

УДК 532.526:532.516

## АСИМПТОТИКА ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ РАЗРЫВНЫХ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

А. Б. Усов

Ростовский государственный университет, 344104 Ростов-на-Дону

С использованием метода пограничного слоя с одновременным растяжением пространственной и временной координат построена асимптотика непрерывного решения плоской задачи о движении вязкой сжимаемой жидкости при разрывных начальных полях скорости и давления.

**Ключевые слова:** вязкая сжимаемая жидкость, внутренний пограничный слой, асимптотика.

**Введение.** Задача о течении вязкой сжимаемой жидкости при разрывных начальных данных изучалась во многих работах [1–7], но исследования проводились при различных упрощающих гипотезах, например при отсутствии нелинейных конвективных слагаемых в уравнениях движения вязкой жидкости [5]. В общей постановке задача методом пограничного слоя [8] не исследовалась. Предложенный в [9] метод пограничного слоя с одновременным растяжением пространственной и временной координат позволил построить асимптотику решения задачи на малых временах без каких-либо дополнительных предположений.

**1. Постановка задачи.** Пусть вязкая баротропная жидкость в отсутствие внешних сил занимает все пространство. В начальный момент времени заданы поля возмущений безразмерных вектора скорости  $\mathbf{v}$  и плотности  $\rho$  жидкости, которые терпят разрыв на выпуклой поверхности  $\Gamma_0$ , делящей всю жидкость на области  $R_0, Q_0$  (рис. 1):

$$R_0: \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^+, \quad \rho = \rho^+ \quad \text{при} \quad t = 0; \quad Q_0: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \rho = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (1.1)$$

Функции  $\mathbf{v}^+, \rho^+$  заданы ( $\mathbf{v}^+|_{\Gamma_0} \neq 0, \rho^+|_{\Gamma_0} > 0$ ).

Условия (1.1) порождают распространяющуюся в жидкости при  $t > 0$  волну уплотнения, при переходе через которую вектор скорости и давление терпят слабый разрыв [1], т. е. пространственные производные компонент вектора скорости жидкости, а также давление претерпевают разрыв. Фронт волны уплотнения  $\Gamma_t$  делит всю жидкость на области  $R_t$  и  $Q_t$ , которые зависят от времени, так как скачок уплотнения перемещается в жидкости (рис. 1).

Задача исследуется в плоской постановке. Вводится подвижная ортогональная система координат  $Oy\varphi$ , жестко связанная с кривой  $\Gamma_t$  ( $O$  — произвольная точка  $\Gamma_t$ ;  $y$  — расстояние от точки до кривой  $\Gamma_t$  по внутренней к ней нормали;  $\varphi$  — длина дуги вдоль  $\Gamma_t$ , отсчитываемая по часовой стрелке).

Абсолютное изотермическое движение жидкости в системе координат  $Oy\varphi$  в областях  $R_t$  и  $Q_t$  в отсутствие внешних сил описывается системой безразмерных уравнений

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-01-00105).

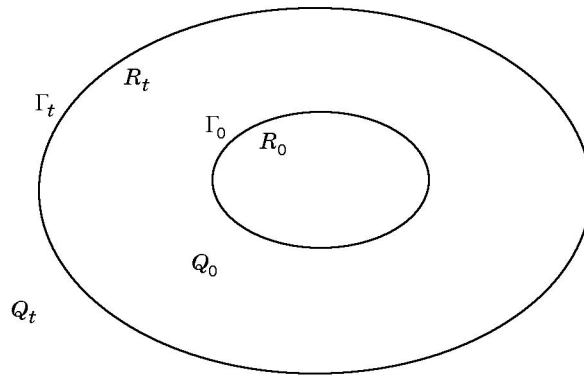


Рис. 1

Навье — Стокса [1, 4], включающей уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - c \frac{\partial \rho}{\partial y} + \operatorname{div} [(\rho + \rho_*) \mathbf{v}] = 0, \quad (1.2)$$

уравнения движения жидкости в системе координат  $Oy\varphi$

$$\begin{aligned} (\rho + \rho_*) \left[ \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{v_\varphi}{H_1} \frac{\partial v_y}{\partial \varphi} + (v_y - c) \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{v_\varphi^2}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial y} \right] = \\ = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \left[ 2 \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial y} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_y}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{v}}{\partial y} \right], \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} (\rho + \rho_*) \left[ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \frac{v_\varphi}{H_1} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + (v_y - c) \frac{\partial v_\varphi}{\partial y} + \frac{v_\varphi (v_y - c)}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{v_y}{H_1} \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right] = \\ = - \frac{1}{H_1} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \left[ \frac{2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial y} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_y}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) - \frac{2}{3H_1} \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{v}}{\partial \varphi} \right] \end{aligned}$$

и уравнение состояния

$$p = D\rho. \quad (1.4)$$

Здесь  $\mathbf{v} = (v_y, v_\varphi)$  — вектор возмущений безразмерной абсолютной скорости частиц жидкости в  $Oy\varphi$ ;  $c(\varphi, t)$  — безразмерная скорость перемещения кривой  $\Gamma_t$ ;  $p$  — возмущение безразмерного гидродинамического давления;  $\rho$  — возмущение безразмерной плотности жидкости;  $\rho_*$  — безразмерная плотность жидкости в невозмущенном состоянии;  $\operatorname{Re} = \rho' v' l' / \mu'$  — число Рейнольдса;  $\rho'$ ,  $v'$ ,  $l'$  — характерные значения плотности, скорости и длины соответственно, в качестве которых берутся, например, размерные плотность жидкости, модуль вектора скорости жидкости в начальный момент времени в области  $R_0$  и ширина области  $R_0$ ;  $\mu'$  — динамическая молекулярная вязкость жидкости ( $\mu' \ll 1$ );  $D = D' / (v')^2$ ;  $D'$  — квадрат скорости звука в жидкости;  $H_1 = 1 + y / \varkappa(\varphi)$  — коэффициент Ламе системы координат  $Oy\varphi$ ;  $\varkappa(\varphi)$  — радиус кривизны  $\Gamma_t$ . Предполагается, что число Рейнольдса не зависит от числа Маха ( $M^2 = (v')^2 / D'$ ).

Уравнения (1.2)–(1.4) рассматриваются с начальными условиями (1.1), условиями на бесконечности и условиями на скачке уплотнения (при  $y = 0$ ), который перемещается в жидкости со скоростью  $c(\varphi, t)$  [1, 8]:

$$[v_\varphi] = 0, \quad [v_y] = 0, \quad \left[ -p + \frac{4}{3\operatorname{Re}} \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] = 0, \quad \left[ \frac{\partial v_\varphi}{\partial y} \right] = 0, \quad c = v_y, \quad (1.5)$$

где  $[f] = \lim_{y \rightarrow 0, y \in R_t} f(\varphi, y, t) - \lim_{y \rightarrow 0, y \in Q_t} f(\varphi, y, t)$  — скачок функции  $f$  при переходе через кривую  $\Gamma_t$ .

Методом пограничного слоя [8] строятся асимптотические разложения решения задачи (1.1)–(1.5).

**2. Построение функций первого итерационного процесса.** Решение задачи ищется в виде аналитических функций малого параметра  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = 1/\sqrt{\text{Re}}$ ), т. е. в виде степенных рядов Тейлора по  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} &= (v_y^{(0)}, v_\varphi^{(0)}), & v_y^{(0)} &= \sum_{i=0}^N \varepsilon^i b_i(y, \varphi, t), & v_\varphi^{(0)} &= \sum_{i=0}^N \varepsilon^i a_i(y, \varphi, t), \\ \rho &= \rho^{(0)} = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \rho_i(y, \varphi, t), & p &= D\rho, & c &= c^{(0)} = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i c_i^{(0)}(\varphi, t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Функции  $a_i, b_i, c_i^{(0)}, \rho_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) называются функциями первого итерационного процесса. Подставив ряды (2.1) в уравнения (1.2)–(1.4), для определения функций первого итерационного процесса получим уравнения Эйлера идеальной баротропной жидкости. Для идеальной сжимаемой жидкости граничные условия на скачке уплотнения при начальных условиях (1.1) имеют вид [1]

$$[(\rho + \rho_*)(v_y - c)] = 0, \quad [(\rho + \rho_*)v_y(v_y - c) + p] = 0, \quad [v_\varphi] = 0 \quad (2.2)$$

и не позволяют удовлетворить всем условиям (1.5). Предполагается, что граничные (2.2) и начальные (1.1) условия согласованы, т. е. условия (2.2) выполняются при  $t = 0$ . В противном случае в идеальной жидкости наблюдается распад начального разрыва. Таким образом, при  $y = 0$  выполняются равенства

$$\begin{aligned} c(0, \varphi) &= v_y^+(0, \varphi)(\rho^+(0, \varphi) + \rho_*)/\rho^+(0, \varphi), \\ (\rho^+(0, \varphi) + \rho_*)v_y^+(0, \varphi)(v_y^+(0, \varphi) - c(0, \varphi)) + D\rho^+(0, \varphi) &= 0, & v_\varphi^+(0, \varphi) &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{v}^+ = (v_y^+, v_\varphi^+)$ .

Отыскивая решение задачи (1.1)–(1.5) в виде рядов (2.1), удовлетворить всем условиям (1.5) не удастся. Вблизи поверхности  $\Gamma_t$  образуется тонкий слой жидкости (внутренний пограничный слой [4, 5]), в котором резко изменяются скорость жидкости и давление. Процессы, протекающие в пограничном слое, описываются функциями пограничного слоя.

**3. Построение функций пограничного слоя.** Решение задачи (1.1)–(1.5) ищется в виде [8]

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)}, & \rho &= \rho^{(0)} + \rho^{(1)} + \rho^{(2)}, \\ p &= p^{(0)} + p^{(1)} + p^{(2)}, & c &= c^{(0)} + c^{(1)}, & p^{(k)} &= D\rho^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \\ v_y^{(1)} &= \sum_{i=N_1}^N \varepsilon^i h_i^{(1)}(s, \varphi, \tau), & v_y^{(2)} &= \sum_{i=N_1}^N \varepsilon^i h_i^{(2)}(s, \varphi, \tau), \\ v_\varphi^{(1)} &= \sum_{i=N_2}^N \varepsilon^i g_i^{(1)}(s, \varphi, \tau), & v_\varphi^{(2)} &= \sum_{i=N_2}^N \varepsilon^i g_i^{(2)}(s, \varphi, \tau), \\ \rho^{(1)} &= \sum_{i=N_3}^N \varepsilon^i \alpha_i^{(1)}(s, \varphi, \tau), & \rho^{(2)} &= \sum_{i=N_3}^N \varepsilon^i \alpha_i^{(2)}(s, \varphi, \tau), & c^{(1)} &= \sum_{i=N_4}^N \varepsilon^i c_i^{(1)}(\varphi, \tau). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Постоянные  $N_1, \dots, N_4$  определяются в процессе построения функций пограничного слоя. Функции  $v^{(0)}, \rho^{(0)}, p^{(0)}, c^{(0)}$  являются функциями первого итерационного процесса и терпят сильный разрыв на поверхности  $\Gamma_t$ . Функции  $g_i^{(m)}, h_i^{(m)}, c_i^{(1)}, \alpha_i^{(m)}$  ( $m = 1, 2$ ) называются функциями второго итерационного процесса (функциями внутреннего пограничного слоя в вязкой жидкости). Считаем, что функции пограничного слоя, в отличие от [4–8], зависят от двух растянутых переменных  $s = y/\varepsilon^{k_1}, \tau = t/\varepsilon^{k_2}$  ( $k_1, k_2 = \text{const}$ ). Функции пограничного слоя определены вблизи кривой  $\Gamma_t$  по разные стороны от нее (в областях  $R_t$  и  $Q_t$ ) и обеспечивают непрерывность течения вязкой жидкости при переходе через  $\Gamma_t$ .

Рассуждая аналогично [9] и отказываясь от требования сохранения дивергенции вектора скорости в каждом приближении, получим следующие варианты растяжения пограничного слоя:

$$k_1 = 1 + 0,5k_2, \quad k_2 > 2, \quad N_1 = 0, \quad N_2 = k_2, \quad N_3 = -k_1 + k_2, \quad N_4 = N_1; \quad (3.2)$$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 2, \quad N_1 = 0, \quad N_2 = 2, \quad N_3 = 0, \quad N_4 = 0. \quad (3.3)$$

Решение задачи (1.1)–(1.5) единственно [1], поэтому параметры растяжения пограничного слоя, задаваемые формулами (3.2), (3.3), определяют различные представления одной и той же асимптотики решения задачи. Эквивалентность этих представлений на малых временах доказывается аналогично [9]. Построить функции внутреннего пограничного слоя, не растягивая время ( $k_2 = 0$ ) и не делая дополнительных предположений, методом пограничного слоя [8] не удастся. При  $k_2 \neq 0$  внутренний пограничный слой можно построить без каких-либо дополнительных предположений.

Построим пограничный слой в случае

$$k_1 = 3, \quad k_2 = 4, \quad N_1 = 0, \quad N_2 = 4, \quad N_3 = 1, \quad N_4 = 1.$$

Решение задачи (1.1)–(1.5) ищется в виде рядов (3.1). В идеальной жидкости имеется фронт ударной волны, на котором решение терпит сильный разрыв, в вязкой жидкости этот разрыв сглаживается за счет сил диссипации. Подставим ряды (3.1) в уравнения (1.2), (1.3). Учтем результаты первого итерационного процесса: функции этого процесса удовлетворяют однородным (в главном приближении) и неоднородным (в последующих приближениях) уравнениям Эйлера идеальной сжимаемой жидкости. В полученных уравнениях разложим функции, зависящие от “медленного” времени  $t = \tau\varepsilon^4$  и переменной  $y = s\varepsilon^3$ , в ряды Тейлора в точках  $t = 0$  и  $y = 0$ . Собирая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим уравнения пограничного слоя.

В главном приближении уравнения пограничного слоя имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_4^{(1)}}{\partial \tau} - h_0^{(1)} \frac{\partial c_0^{(0)}}{\partial \varphi} \Big|_{t=0} + (h_0^{(1)} - c_0^{(1)}) \frac{\partial v_\varphi^+}{\partial y} \Big|_{y=0} - (h_0^{(1)} + v_y^+ \Big|_{y=0}) \frac{\partial c_0^{(1)}}{\partial \varphi} &= \frac{1}{\rho_* + \rho^+ \Big|_{y=0}} \frac{\partial^2 g_4^{(1)}}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial g_4^{(2)}}{\partial \tau} - h_0^{(2)} \left[ \frac{\partial c_0^{(0)}}{\partial \varphi} \Big|_{t=0} + \frac{\partial c_0^{(1)}}{\partial \varphi} \right] &= \frac{1}{\rho_*} \frac{\partial^2 g_4^{(2)}}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial h_0^{(1)}}{\partial \tau} &= \frac{4}{3(\rho_* + \rho^+ \Big|_{y=0})} \frac{\partial^2 h_0^{(1)}}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial h_0^{(2)}}{\partial \tau} = \frac{4}{3\rho_*} \frac{\partial^2 h_0^{(2)}}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial \alpha_1^{(1)}}{\partial \tau} + (\rho^+ \Big|_{y=0} + \rho_*) \frac{\partial h_0^{(1)}}{\partial s} &= 0, \quad \frac{\partial \alpha_1^{(2)}}{\partial \tau} + \rho_* \frac{\partial h_0^{(2)}}{\partial s} = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

в последующих приближениях — вид ( $k = 5, 6, \dots, N$ )

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g_k^{(1)}}{\partial \tau} - h_{k-4}^{(1)} \frac{\partial c_0^{(0)}}{\partial \varphi} \Big|_{t=0} + (h_{k-4}^{(1)} - c_{k-4}^{(1)}) \frac{\partial v_\varphi^+}{\partial y} \Big|_{y=0} - h_0^{(1)} \frac{\partial c_{k-4}^{(1)}}{\partial \varphi} - h_{k-4}^{(1)} \frac{\partial c_0^{(1)}}{\partial \varphi} = \\
 = \frac{1}{\rho_* + \rho^+|_{y=0}} \frac{\partial^2 g_k^{(1)}}{\partial s^2} + \Phi_k^{(1)}, \\
 \frac{\partial g_k^{(2)}}{\partial \tau} - h_{k-4}^{(2)} \left[ \frac{\partial c_0^{(0)}}{\partial \varphi} \Big|_{t=0} + \frac{\partial c_0^{(1)}}{\partial \varphi} \right] - h_0^{(2)} \frac{\partial c_{k-4}^{(1)}}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho_*} \frac{\partial^2 g_k^{(2)}}{\partial s^2} + \Phi_k^{(2)}, \\
 \frac{\partial h_{k-4}^{(1)}}{\partial \tau} = \frac{4}{3(\rho_* + \rho^+|_{y=0})} \frac{\partial^2 h_{k-4}^{(1)}}{\partial s^2} + \Phi_k^{(3)}, \quad \frac{\partial h_{k-4}^{(2)}}{\partial \tau} = \frac{4}{3\rho_*} \frac{\partial^2 h_{k-4}^{(2)}}{\partial s^2} + \Phi_k^{(4)}, \\
 \frac{\partial \alpha_{k-3}^{(1)}}{\partial \tau} + (\rho^+|_{y=0} + \rho_*) \frac{\partial h_{k-4}^{(1)}}{\partial s} = \Phi_k^{(5)}, \quad \frac{\partial \alpha_{k-3}^{(2)}}{\partial \tau} + \rho_* \frac{\partial h_{k-4}^{(2)}}{\partial s} = \Phi_k^{(6)},
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

где  $\Phi_k^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ) — известные функции, зависящие от функций пограничного слоя и первого итерационного процесса, определяемых в результате решения задач при  $i = 4, 5, \dots, k-1$ . В силу (2.3) функция  $c_0^{(0)}(0, \varphi)$  имеет вид

$$c_0^{(0)}(0, \varphi) = v_y^+(0, \varphi)(\rho^+(0, \varphi) + \rho_*)/\rho^+(0, \varphi).$$

Таким образом, задачи для функций пограничного слоя в первом и последующих приближениях (см. (3.5)) отличаются от задачи в главном приближении (см. (3.4)) только наличием известной неоднородности.

При выводе граничных условий на кривой  $\Gamma_t$  для функций первого и второго итерационных процессов будем учитывать, что в случае идеальной сжимаемой жидкости граничные условия на  $\Gamma_t$  имеют вид (2.2). Подставляя ряды (2.1) в равенства (2.2) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим граничные условия на  $\Gamma_t$  для функций первого итерационного процесса при  $y = 0$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^0: \quad [D\rho_0 + a_0(\rho_0 + \rho_*)(a_0 - c_0^{(0)})] = 0, \quad [b_0] = 0, \\
 (\rho_0 + \rho_*)(a_0 - c_0^{(0)}) = -\rho_* c_0^{(0)};
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^k: \quad \left[ D\rho_k + \sum_{i+j+m=k} a_j \rho_j (a_m - c_m^{(0)}) + \sum_{j+m=k} a_j \rho_* (a_m - c_m^{(0)}) \right] = 0, \\
 [b_k] = 0, \quad \sum_{j+i=k} \rho_i (a_j - c_j^{(0)}) = -\rho_* c_k^{(0)}, \quad k = 1, 2, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Подставим ряды (3.1) в условия (1.5). Разлагая функции, зависящие от “медленного” времени  $t$ , в ряды Тейлора в точке  $t = 0$  и собирая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим граничные условия для функций второго итерационного процесса при  $s = 0$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g_4^{(1)}}{\partial s} = -\frac{\partial g_4^{(2)}}{\partial s}, \quad \frac{\partial h_0^{(1)}}{\partial s} = -\frac{\partial h_0^{(2)}}{\partial s}, \quad g_4^{(1)} = g_4^{(2)}, \\
 h_0^{(1)} + v_y^+|_{y=0} = h_0^{(2)}, \quad c_0^{(1)} = h_0^{(1)} - v_y^+|_{y=0} \rho_*/(\rho^+|_{y=0}); \\
 \frac{\partial g_k^{(1)}}{\partial s} = -\frac{\partial g_k^{(2)}}{\partial s}, \quad \frac{\partial h_{k-4}^{(1)}}{\partial s} = -\frac{\partial h_{k-4}^{(2)}}{\partial s}, \quad g_k^{(1)} = g_k^{(2)}, \quad k = 5, 6, \dots, N,
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$h_{k-4}^{(1)} + \sum_{i+4m=k-4} \frac{\tau^m}{m!} \frac{\partial^m a_i^{(1)}}{\partial t^m} \Big|_{t=0} = h_{k-4}^{(2)} + \sum_{i+4m=k-4} \frac{\tau^m}{m!} \frac{\partial^m a_i^{(2)}}{\partial t^m} \Big|_{t=0}, \quad (3.9)$$

$$c_{k-4}^{(1)} = h_{k-4}^{(1)} + \sum_{i+4m=k-4} \frac{\tau^m}{m!} \frac{\partial^m a_i^{(1)}}{\partial t^m} \Big|_{t=0} - \sum_{i+4m=k-4} \frac{\tau^m}{m!} \frac{\partial^m c_i^{(0)}}{\partial t^m} \Big|_{t=0}.$$

Здесь  $a_i^{(1)} = \lim_{y \rightarrow 0, y \in R_t} a_i(\varphi, y, t)$ ;  $a_i^{(2)} = \lim_{y \rightarrow 0, y \in Q_t} a_i(\varphi, y, t)$ . В формулах (3.8), (3.9) функции первого итерационного процесса известны из решения соответствующих задач.

Алгоритм решения задачи состоит в следующем:

1. Функции  $a_k, b_k, c_k^{(0)}, \rho_k, p_k$  ( $k = 0$ ) определяются из однородных (в главном приближении) и неоднородных (в последующих приближениях) уравнений Эйлера идеальной сжимаемой жидкости с условиями (3.6) или (3.7), условиями на бесконечности и начальными условиями:  $\mathbf{v}_k^{(0)} = 0, \rho_k = 0, k = 1, 2, \dots, N$ ; в области  $R_0$   $\mathbf{v}_0^{(0)} = \mathbf{v}^+, \rho_0 = \rho^+$ ; в области  $Q_0$   $\mathbf{v}_0^{(0)} = 0, \rho_0 = 0$  при  $t = 0$ .

2. Решается задача (3.5) с условиями убывания на бесконечности, нулевыми начальными условиями и условиями (3.9). Определяются функции  $g_{k+4}^{(m)}, h_k^{(m)}, c_k^{(1)}, \alpha_{k+1}^{(m)}, m = 1, 2$  ( $k = 0$ ).

2. Процедура повторяется для следующих значений  $k$ .

Главные члены погранслойных поправок к решению — решение уравнений (3.4) с условиями (3.8), нулевыми начальными условиями и условиями убывания на бесконечности — записываются в виде [10]

$$g_4^{(1)}(s, \varphi, \tau) = \int_0^\tau \int_0^\infty \left[ -h_0^{(1)}(\eta, \varphi, t) \frac{\partial c_0^{(0)}(\varphi, 0)}{\partial \varphi} + \right. \\ \left. + (h_0^{(1)}(\eta, \varphi, t) - c_0^{(1)}(\varphi, t)) \frac{\partial v_\varphi^+}{\partial y}(0, \varphi) - (h_0^{(1)}(\eta, \varphi, t) + v_y^+(0, \varphi)) \frac{\partial c_0^{(1)}(\varphi, t)}{\partial \varphi} \right] \times \\ \times \left[ K\left(s - \eta, \frac{\tau - t}{\rho^+(0, \varphi) + \rho_*}\right) + K\left(s + \eta, \frac{\tau - t}{\rho^+(0, \varphi) + \rho_*}\right) \right] d\eta dt - \\ - \frac{2}{\rho_* + \rho^+(0, \varphi)} \int_0^\tau \left[ \frac{\partial g_4^{(2)}}{\partial s}(0, \varphi, t) K\left(s, \frac{\tau - t}{\rho_* + \rho^+(0, \varphi)}\right) \right] dt, \quad (3.10)$$

$$g_4^{(2)}(s, \varphi, \tau) = \int_0^\tau \int_0^\infty \left[ h_0^{(2)}(\eta, \varphi, t) \left( \frac{\partial c_0^{(0)}(\varphi, t)}{\partial \varphi} + \frac{\partial c_0^{(1)}(\varphi, t)}{\partial \varphi} \right) \right] \times \\ \times \left[ K\left(s - \eta, \frac{\tau - t}{\rho_*}\right) + K\left(s + \eta, \frac{\tau - t}{\rho_*}\right) \right] d\eta dt + \\ + \frac{2}{\rho_*} \int_0^\tau \left[ g_4^{(1)}(0, \varphi, t) \frac{\partial K(s - \eta, (\tau - t)/\rho_*)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \right] dt;$$

$$h_0^{(1)} = \frac{-8}{3(\rho_* + \rho^+(0, \varphi))} \int_0^\tau \left[ \frac{\partial h_0^{(2)}}{\partial s}(0, \varphi, t) K\left(s, \frac{4(\tau - t)}{3(\rho_* + \rho^+(0, \varphi))}\right) \right] dt, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}
 h_0^{(2)} &= \frac{8}{3\rho_*} \int_0^\tau \left[ \frac{\partial K(s-\eta, 4(\tau-t)/(3\rho_*))}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} (h_0^{(1)}(0, \varphi, t) + v_y^+(0, \varphi)) \right] dt; \\
 \alpha_1^{(1)}(s, \varphi, \tau) &= -(\rho^+(0, \varphi) + \rho_*) \int_0^\tau \frac{\partial h_0^{(1)}(s, \varphi, t)}{\partial s} dt, \\
 \alpha_1^{(2)}(s, \varphi, \tau) &= -\rho_* \int_0^\tau \frac{\partial h_0^{(2)}(s, \varphi, t)}{\partial s} dt, \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

$$c_0^{(1)}(\varphi, \tau) = h_0^{(1)}(0, \varphi, \tau) + v_y^+(0, \varphi) - v_y^+(0, \varphi)(\rho^+(0, \varphi) + \rho_*)/\rho^+(0, \varphi),$$

где  $K(s, t) = \exp(-s^2/(4t))/\sqrt{4\pi t}$ .

Системы двух интегральных уравнений (3.10), (3.11) решаются методом последовательных приближений [11]. Докажем, что интегральный оператор  $\mathbf{I} = (I_1, I_2)$ :

$$\begin{aligned}
 I_1 f_1 &= \frac{8}{3(\rho_* + \rho^+|_{y=0})} \int_0^\tau \left[ K\left(s, \frac{4(\tau-t)}{3(\rho_* + \rho^+|_{y=0})}\right) f_1(0, \varphi, t) \right] dt, \\
 I_2 f_2 &= \frac{8}{3\rho_*} \int_0^\tau \left[ \frac{\partial K(s-\eta, 4(\tau-t)/(3\rho_*))}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} f_2(0, \varphi, t) \right] dt
 \end{aligned}$$

является сжимающим в пространстве непрерывных вектор-функций  $\mathbf{f} = (f_1(s, \varphi, \tau), f_2(s, \varphi, \tau))$ . Для определенности в качестве нормы оператора  $\mathbf{I}$  возьмем

$$\|\mathbf{I}\| = \max(\|I_1\|, \|I_2\|), \quad \|I_k\| = \sup_{\|f_k\| \leq 1} |I_k f_k|, \quad k = 1, 2.$$

Используя замены переменных под знаком интеграла, получим

$$\|I_1\| \leq \frac{s}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^\infty \frac{\exp(-r^2)}{r^2} dr = \frac{1}{\sqrt{\pi}} J_1, \quad \|I_2\| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{z_2}^\infty \exp(-r^2) dr = \frac{1}{\sqrt{\pi}} J_2,$$

где

$$\begin{aligned}
 z_1 &= s\sqrt{3(\rho_* + \rho^+|_{y=0})/(16\tau)}; & z_2 &= s\sqrt{3\rho_*/(16\tau)}; \\
 J_1 &= s \int_{z_1}^\infty \frac{\exp(-r^2)}{r^2} dr; & J_2 &= 2 \int_{z_2}^\infty \exp(-r^2) dr.
 \end{aligned}$$

Для любого  $\varepsilon > 0$  существует число  $C > 0$  такое, что  $J_1 < \varepsilon$  и  $J_2 < \varepsilon$ , если  $s\sqrt{3\rho_*/(16\tau)} > C$ . Кроме того, оператор  $\mathbf{I}$  не выводит из пространства непрерывных вектор-функций. Следовательно, оператор  $\mathbf{I}$  является сжимающим в пространстве непрерывных вектор-функций при  $s\sqrt{3\rho_*/(16\tau)} > C^*$ , где  $C^*$  строится по  $\varepsilon^* = \sqrt{\pi}/2$ .

Системы интегральных уравнений (3.10), (3.11) решаются методом последовательных приближений, который, согласно принципу сжимающих отображений, сходится.

В случае, когда кривая  $\Gamma_t$  является окружностью некоторого радиуса,  $v_y^+ = \text{const}$ ,  $v_\varphi^+ = 0$ ,  $\rho^+ = \text{const}$  и выполнены условия (2.3) при  $t = 0$ , получим

$$v_\varphi^{(0)}(y, \varphi, t) = 0, \quad v_y^{(0)}(y, \varphi, t) = v_y^+, \quad \rho^{(0)}(y, \varphi, t) = \rho^+,$$

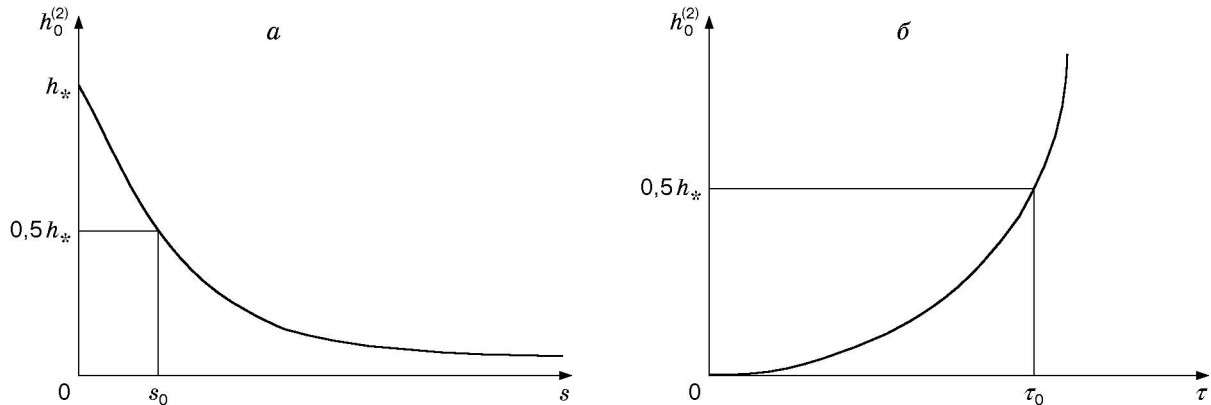


Рис. 2

и асимптотики (3.1) запишутся в виде (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ )

$$v_\varphi = 0, \quad v_y = v_y^+ + h_0^{(1)} + h_0^{(2)} + O(\varepsilon), \quad \rho = \rho^+ + \varepsilon(\alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}) + O(\varepsilon^2),$$

$$c = v_y^+(0, \varphi) + h_0^{(1)}(0, \varphi, \tau) + O(\varepsilon) = h_0^{(2)}(0, \varphi, \tau) + O(\varepsilon).$$

При этом в главном приближении метода последовательных приближений имеем ( $z = s\sqrt{3\rho_*/(16\pi\tau)} = y\sqrt{3\rho_*/(16\pi t)}/\varepsilon$ )

$$h_0^{(2)} = 2v_y^+|_{y=0} \int_z^\infty \exp(-x^2) dx,$$

$$h_0^{(1)} = \frac{64}{3(\rho_* + \rho^+|_{y=0})} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{3\rho_*}} v_y^+|_{y=0} \int_0^\tau \sqrt{t} K\left(s, \frac{4(\tau-t)}{3(\rho_* + \rho^+|_{y=0})}\right) dt.$$

Функции  $\alpha_1^{(1)}$ ,  $\alpha_1^{(2)}$  определяются формулами (3.12). Скорость перемещения скачка уплотнения конечна и в главном приближении не зависит от времени:

$$c = \sqrt{\pi} v_y^+|_{y=0} + O(\varepsilon).$$

Функция  $h_0^{(2)}$  выражается через дополнительный интеграл вероятности [10]. На рис. 2, а, б приведены графики функций  $h_0^{(2)}(s)$  и  $h_0^{(2)}(\tau)$  в фиксированных точках  $\tau = \tau_*$  и  $s = s_*$  соответственно. Здесь  $h_* = \sqrt{\pi} v_y^+|_{y=0}$ ;  $s_0 = 1,92\sqrt{\pi\tau_*}/\sqrt{3\rho_*}$ ;  $\tau_0 = s_*^2 3\rho_*/(4\pi)$ . Из рис. 2 следует, например, что  $s_0 = 19,631$  ( $y_0 = s_0\varepsilon^3 = 1,96 \cdot 10^{-5}$ ) при  $\rho_* = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $t_* = 1$  ( $\tau_* = t_*/\varepsilon^4 = 10^8$ ). При  $\rho_* = 1$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $y_* = 0,005$  ( $s_* = 5000$ ) имеем  $\tau_0 = 5,78 \cdot 10^6$  ( $t_0 = 0,0578$ ). Приведенные на рис. 2 графики позволяют оценить порядок толщины внутреннего пограничного слоя [4] и изменение его во времени.

**Заключение.** С использованием одновременного растяжения пространственной и временной координат во внутреннем пограничном слое в вязкой сжимаемой жидкости построены асимптотические (при исчезающей вязкости) разложения решения задачи. Внутренний пограничный слой построен без каких-либо дополнительных предположений о характере течения жидкости. Главные члены асимптотических разложений решения задачи находятся из системы интегральных уравнений, которая решается методом последовательных приближений. Погранслойные поправки более высоких порядков малости при исчезающей вязкости определяются из аналогичной системы уравнений, которая также решается методом последовательных приближений. Таким образом, предложенная модификация



метода пограничного слоя позволила в общем случае построить алгоритм нахождения функций внутреннего пограничного слоя в вязкой сжимаемой жидкости с любой степенью точности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. М.: Наука, 1963.
2. **Куликовский А. Г., Любимов Г. А.** Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962.
3. **Курант Р., Фридрихс К.** Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.
4. **Лойцянский Л. Г.** Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962.
5. **Срубщик Л. С., Юдович В. И.** Асимптотика слабых разрывов течений жидкости при исчезающей вязкости // Докл. АН СССР. 1971. Т. 199, № 3. С. 563–566.
6. **Черный Г. Г.** Ламинарные движения газа и жидкости в пограничном слое с поверхностью разрыва // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1954. № 2. С. 38–68.
7. **Юдович В. И.** Об асимптотическом интегрировании системы Навье — Стокса при ударных воздействиях на жидкость. Ростов н/Д, 1993. Деп. в ВИНТИ 14.07.93, № 1981-В93.
8. **Вишик М. И., Люстерник Л. А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–120.
9. **Усов А. Б.** Асимптотика течений жидкости со свободной поверхностью // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 1. С. 48–56.
10. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М.: Гостехтеоретиздат, 1953.
11. **Марчук Г. И.** Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.

*Поступила в редакцию 3/X 2001 г.,  
в окончательном варианте — 16/IV 2002 г.*