. 221.
2. **Овчинников В. М., Адушкин В. В., Ан В. А.** О скорости относительного вращения внутреннего ядра Земли // Докл. АН. 1998. Т. 362, № 5. С. 683–686.
3. **Денисов Г. Г., Новиков В. В., Федоров А. Е.** О долгопериодических вариациях угловой скорости вращения Земли // Докл. АН. 2005. Т. 400, № 5. С. 625–629.
4. **Денисов Г. Г., Новиков В. В., Федоров А. Е.** Гравитационное взаимодействие твердого ядра и мантии Земли и вариации длительности суток // Астрон. журн. 2008. Т. 85, № 12. С. 1143–1150.
5. **Петрашень Г. И.** Динамические задачи теории упругости в случае изотропной сферы // Учен. зап. Ленингр. гос. ун-та. Сер. мат. наук. Механика. 1949. Вып. 17. С. 3–27.
6. **Физическая** энциклопедия / Гл. ред. А. М. Прохоров. М.: Сов. энцикл., 1990. Т. 2. С. 670.
7. **Монин А. С.** Вращение Земли и климат. Л.: Гидрометеоиздат, 1972.

Поступила в редакцию 13/I 2010 г.