

AMS subject classification: 49J20, 65N30

Двухсеточные методы для новой смешанной конечно-элементной аппроксимации полулинейных параболических интегро-дифференциальных уравнений*

С. Лиу¹, Т. Хоу²

¹Institute of Computational Mathematics, Department of Mathematics and Computational Science, Hunan University of Science and Engineering, Yongzhou 425100, Hunan, China

²School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin 132013, Jilin, China

E-mails: liuchunmei0629@163.com (Лиу С.), 270854140@qq.com. (Хоу Т.)

Лиу С., Хоу Т. Двухсеточные методы для новой смешанной конечно-элементной аппроксимации полулинейных параболических интегро-дифференциальных уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд.-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 2. — С. 167–185.

В данной статье представлена двухсеточная схема для полулинейного параболического интегро-дифференциального уравнения с использованием нового смешанного метода конечных элементов. Градиент в методе принадлежит пространству квадратично интегрируемых функций, а не классическому пространству $H(\operatorname{div}; \Omega)$. Скорость и давление аппроксимируются парой $P_0^2-P_1$, которая удовлетворяет условию inf-sup. Вначале мы решаем исходную нелинейную задачу на грубой сетке нашей двухсеточной схемы. Затем для линейаризации дискретизованных уравнений мы дважды используем ньютоновскую итерацию на мелкой сетке. Показано, что алгоритм помогает достичь асимптотически оптимальной аппроксимации, когда размеры сеток удовлетворяют соотношению $h = \mathcal{O}(H^6 |\ln H|^2)$. В результате решение такого большого класса нелинейных уравнений не намного сложнее, чем решение одного линейаризованного уравнения. Представлен численный эксперимент для подтверждения теоретических результатов двухсеточного метода.

DOI: 10.15372/SJNM20190204

Ключевые слова: полулинейные параболические интегро-дифференциальные уравнения, новый смешанный метод конечных элементов, априорная оценка ошибки, двухсеточный, пространство квадратично интегрируемых функций.

Liu S., Hou T. Two-grid methods for a new mixed finite element approximation of semilinear parabolic integro-differential equations // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2019. — Vol. 22, № 2. — P. 167–185.

In this paper, we present a two-grid scheme for a semilinear parabolic integro-differential equation using a new mixed finite element method. The gradient for the method belongs to the space of square integrable functions instead of the classical $H(\operatorname{div}; \Omega)$ space. The velocity and the pressure are approximated by a $P_0^2-P_1$ pair which satisfies an inf-sup condition. Firstly, we solve the original nonlinear problem on the coarse grid in our two-grid scheme. Then, to linearize the discretized equations, we use Newton's iteration on the fine

*Работа выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (проекты № 11601014, № 11701013), Научного постдокторского фонда Китая (проекты № 2016M601359, № 2018T110237), Программы научно-технического развития провинции Цзилинь (проект № 20170101037JC), Инновационной программы развития талантов в области науки и технологии провинции Цзилинь Китая (проект № 20180519011JH), Проекта развития исследований и инноваций для молодежи Университета Бэйхуа. Работа первого автора выполнена при поддержке Проекта для молодежи Отдела образования провинции Хунань (проект № 15B096) и Конструктивной программы для ключевой дисциплины Университета науки и техники Хунаньского университета.

grid twice. It is shown that the algorithm can achieve an asymptotically optimal approximation as long as the mesh sizes satisfy $h = \mathcal{O}(H^6 |\ln H|^2)$. As a result, solving such a large class of nonlinear equations will not be much more difficult than solving one linearized equation. Finally, a numerical experiment is provided to verify the theoretical results of the two-grid method.

Keywords: *semilinear parabolic integro-differential equations, a new mixed finite element method, a priori error estimate, two-grid, space of square integrable functions.*

1. Введение

Смешанные методы конечных элементов, используемые для аппроксимации двух различных переменных, оказались очень важны для решения дифференциальных уравнений в частных производных [1, 12, 22]. Особенно представляет интерес с физической точки зрения вторая переменная, которая обычно связана с производной исходной переменной, например, в уравнениях упругости, где напряжение может быть введено для его одновременной аппроксимации со смещением. В последние годы Чен с соавторами [8, 23] разработали новую смешанную схему конечных элементов и использовали пару конечных элементов P_0^2 – P_1 для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Градиент основной переменной этого метода принадлежит пространству квадратично интегрируемых функций, а не классическому пространству $H(\operatorname{div}; \Omega)$.

Двухсеточный метод был введен Ксу [27, 28] как метод дискретизации для несимметричных, неопределенных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Основная идея состоит в использовании пространства грубой сетки для получения грубой аппроксимации решений нелинейных задач, а затем в ее использовании в качестве начального приближения для одной итерации ньютоновского типа на мелкой сетке. После работы Ксу двухсеточный метод исследовался многими авторами (см., например, [2–6, 10, 26–29]). Досон и Уилер [10] проанализировали двухсеточную конечно-разностную схему для нелинейных параболических уравнений. Ву и Аллен [26] представили двухшаговый алгоритм, используя “двухсеточную” идею для полулинейных уравнений реакции–диффузии с расширенным смешанным методом конечных элементов. На основе этой работы Чен с соавторами [5] предложили трехшаговый алгоритм с использованием идеи коррекции из работы [28]. Затем Чен с соавторами [6] представили трехшаговый двухсеточный алгоритм и четырехшаговый двухсеточный алгоритм для полулинейных задач реакции–диффузии с использованием расширенного смешанного метода конечных элементов. Чен с соавторами [4] обсудили двухсеточный метод для смешанных методов конечных элементов полностью нелинейных уравнений реакции–диффузии. Би и Гинтинг [2] исследовали двухсеточный метод для смешанных методов конечных объемов/элементов для линейных и нелинейных эллиптических задач. Они также изучали двухсеточный разрывный метод Галеркина для квазилинейных эллиптических задач [3]. Ксу и Чжоу [29] представили двухсеточную схему дискретизации для задач на собственные значения. Имеется много других эффективных методов, таких как многоуровневые алгоритмы для нелинейных эллиптических уравнений и модели Гинзбурга–Ландау (см., например, [16, 17]). Насколько нам известно, в литературе нет анализа сходимости двухсеточного метода, объединенного со смешанным методом конечных элементов [8] для параболических интегро-дифференциальных уравнений.

Интегро-дифференциальные уравнения могут быть получены в результате многих физических процессов, в которых есть недостаток (локальная характеристика) обычных уравнений диффузии. Были разработаны различные численные методы для реше-

ния этих задач. Конечно-элементная аппроксимация линейных или нелинейных интегро-дифференциальных уравнений широко исследуется (см. [7, 14, 18, 25] для стандартных методов конечных элементов и [13, 19, 20, 24] для смешанных методов конечных элементов). В данной статье мы рассматриваем следующие полулинейные параболические интегро-дифференциальные уравнения:

$$y_t - \operatorname{div} \mathbf{p} = f(y), \quad x \in \Omega, \quad t \in J, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{p} = A \nabla y - \int_0^t B(t, s) \nabla y(s) ds, \quad x \in \Omega, \quad t \in J, \quad (1.2)$$

$$y(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in J, \quad (1.3)$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.4)$$

где $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ — выпуклая многоугольная область с границей $\partial\Omega$, $J = (0, T]$, $f(y) = f(y, x, t)$ — заданная действительная функция на Ω . Предположим, что матрица коэффициентов $A = A(x) = (a_{ij}(x))_{2 \times 2} \in W^{1, \infty}(\Omega; \mathbf{R}^{2 \times 2})$ — симметрическая 2×2 матрица и имеются постоянные $c_1, c_2 > 0$, удовлетворяющие $c_1 \|\mathbf{X}\|_{\mathbf{R}^2}^2 \leq \mathbf{X}^t A \mathbf{X} \leq c_2 \|\mathbf{X}\|_{\mathbf{R}^2}^2$ для любого вектора $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^2$. Кроме того, $B(t, s) = B(x, t, s)$ — тоже 2×2 матрица. Предположим также, что

$$|f'(y)| + |f''(y)| \leq M, \quad y \in \mathbf{R}.$$

В данной статье мы объединим двухсеточный метод с новой смешанной схемой конечных элементов [8] для решения приведенных выше полулинейных интегро-дифференциальных параболических уравнений на основе меньшей регулярности потока. Сначала решим нелинейную задачу в пространстве грубой сетки, а затем используем известное решение на грубой сетке и разложение в ряд Тейлора для экстраполяции решения на мелкую сетку. На мелкой сетке нам нужно лишь решить линейную систему.

Статья построена следующим образом. В пункте 2 будет построена полностью дискретизованная смешанная конечно-элементная аппроксимация задачи (1.1)–(1.4). В п. 3 мы получим оптимальные априорные оценки ошибки для всех переменных. В п. 4 будет представлен двухсеточный алгоритм и его оценки ошибки. В п. 5 приведен численный пример для подтверждения теоретических результатов. В п. 6 дано заключение и представлены возможные обобщения.

2. Полностью дискретизованная смешанная конечно-элементная схема

В данном пункте мы построим новую схему полностью дискретизованной смешанной конечно-элементной аппроксимации задачи (1.1)–(1.4).

Примем стандартное обозначение $W^{m,p}(\Omega)$ для пространств Соболева на Ω с нормой $\|\cdot\|_{m,p}$, заданной путем $\|v\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p$, полунормой $|\cdot|_{m,p}$, заданной путем $|v|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p$. Положим $W_0^{m,p}(\Omega) = \{v \in W^{m,p}(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$. Для $p = 2$ обозначим $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$ и $\|\cdot\|_m = \|\cdot\|_{m,2}$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{0,2}$.

Пусть $L^s(J; W^{m,p}(\Omega))$ — банахово пространство всех L^s интегрируемых функций из J в $W^{m,p}(\Omega)$ с нормой $\|v\|_{L^s(J; W^{m,p}(\Omega))} = \left(\int_0^T \|v\|_{W^{m,p}(\Omega)}^s dt \right)^{1/s}$ для $s \in [1, \infty)$ и стандартной модификацией для $s = \infty$. Для простоты представления обозначим $\|v\|_{L^s(J; W^{m,p}(\Omega))}$

как $\|v\|_{L^s(W^{m,p})}$. Аналогичным образом можно определить пространства $H^1(J; W^{m,p}(\Omega))$ и $C^k(J; W^{m,p}(\Omega))$. Кроме того, C обозначает общую положительную постоянную, не зависящую от h и Δt , где h — пространственный размер сетки и Δt — шаг по времени.

Пусть

$$\mathbf{V} = (L^2(\Omega))^2 \quad \text{и} \quad W = H_0^1(\Omega).$$

Положим $M(t, s) = A^{-1}B(t, s)$ как в [8]. Тогда мы получим смешанную вариационную формулировку для (1.1), (1.2):

$$(A^{-1}\mathbf{p}, \mathbf{v}) + \int_0^t (M(t, s)\nabla y(s), \mathbf{v}) ds - (\nabla y, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (2.1)$$

$$(y_t, w) + (\mathbf{p}, \nabla w) = (f(y), w) \quad \forall w \in W, \quad (2.2)$$

где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение $L^2(\Omega)$.

Пусть $b_1(t, s; \cdot, \cdot)$ и $b_2(t, s; \cdot, \cdot)$ — билинейные формы, определенные на $L^2(\Omega) \times (H^1(\Omega))^2$ и $W \times \mathbf{V}$ соответственно следующим образом:

$$b_1(t, s; v(s), \mathbf{v}) := (v(s), \operatorname{div}(\bar{M}(t, s)\mathbf{v})) \quad \forall v(s) \in L^2(\Omega), \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2,$$

$$b_2(t, s; v(s), \mathbf{v}) := (\tilde{M}(t, s)\nabla v(s), \mathbf{v}) \quad \forall v(s) \in W, \mathbf{v} \in \mathbf{V},$$

где $\tilde{M}(t, s) = M(t, s)$ или $\tilde{M}(t, s) = M_t(t, s)$, $\bar{M}(t, s) = M^*(t, s)$ или $\bar{M}(t, s) = M_t^*(t, s)$, $M^*(t, s)$ — транспонированная матрица $M(t, s)$ и $M_t^*(t, s)$ — транспонированная матрица $M_t(t, s)$. Предположим, что билинейные формы $b_1(t, s; \cdot, \cdot)$ и $b_2(t, s; \cdot, \cdot)$ являются непрерывными, т. е. имеет место

$$b_1(t, s; v(s), \mathbf{v}) \leq \gamma \|\mathbf{v}\|_1 \|v(s)\| \quad \forall v(s) \in L^2(\Omega), \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2, \quad (2.3)$$

$$b_2(t, s; v(s), \mathbf{v}) \leq \gamma_1 \|\nabla v(s)\| \cdot \|\mathbf{v}\| \quad \forall v(s) \in W, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (2.4)$$

при $\gamma, \gamma_1 \in R^+$.

Пусть \mathcal{T}_h — регулярная триангуляция многоугольной области Ω , h_τ — диаметр τ и $h = \max h_\tau$. Пусть $\mathbf{V}_h \times W_h \subset \mathbf{V} \times W$ определяется следующей парой конечных элементов P_0^2 – P_1 (см. [8, 23]):

$$\mathbf{V}_h = \{\mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_{1h}, \mathbf{v}_{2h}) \in \mathbf{V} \mid \mathbf{v}_{1h}, \mathbf{v}_{2h} \in P_0(\tau) \quad \forall \tau \in \mathcal{T}_h\},$$

$$W_h = \{w_h \in C^0(\Omega) \cap W \mid w_h \in P_1(\tau) \quad \forall \tau \in \mathcal{T}_h\}.$$

Прежде чем представить новую конечно-элементную схему, введем три проекционных оператора. Сначала определим стандартную эллиптическую проекцию [9] $P_h : W \rightarrow W_h$, удовлетворяющую для любого $\phi \in W$ следующим условиям:

$$(\nabla(\phi - P_h\phi), \nabla w_h) = 0 \quad \forall w_h \in W_h, \quad (2.5)$$

$$\|\phi - P_h\phi\|_s \leq Ch^{2-s}\|\phi\|_2, \quad s = 0, 1, \quad \forall \phi \in H^2(\Omega), \quad (2.6)$$

$$\|\phi - P_h\phi\|_{0,\infty} \leq Ch |\ln h| \|\phi\|_{1,\infty} \quad \forall \phi \in W^{1,\infty}(\Omega). \quad (2.7)$$

Затем определим стандартную L^2 -проекцию [1] $\Pi_h : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_h$, удовлетворяющую для любого $\mathbf{q} \in \mathbf{V}$ условиям:

$$(\mathbf{q} - \Pi_h \mathbf{q}, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (2.8)$$

$$\|\Pi_h \mathbf{q}\| \leq C \|\mathbf{q}\|, \quad (2.9)$$

$$\|\mathbf{q} - \Pi_h \mathbf{q}\| \leq Ch \|\mathbf{q}\|_1 \quad \forall \mathbf{q} \in (H^1(\Omega))^2. \quad (2.10)$$

И, наконец, определим новую смешанную эллиптическую проекцию $(R_h \mathbf{p}, R_h y) \in \mathbf{V}_h \times W_h$ следующим образом:

$$(A^{-1}(\mathbf{p} - R_h \mathbf{p}), \mathbf{v}_h) + \int_0^t (M(t, s) \nabla(y - R_h y)(s), \mathbf{v}_h) ds - (\nabla(y - R_h y), \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (2.11)$$

$$(\mathbf{p} - R_h \mathbf{p}, \nabla w_h) = 0 \quad \forall w_h \in W_h. \quad (2.12)$$

Теперь рассмотрим полностью дискретную смешанную конечно-элементную схему. Пусть $\Delta t > 0$, $N = T/\Delta t \in \mathbb{Z}$ и $t_n = n\Delta t$, $n \in \mathbb{Z}$. Кроме того, пусть

$$\psi^n = \psi^n(x) = \psi(x, t_n), \quad dt\psi^n = \frac{\psi^n - \psi^{n-1}}{\Delta t}.$$

Тогда полностью дискретная схема аппроксимации состоит в том, чтобы найти $(\mathbf{p}_h^n, y_h^n) \in \mathbf{V}_h \times W_h$, $n = 1, 2, \dots, N$, такие что

$$(A^{-1} \mathbf{p}_h^n, \mathbf{v}_h) + \sum_{i=1}^n \Delta t (M(t_n, t_{i-1}) \nabla y_h^{i-1}, \mathbf{v}_h) - (\nabla y_h^n, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (2.13)$$

$$(dy_h^n, w_h) + (\mathbf{p}_h^n, \nabla w_h) = (f(y_h^n), w_h) \quad \forall w_h \in W_h, \quad (2.14)$$

$$y_h^0 = R_h y_0(x). \quad (2.15)$$

Доказательство существования и единственности решения нелинейной алгебраической системы (2.13)–(2.15) можно найти в ссылках [1, 11].

3. Оптимальные априорные оценки ошибки

В данном пункте мы выполним анализ оптимальной априорной ошибки задачи (1.1)–(1.4). Сначала вспомним результат статьи Грисварда [15].

Лемма 3.1 [15]. Для каждой функции $F \in L^2(\Omega)$ решение ϕ уравнения

$$-\operatorname{div}(A \nabla \phi) = F \quad \text{в } \Omega, \quad \phi|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.1)$$

принадлежит $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Кроме того, существует положительная постоянная C , такая что

$$\|\phi\|_2 \leq C \|F\|. \quad (3.2)$$

Теперь обсудим априорные оценки ошибки между точными решениями и их смешанными эллиптическими проекциями в следующих двух леммах.

Лемма 3.2. Пусть $(R_h \mathbf{p}, R_h y) \in \mathbf{V}_h \times W_h$ — новая смешанная эллиптическая проекция, определенная в (2.11), (2.12), и пусть (\mathbf{p}, y) — решение (2.1), (2.2) соответственно. Тогда имеем

$$\|\mathbf{p} - R_h \mathbf{p}\| + \|\nabla(y - R_h y)\| \leq Ch(\|y\|_2 + \|\mathbf{p}\|_1 + \|y\|_{L^2(H^2)}), \quad (3.3)$$

$$\|y - R_h y\| \leq Ch^2(\|y\|_2 + \|\mathbf{p}\|_1 + \|y\|_{L^2(H^2)}). \quad (3.4)$$

Доказательство. Поскольку $\nabla W_h \subset \mathbf{V}_h$, то с помощью (2.8) мы вычтем (2.11), (2.12) из (2.1), (2.2) для получения

$$\begin{aligned} & (A^{-1}(\Pi_h \mathbf{p} - R_h \mathbf{p}), \mathbf{v}_h) - (\nabla(P_h y - R_h y), \mathbf{v}_h) \\ &= - \int_0^t (M(t, s) \nabla(y - P_h y)(s), \mathbf{v}_h) ds - \int_0^t (M(t, s) \nabla(P_h y - R_h y)(s), \mathbf{v}_h) ds + \\ & \quad (\nabla(y - P_h y), \mathbf{v}_h) - (A^{-1}(\mathbf{p} - R_h \mathbf{p}), \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$(\Pi_h \mathbf{p} - R_h \mathbf{p}, \nabla w_h) = 0 \quad \forall w_h \in W_h. \quad (3.6)$$

Выберем $\mathbf{v}_h = \Pi_h \mathbf{p} - R_h \mathbf{p}$ и $w_h = P_h y - R_h y$ в (3.5) и (3.6) соответственно. Затем, добавив два результирующих уравнения, используя (2.3), (2.6), (2.10), неравенство Коши и предположение относительно A , получим

$$\|\Pi_h \mathbf{p} - R_h \mathbf{p}\| \leq Ch(\|y\|_{L^2(H^2)} + \|y\|_2 + \|\mathbf{p}\|_1) + C \int_0^t \|\nabla(P_h y - R_h y)(s)\| ds. \quad (3.7)$$

Положив $\mathbf{v}_h = \nabla(P_h y - R_h y)$ в (3.5), снова используя (2.3), (2.6), (2.10), неравенство Коши и предположение относительно A , найдем

$$\begin{aligned} & \|\nabla(P_h y - R_h y)\| \\ & \leq Ch(\|y\|_{L^2(H^2)} + \|y\|_2 + \|\mathbf{p}\|_1) + C\|\Pi_h \mathbf{p} - R_h \mathbf{p}\| + C \int_0^t \|\nabla(P_h y - R_h y)(s)\| ds. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Из (3.7), (3.8) и неравенства Гронуолла следует, что

$$\|\Pi_h \mathbf{p} - R_h \mathbf{p}\| + \|\nabla(P_h y - R_h y)\| \leq Ch(\|y\|_{L^2(H^2)} + \|y\|_2 + \|\mathbf{p}\|_1). \quad (3.9)$$

Тогда (3.3) можно получить с использованием (2.6), (2.10), (3.9) и неравенства треугольника.

Пусть ϕ — решение (3.1) при $F = y - R_h y$, используя (2.1)–(2.4), (2.6), (2.10)–(2.12), неравенство Коши и предположение относительно A , очевидно, что

$$\begin{aligned} \|y - R_h y\|^2 &= (y - R_h y, -\operatorname{div}(A \nabla \phi)) = (A \nabla \phi, \nabla(y - R_h y)) \\ &= (\nabla(y - R_h y), A \nabla \phi - \Pi_h(A \nabla \phi)) + (A^{-1}(\mathbf{p} - R_h \mathbf{p}), \Pi_h(A \nabla \phi)) + \\ & \quad \int_0^t (M(t, s) \nabla(y - R_h y)(s), \Pi_h(A \nabla \phi)) ds \\ &= (\nabla(y - R_h y), A \nabla \phi - \Pi_h(A \nabla \phi)) + (A^{-1}(\mathbf{p} - R_h \mathbf{p}), \Pi_h(A \nabla \phi) - A \nabla \phi) + \\ & \quad (\mathbf{p} - R_h \mathbf{p}, \nabla(\phi - P_h \phi)) - \int_0^t ((y - R_h y)(s), \operatorname{div}(M^*(t, s) A \nabla \phi)) ds + \\ & \quad \int_0^t (M(t, s) \nabla(y - R_h y)(s), \Pi_h(A \nabla \phi) - A \nabla \phi) ds \\ & \leq Ch \|\nabla(y - R_h y)\| \cdot \|\phi\|_2 + Ch \int_0^t \|\nabla(y - R_h y)(s)\| ds \|\phi\|_2 + \\ & \quad Ch \|\mathbf{p} - R_h \mathbf{p}\| \cdot \|\phi\|_2 + C \int_0^t \|(y - R_h y)(s)\| ds \|\phi\|_2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Объединив (3.2), (3.3), (3.10) с неравенством Гронуолла, мы получим (3.4). Таким образом, доказательство леммы завершено. \square

Лемма 3.3. Пусть $(R_h \mathbf{p}, R_h y) \in \mathbf{V}_h \times W_h$ — новая смешанная эллиптическая проекция, определенная в (2.11), (2.12) и пусть (\mathbf{p}, y) — решение (2.1), (2.2) соответственно. Тогда

$$\|(\mathbf{p} - R_h \mathbf{p})_t\| + \|\nabla(y - R_h y)_t\| \leq Ch (\|y\|_2 + \|\mathbf{p}\|_1 + \|y_t\|_2 + \|\mathbf{p}_t\|_1 + \|y\|_{L^2(H^2)}), \quad (3.11)$$

$$\|(y - R_h y)_t\| \leq Ch^2 (\|y\|_2 + \|\mathbf{p}\|_1 + \|y_t\|_2 + \|\mathbf{p}_t\|_1 + \|y\|_{L^2(H^2)}). \quad (3.12)$$

Доказательство. Дифференцируя уравнения (3.5), (3.6) по t , получим

$$\begin{aligned} & (A^{-1}(\Pi_h \mathbf{p} - R_h \mathbf{p})_t, \mathbf{v}_h) - (\nabla(P_h y - R_h y)_t, \mathbf{v}_h) \\ &= - \int_0^t (M_t(t, s) \nabla(y - P_h y)(s), \mathbf{v}_h) ds - (M(t, t) \nabla(y - R_h y), \mathbf{v}_h) + \\ & \quad (\nabla(y - P_h y)_t, \mathbf{v}_h) - (A^{-1}(\Pi_h \mathbf{p} - R_h \mathbf{p}), \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$((\Pi_h \mathbf{p} - R_h \mathbf{p})_t, \nabla w_h) = 0 \quad \forall w_h \in W_h. \quad (3.14)$$

Аналогично (3.7) и (3.8) легко убедиться в том, что

$$\|(\Pi_h \mathbf{p} - R_h \mathbf{p})_t\| \leq Ch (\|y_t\|_2 + \|\mathbf{p}_t\|_1) + C \|\nabla(y - R_h y)\| + C \|\nabla(y - R_h y)\|_{L^2(L^2)} \quad (3.15)$$

и

$$\begin{aligned} \|\nabla(P_h y - R_h y)_t\| &\leq Ch (\|y_t\|_2 + \|\mathbf{p}_t\|_1) + C \|\nabla(y - R_h y)\|_{L^2(L^2)} + \\ & \quad C \|(\Pi_h \mathbf{p} - R_h \mathbf{p})_t\| + C \|\nabla(y - R_h y)\|. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Используя (2.6), (2.10), (3.3), (3.15), (3.16) и неравенство треугольника, получим (3.11).

Пусть ϕ — решение (3.1) при $F = (y - R_h y)_t$, аналогично (3.10) можно заключить, что

$$\begin{aligned} \|(y - R_h y)_t\|^2 &= ((y - R_h y)_t, -\operatorname{div}(A \nabla \phi)) = (A \nabla \phi, \nabla(y - R_h y)_t) \\ &= (\nabla(y - R_h y)_t, A \nabla \phi - \Pi_h(A \nabla \phi)) + (M(t, t) \nabla(y - R_h y), \Pi_h(A \nabla \phi)) + \\ & \quad \int_0^t (M_t(t, s) \nabla(y - R_h y)(s), \Pi_h(A \nabla \phi)) ds + (A^{-1}(\mathbf{p} - R_h \mathbf{p})_t, \Pi_h(A \nabla \phi)) \\ &= (\nabla(y - R_h y)_t, A \nabla \phi - \Pi_h(A \nabla \phi)) + (A^{-1}(\mathbf{p} - R_h \mathbf{p})_t, \Pi_h(A \nabla \phi) - A \nabla \phi) + \\ & \quad \int_0^t (M_t(t, s) \nabla(y - R_h y)(s), \Pi_h(A \nabla \phi) - A \nabla \phi) ds + \\ & \quad (M(t, t) \nabla(y - R_h y), \Pi_h(A \nabla \phi) - A \nabla \phi) + ((\mathbf{p} - R_h \mathbf{p})_t, \nabla(\phi - P_h \phi)) - \\ & \quad \int_0^t ((y - R_h y)(s), \operatorname{div}(M_t^*(t, s) A \nabla \phi)) ds - (y - R_h y, \operatorname{div}(M^*(t, t) A \nabla \phi)) \\ &\leq Ch (\|\nabla(y - R_h y)_t\| + \|(\mathbf{p} - R_h \mathbf{p})_t\| + \|\nabla(y - R_h y)\|) \|\phi\|_2 + \\ & \quad Ch \|\nabla(y - R_h y)\|_{L^2(L^2)} \|\phi\|_2 + C (\|y - R_h y\|_{L^2(L^2)} + \|y - R_h y\|) \|\phi\|_2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Используя (3.2)–(3.4), (3.11) и (3.17), мы имеем (3.12). Доказательство завершено. \square

Теперь обсудим оптимальные априорные оценки ошибки между точными решениями и их численными решениями в следующих двух теоремах.

Теорема 3.1. Пусть $(\mathbf{p}_h^n, y_h^n) \in \mathbf{V}_h \times W_h$ — решение (2.13), (2.14) и пусть (\mathbf{p}, y) — решение (2.1), (2.2) соответственно. Предположим, что точное решение (\mathbf{p}, y) достаточно регулярно для нашей цели. Тогда для достаточно малого Δt и $1 \leq n \leq N$ имеем

$$\|y^n - y_h^n\| \leq C(\Delta t + h^2). \quad (3.18)$$

Доказательство. Для удобства пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^n - \mathbf{p}_h^n &= (\mathbf{p}^n - R_h \mathbf{p}^n) + (R_h \mathbf{p}^n - \mathbf{p}_h^n) =: \eta_{\mathbf{p}}^n + \xi_{\mathbf{p}}^n, \\ y^n - y_h^n &= (y^n - R_h y^n) + (R_h y^n - y_h^n) =: \eta_y^n + \xi_y^n. \end{aligned}$$

Используя (2.13), (2.14), (2.1), (2.2) и (2.11), (2.12), мы получим для всех $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ и $w_h \in W_h$ следующие уравнения для ошибки:

$$(A^{-1} \xi_{\mathbf{p}}^n, \mathbf{v}_h) + \int_0^{t_n} (M(t_n, s) \nabla R_h y(s), \mathbf{v}_h) ds - \sum_{i=1}^n \Delta t (M(t_n, t_{i-1}) \nabla y_h^{i-1}, \mathbf{v}_h) - (\nabla \xi_y^n, \mathbf{v}_h) = 0, \quad (3.19)$$

$$(dt \xi_y^n, w_h) + (\xi_{\mathbf{p}}^n, \nabla w_h) = (f(y^n) - f(y_h^n), w_h) + (dy^n - y_t^n, w_h) - (d\eta_y^n, w_h). \quad (3.20)$$

Положив $\mathbf{v}_h = \nabla \xi_y^n$ в (3.19), имеем

$$\begin{aligned} \|\nabla \xi_y^n\|^2 &= \int_0^{t_n} (M(t_n, s) \nabla R_h y(s), \nabla \xi_y^n) ds - \sum_{i=1}^n \Delta t (M(t_n, t_{i-1}) \nabla R_h y^{i-1}, \nabla \xi_y^n) + \\ & (A^{-1} \xi_{\mathbf{p}}^n, \nabla \xi_y^n) + \sum_{i=1}^n \Delta t (M(t_n, t_{i-1}) \nabla \xi_y^{i-1}, \nabla \xi_y^n). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{t_n} M(t_n, s) \nabla R_h y(s) ds - \sum_{i=1}^n \Delta t M(t_n, t_{i-1}) \nabla R_h y^{i-1} \right\|^2 \\ \leq C(\Delta t)^2 \int_0^{t_n} (\|\nabla R_h y_t(s)\|^2 + \|\nabla R_h y(s)\|^2) ds. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Используя неравенство Коши, (3.21), (3.22), (2.4) и предположение относительно A , получим

$$\|\nabla \xi_y^n\|^2 \leq C(\Delta t)^2 \int_0^{t_n} (\|\nabla R_h y_t(s)\|^2 + \|\nabla R_h y(s)\|^2) ds + \|\xi_{\mathbf{p}}^n\|^2 + C \sum_{i=1}^n \|\nabla \xi_y^{i-1}\|^2 \Delta t. \quad (3.23)$$

Применив дискретное неравенство Гронуолла к (3.23), мы видим, что

$$\|\nabla \xi_y^n\| \leq C \|\xi_{\mathbf{p}}^n\| + C \Delta t (\|\nabla R_h y_t\|_{L^2(L^2)} + \|\nabla R_h y\|_{L^2(L^2)}), \quad (3.24)$$

где

$$\begin{aligned} \|\nabla R_h y_t\|_{L^2(L^2)} + \|\nabla R_h y\|_{L^2(L^2)} \\ \leq \|\nabla(y_t - R_h y_t)\|_{L^2(L^2)} + \|\nabla(y - R_h y)\|_{L^2(L^2)} + \|\nabla y_t\|_{L^2(L^2)} + \|\nabla y\|_{L^2(L^2)}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Выберем $\mathbf{v}_h = \xi_{\mathbf{p}}^n$ в (3.19) и $w_h = \xi_y^n$ в (3.20) соответственно. Сложив два полученных в результате уравнения, получим

$$\begin{aligned}
& (dt\xi_y^n, \xi_y^n) + (A^{-1}\xi_p^n, \xi_p^n) \\
&= - \sum_{i=1}^n \Delta t (M(t_n, t_{i-1}) \nabla \xi_y^{i-1}, \xi_p^n) + \sum_{i=1}^n \Delta t (M(t_n, t_{i-1}) \nabla R_h y^{i-1}, \xi_p^n) - \\
& \int_0^{t_n} (M(t_n, s) \nabla R_h y(s), \xi_p^n) ds + (f(y^n) - f(y_h^n), \xi_y^n) + (dy^n - y_t^n, \xi_y^n) - (dt\eta_y^n, \xi_y^n). \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Легко убедиться, что

$$(dt\xi_y^n, \xi_y^n) \geq \frac{1}{2} (\|\xi_y^n\|^2 - \|\xi_y^{n-1}\|^2). \quad (3.27)$$

Умножив Δt и суммируя по n от 1 до l ($1 \leq l \leq N$) в обеих частях (3.26), используя (3.27), предположение относительно A и $\xi_y^0 = 0$, получим

$$\begin{aligned}
\|\xi_y^l\|^2 + \sum_{n=1}^l \|\xi_p^n\|^2 \Delta t &\leq C \sum_{n=1}^l \Delta t \left(\sum_{i=1}^n \Delta t M(t_n, t_{i-1}) \nabla R_h y^{i-1} - \int_0^{t_n} M(t_n, s) \nabla R_h y(s) ds, \xi_p^n \right) - \\
& C \sum_{n=1}^l \Delta t \sum_{i=1}^n \Delta t (M(t_n, t_{i-1}) \nabla \xi_y^{i-1}, \xi_p^n) + C \sum_{n=1}^l \Delta t (f(y^n) - f(y_h^n), \xi_y^n) + \\
& C \sum_{n=1}^l \Delta t (dy^n - y_t^n, \xi_y^n) - C \sum_{n=1}^l \Delta t (dt\eta_y^n, \xi_y^n) = \sum_{i=1}^5 I_i. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Теперь оценим правосторонние члены (3.28). Для I_1 , используя неравенство Коши и (3.22), имеем

$$|I_1| \leq C(\Delta t)^2 (\|\nabla R_h y\|_{L^2(L^2)}^2 + \|\nabla R_h y_t\|_{L^2(L^2)}^2) + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^l \|\xi_p^n\|^2 \Delta t. \quad (3.29)$$

Для I_2 , используя (2.4), неравенство Коши и (3.24), получаем

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq C \sum_{n=1}^l \Delta t \sum_{i=1}^n \|\xi_p^{i-1}\|^2 \Delta t + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^l \|\xi_p^n\|^2 \Delta t + \\
& C(\Delta t)^2 (\|\nabla R_h y\|_{L^2(L^2)}^2 + \|\nabla R_h y_t\|_{L^2(L^2)}^2). \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Для I_3 , используя неравенство среднего значения, неравенство Коши и предположение относительно f , мы можем заключить, что

$$\begin{aligned}
|I_3| &= C \sum_{n=1}^l \Delta t (f'(\hat{y}^n)(y^n - y_h^n), \xi_y^n) \\
&\leq C \sum_{n=1}^l (\|\xi_y^n\|^2 + \|\eta_y^n\|^2) \Delta t + C \sum_{n=1}^l \|\xi_y^n\|^2 \Delta t \\
&\leq C \sum_{n=1}^l \|\eta_y^n\|^2 \Delta t + C \sum_{n=1}^l \|\xi_y^n\|^2 \Delta t, \quad (3.31)
\end{aligned}$$

где \hat{y}^n расположено между y^n и y_h^n .

Для I_4 из результатов, представленных в [21], имеем

$$|I_4| \leq C(\Delta t)^2 \|y_{tt}\|_{L^2(L^2)}^2 + C \sum_{n=1}^l \|\xi_y^n\|^2 \Delta t. \quad (3.32)$$

Для I_5 из неравенства Коши следует, что

$$\begin{aligned} |I_5| &\leq C \sum_{n=1}^l \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|(\eta_y)_t\|^2 dt + C \sum_{n=1}^l \|\xi_y^n\|^2 \Delta t \\ &\leq C \|(\eta_y)_t\|_{L^2(L^2)}^2 + C \sum_{n=1}^l \|\xi_y^n\|^2 \Delta t. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Теперь для достаточно малого Δt , объединив (3.28)–(3.33) с дискретным неравенством Гронуолла, мы можем заключить, что

$$\begin{aligned} \|\xi_y^l\|^2 + \sum_{n=1}^l \|\xi_p^n\|^2 \Delta t &\leq C(\Delta t)^2 (\|\nabla R_h y_t\|_{L^2(L^2)}^2 + \|\nabla R_h y\|_{L^2(L^2)}^2) + C \sum_{n=1}^N \|\eta_y^n\|^2 \Delta t + \\ &C(\Delta t)^2 \|y_{tt}\|_{L^2(L^2)}^2 + C \|(\eta_y)_t\|_{L^2(L^2)}^2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Таким образом, (3.18) следует из (3.34) и лемм 3.2 и 3.3. \square

Теорема 3.2. Пусть $(\mathbf{p}_h^n, y_h^n) \in \mathbf{V}_h \times W_h$ – решение (2.13), (2.14) и пусть (\mathbf{p}, y) – решение (2.1), (2.2) соответственно. Предположим, что точное решение (\mathbf{p}, y) достаточно регулярно для нашей цели. Тогда для достаточно малого Δt и $1 \leq n \leq N$, выполняется

$$\|\nabla(y^n - y_h^n)\| + \|\mathbf{p}^n - \mathbf{p}_h^n\| \leq C(\Delta t + h). \quad (3.35)$$

Доказательство. Возьмем разницу во времени (3.19), чтобы получить

$$\begin{aligned} &(A^{-1} dt \xi_p^n, \mathbf{v}_h) - (\nabla dt \xi_y^n, \mathbf{v}_h) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (M(t_{n-1}, t_{i-1}) \nabla \xi_y^{i-1}, \mathbf{v}_h) - \sum_{i=1}^n (M(t_n, t_{i-1}) \nabla \xi_y^{i-1}, \mathbf{v}_h) + \\ &\frac{1}{\Delta t} \left[\sum_{i=1}^n \Delta t (M(t_n, t_{i-1}) \nabla R_h y^{i-1}, \mathbf{v}_h) - \int_0^{t_n} (M(t_n, s) \nabla R_h y(s), \mathbf{v}_h) ds - \right. \\ &\left. \sum_{i=1}^{n-1} \Delta t (M(t_{n-1}, t_{i-1}) \nabla R_h y^{i-1}, \mathbf{v}_h) + \int_0^{t_{n-1}} (M(t_{n-1}, s) \nabla R_h y(s), \mathbf{v}_h) ds \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Выберем $\mathbf{v}_h = \xi_p^n$ в (3.36) и $w_h = dt \xi_y^n$ в (3.20) соответственно. Сложив два полученных в результате уравнения и используя неравенство

$$(A^{-1} dt \xi_p^n, \xi_p^n) \geq \frac{1}{2\Delta t} \left(\|A^{-\frac{1}{2}} \xi_p^n\|^2 - \|A^{-\frac{1}{2}} \xi_p^{n-1}\|^2 \right), \quad (3.37)$$

получим

$$\begin{aligned}
& \|dt\xi_y^n\|^2 + \frac{1}{2\Delta t} \left(\|A^{-\frac{1}{2}}\xi_{\mathbf{p}}^n\|^2 - \|A^{-\frac{1}{2}}\xi_{\mathbf{p}}^{n-1}\|^2 \right) \\
& \leq \left[\sum_{i=1}^{n-1} (M(t_{n-1}, t_{i-1})\nabla\xi_y^{i-1}, \xi_{\mathbf{p}}^n) - \sum_{i=1}^n (M(t_n, t_{i-1})\nabla\xi_y^{i-1}, \xi_{\mathbf{p}}^n) \right] + \\
& \frac{1}{\Delta t} \left[\sum_{i=1}^n \Delta t (M(t_n, t_{i-1})\nabla R_h y^{i-1}, \xi_{\mathbf{p}}^n) - \int_0^{t_n} (M(t_n, s)\nabla R_h y(s), \xi_{\mathbf{p}}^n) ds - \right. \\
& \quad \left. \sum_{i=1}^{n-1} \Delta t (M(t_{n-1}, t_{i-1})\nabla R_h y^{i-1}, \xi_{\mathbf{p}}^n) + \int_0^{t_{n-1}} (M(t_{n-1}, s)\nabla R_h y(s), \xi_{\mathbf{p}}^n) ds \right] + \\
& (f(y^n) - f(y_h^n), dt\xi_y^n) + (dy^n - y_t^n, dt\xi_y^n) - (d\eta_y^n, dt\xi_y^n). \tag{3.38}
\end{aligned}$$

Из (3.19) следует, что $\xi_{\mathbf{p}}^0 = 0$. Умножив Δt и суммируя по n от 1 до l ($1 \leq l \leq n$) в обеих частях (3.38), используя $\xi_{\mathbf{p}}^0 = 0$ и предположение относительно A , мы видим, что

$$\begin{aligned}
& \|\xi_{\mathbf{p}}^l\|^2 + \sum_{n=1}^l \|dt\xi_y^n\|^2 \Delta t \\
& \leq C \sum_{n=1}^l \Delta t \left[\sum_{i=1}^{n-1} (M(t_n, t_{i-1})\nabla\xi_y^{i-1}, \xi_{\mathbf{p}}^n) - \sum_{i=1}^n (M(t_{n-1}, t_{i-1})\nabla\xi_y^{i-1}, \xi_{\mathbf{p}}^n) \right] + \\
& C \sum_{n=1}^l \left[\sum_{i=1}^n \Delta t (M(t_n, t_{i-1})\nabla R_h y^{i-1}, \xi_{\mathbf{p}}^n) - \int_0^{t_n} (M(t_n, s)\nabla R_h y(s), \xi_{\mathbf{p}}^n) ds - \right. \\
& \quad \left. \sum_{i=1}^{n-1} \Delta t (M(t_{n-1}, t_{i-1})\nabla R_h y^{i-1}, \xi_{\mathbf{p}}^n) + \int_0^{t_{n-1}} (M(t_{n-1}, s)\nabla R_h y(s), \xi_{\mathbf{p}}^n) ds \right] + \\
& \sum_{n=1}^l \Delta t (f(y^n) - f(y_h^n), dt\xi_y^n) + \sum_{n=1}^l \Delta t (dy^n - y_t^n, dt\xi_y^n) - \sum_{n=1}^l \Delta t (d\eta_y^n, dt\xi_y^n) \\
& = \sum_{i=1}^5 Q_i. \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Теперь оценим правосторонние члены (3.39). Для Q_1 , используя неравенство Коши и (2.4), мы видим, что

$$\begin{aligned}
Q_1 & = C \sum_{n=1}^l \Delta t \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left((M(t_{n-1}, t_{i-1}) - M(t_n, t_{i-1}))\nabla\xi_y^{i-1}, \xi_{\mathbf{p}}^n \right) - (M(t_n, t_{n-1})\nabla\xi_y^{n-1}, \xi_{\mathbf{p}}^n) \right] \\
& \leq C \sum_{n=1}^l \Delta t \sum_{i=1}^{n-1} \|\nabla\xi_y^{i-1}\|^2 \Delta t + C \sum_{n=1}^l \|\xi_{\mathbf{p}}^n\|^2 \Delta t + C \sum_{n=1}^l \|\nabla\xi_y^{n-1}\|^2 \Delta t, \tag{3.40}
\end{aligned}$$

где использовалось

$$M(t_{n-1}, s) - M(t_n, s) = \Delta t M_t(t_{n^*}, s), \quad t_{n-1} < t_{n^*} < t_n. \tag{3.41}$$

Для Q_2 , используя (3.41), (2.4) и неравенство Коши, имеем

$$\begin{aligned}
Q_2 &= C \sum_{n=1}^l \left[(\Delta t M(t_n, t_{n-1}) \nabla R_h y^{n-1}, \xi_{\mathbf{p}}^n) - \int_{t_{n-1}}^{t_n} (M(t_n, s) \nabla R_h y(s), \xi_{\mathbf{p}}^n) ds + \right. \\
&\quad \left. \sum_{i=1}^{n-1} \Delta t \left((M(t_n, t_{i-1}) - M(t_{n-1}, t_{i-1})) \nabla R_h y^{i-1}, \xi_{\mathbf{p}}^n \right) - \right. \\
&\quad \left. \int_0^{t_{n-1}} \left((M(t_n, s) - M(t_{n-1}, s)) \nabla R_h y(s), \xi_{\mathbf{p}}^n \right) ds \right] \\
&= C \sum_{n=1}^l \Delta t \left(M(t_n, t_{n-1}) \nabla R_h y^{n-1} - M(t_n, s_n) \nabla R_h y(s_n), \xi_{\mathbf{p}}^n \right) + \\
&\quad C \sum_{n=1}^l \Delta t \left[\sum_{i=1}^{n-1} \Delta t (M_t(t_n^*, t_{i-1}) \nabla R_h y^{i-1}, \xi_{\mathbf{p}}^n) - \int_0^{t_{n-1}} (M_t(t_n^*, s) \nabla R_h y(s), \xi_{\mathbf{p}}^n) ds \right] \\
&\leq C(\Delta t)^2 (\|\nabla R_h y\|_{L^2(L^2)}^2 + \|\nabla R_h y_t\|_{L^2(L^2)}^2) + C \sum_{n=1}^l \|\xi_{\mathbf{p}}^n\|^2 \Delta t, \tag{3.42}
\end{aligned}$$

где мы также использовали

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} M(t_n, s) \nabla R_h y(s) ds = \Delta t M(t_n, s_n) \nabla R_h y(s_n), \quad t_{n-1} < s_n < t_n,$$

и

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{i=1}^{n-1} \Delta t M_t(t_n^*, t_{i-1}) \nabla R_h y^{i-1} - \int_0^{t_{n-1}} M_t(t_n^*, s) \nabla R_h y(s) ds \right\| \\
&\leq C \Delta t (\|\nabla R_h y\|_{L^2(L^2)} + \|\nabla R_h y_t\|_{L^2(L^2)}).
\end{aligned}$$

Аналогично (3.31)–(3.33) оценим Q_3, Q_4, Q_5 следующим образом:

$$Q_3 \leq C \sum_{n=1}^l (\|\xi_y^n\|^2 + \|\eta_y^n\|^2) \Delta t + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^l \|dt \xi_y^n\|^2 \Delta t, \tag{3.43}$$

$$Q_4 \leq C(\Delta t)^2 \|y_{tt}\|_{L^2(L^2)}^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^l \|dt \xi_y^n\|^2 \Delta t, \tag{3.44}$$

$$Q_5 \leq C \|(\eta_y)_t\|_{L^2(L^2)}^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^l \|dt \xi_y^n\|^2 \Delta t. \tag{3.45}$$

Теперь для достаточно малого Δt используем (3.24), (3.34), (3.39), (3.40), (3.42)–(3.45), леммы 3.2, 3.3 и дискретное неравенство Гронуолла для завершения доказательства теоремы. \square

4. Априорные оценки ошибки двухсеточного алгоритма

В данном пункте мы представим основной алгоритм статьи. Основной ингредиент алгоритма — другое смешанное конечно-элементное пространство $\mathbf{V}_H \times W_H \subset \mathbf{V}_h \times W_h$, определенное на грубой сетке. Алгоритм состоит из следующих трех шагов.

Шаг 1. На грубой сетке \mathcal{T}_H вычислить $(\mathbf{p}_H^n, y_H^n) \in \mathbf{V}_H \times W_H$ для удовлетворения следующей исходной нелинейной системы:

$$(A^{-1}\mathbf{p}_H^n, \mathbf{v}_H) + \sum_{i=1}^n \Delta t (M(t_n, t_{i-1}) \nabla y_H^{i-1}, \mathbf{v}_H) - (\nabla y_H^n, \mathbf{v}_H) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_H \in \mathbf{V}_H, \quad (4.1)$$

$$(dt y_H^n, w_H) + (\mathbf{p}_H^n, \nabla w_H) = (f(y_H^n), w_H) \quad \forall w_H \in W_H, \quad (4.2)$$

$$y_H^0 = R_H y_0, \quad (4.3)$$

где R_H определено таким же образом, как R_h , определенное в (2.11), (2.12).

Шаг 2. На мелкой сетке \mathcal{T}_h вычислить $(\tilde{\mathbf{p}}_h^n, \tilde{y}_h^n) \in \mathbf{V}_h \times W_h$ для удовлетворения следующей линейной системы:

$$(A^{-1}\tilde{\mathbf{p}}_h^n, \mathbf{v}_h) + \sum_{i=1}^n \Delta t (M(t_n, t_{i-1}) \nabla \tilde{y}_h^{i-1}, \mathbf{v}_h) - (\nabla \tilde{y}_h^n, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (4.4)$$

$$(dt \tilde{y}_h^n, w_h) + (\tilde{\mathbf{p}}_h^n, \nabla w_h) = (f(y_H^n) + f'(y_H^n)(\tilde{y}_h^n - y_H^n), w_h) \quad \forall w_h \in W_h, \quad (4.5)$$

$$\tilde{y}_h^0 = R_h y_0. \quad (4.6)$$

Шаг 3. На мелкой сетке \mathcal{T}_h вычислить $(\bar{\mathbf{p}}_h^n, \bar{y}_h^n) \in \mathbf{V}_h \times W_h$ для удовлетворения следующей линейной системы:

$$(A^{-1}\bar{\mathbf{p}}_h^n, \mathbf{v}_h) + \sum_{i=1}^n \Delta t (M(t_n, t_{i-1}) \nabla \bar{y}_h^{i-1}, \mathbf{v}_h) - (\nabla \bar{y}_h^n, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (4.7)$$

$$(dt \bar{y}_h^n, w_h) + (\bar{\mathbf{p}}_h^n, \nabla w_h) = (f(\tilde{y}_h^n) + f'(\tilde{y}_h^n)(\bar{y}_h^n - \tilde{y}_h^n), w_h) \quad \forall w_h \in W_h, \quad (4.8)$$

$$\bar{y}_h^0 = R_h y_0. \quad (4.9)$$

Теперь обсудим оценки ошибки приведенного выше двухсеточного алгоритма.

Теорема 4.1. Пусть $(\tilde{\mathbf{p}}_h^n, \tilde{y}_h^n) \in \mathbf{V}_h \times W_h$ — решение (4.1)–(4.6) и пусть (\mathbf{p}, y) — решение (2.1), (2.2) соответственно. Предположим, что точное решение (\mathbf{p}, y) достаточно регулярно для нашей цели. Тогда для достаточно малого Δt и $1 \leq n \leq N$ имеем

$$\|\nabla(y^n - \tilde{y}_h^n)\| + \|\mathbf{p}^n - \tilde{\mathbf{p}}_h^n\| \leq C(\Delta t + h + H^3 |\ln H|). \quad (4.10)$$

Доказательство. Из (4.4), (4.5) и (2.1), (2.2) имеем следующие уравнения ошибки:

$$(A^{-1}(R_h \mathbf{p}^n - \tilde{\mathbf{p}}_h^n), \mathbf{v}_h) + \int_0^{t_n} (M(t_n, s) \nabla R_h y(s), \mathbf{v}_h) ds - \sum_{i=1}^n \Delta t (M(t_n, t_{i-1}) \nabla \tilde{y}_h^{i-1}, \mathbf{v}_h) - (\nabla(R_h y^n - \tilde{y}_h^n), \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (4.11)$$

$$(dt(R_h y^n - \tilde{y}_h^n), w_h) + (R_h \mathbf{p}^n - \tilde{\mathbf{p}}_h^n, \nabla w_h) = (f(y^n) - f(y_H^n) + f'(y_H^n)(\tilde{y}_h^n - y_H^n), w_h) + (dt y^n - y_t^n, w_h) - (dt(y^n - R_h y^n), w_h) \quad \forall w_h \in W_h. \quad (4.12)$$

Заметим, что разложение Тейлора в y_H^n дает

$$f(y^n) = f(y_H^n) + f'(y_H^n)(y^n - y_H^n) + \frac{1}{2}f''(\tilde{y})(y^n - y_H^n)^2 \quad (4.13)$$

для некоторой функции \tilde{y} . Тогда

$$\begin{aligned} f(y^n) - f(y_H^n) - f'(y_H^n)(y^n - y_H^n) &= f'(y_H^n)(y^n - \tilde{y}_h^n) + \frac{1}{2}f''(\tilde{y})(y^n - y_H^n)^2 \\ &= f'(y_H^n)(y^n - R_h y^n + R_h y^n - \tilde{y}_h^n) + \frac{1}{2}f''(\tilde{y})(y^n - y_H^n)^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Таким образом, кроме теоретического анализа теорем 3.1 и 3.2 нам нужно лишь оценить ошибку $\|(y^n - y_H^n)^2\|^2$. Поскольку

$$\begin{aligned} \|(y^n - y_H^n)^2\|^2 &\leq \|y^n - y_H^n\|_{0,\infty}^2 \|y^n - y_H^n\|^2 \\ &\leq (\|y^n - P_H y^n\|_{0,\infty} + \|P_H y^n - R_H y^n\|_{0,\infty} + \|R_H y^n - y_H^n\|_{0,\infty})^2 \|y^n - y_H^n\|^2, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где P_H определяется таким же образом, как P_h , определенное посредством (2.5). При помощи (2.6), (2.7), (3.4), (3.18) и обратной оценки, получим

$$\begin{aligned} \|(y^n - y_H^n)^2\|^2 &\leq C(H|\ln H| + H^{-1}H^2 + H^{-1}(\Delta t + H^2))^2 (\Delta t + H^2)^2 \\ &\leq C(H|\ln H|\Delta t + H^3|\ln H| + H^{-1}(\Delta t)^2 + 2H\Delta t + H^3)^2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Выберем H и Δt таким образом, что $H^{-1}\Delta t < C$. Тогда имеем

$$\|(y^n - y_H^n)^2\|^2 \leq C(\Delta t + H^3 \ln |H|)^2. \quad (4.17)$$

Таким образом, доказательство теоремы завершено. \square

Теорема 4.2. Пусть $(\bar{\mathbf{p}}_h^n, \bar{y}_h^n) \in \mathbf{V}_h \times W_h$ — решение (4.1)–(4.9) и пусть (\mathbf{p}, y) — решение (2.1), (2.2) соответственно. Предположим, что точное решение (\mathbf{p}, y) достаточно регулярно для нашей цели. Тогда для достаточно малого Δt и $1 \leq n \leq N$ имеем

$$\|\nabla(y^n - \bar{y}_h^n)\| + \|\mathbf{p}^n - \bar{\mathbf{p}}_h^n\| \leq C(\Delta t + h + H^6 |\ln H|^2). \quad (4.18)$$

Доказательство. Аналогично (4.11), (4.12) мы имеем следующие уравнения для ошибки:

$$\begin{aligned} (A^{-1}(R_h \mathbf{p}^n - \bar{\mathbf{p}}_h^n), \mathbf{v}_h) + \int_0^{t_n} (M(t_n, s) \nabla R_h y(s), \mathbf{v}_h) ds - \\ \sum_{i=1}^n \Delta t (M(t_n, t_{i-1}) \nabla \bar{y}_h^{i-1}, \mathbf{v}_h) - (\nabla(R_h y^n - \bar{y}_h^n), \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} (dt(R_h y^n - \bar{y}_h^n), w_h) + (R_h \mathbf{p}^n - \bar{\mathbf{p}}_h^n, \nabla w_h) = (f(y^n) - f(\bar{y}_h^n) + f'(\bar{y}_h^n)(\bar{y}_h^n - \tilde{y}_h^n), w_h) + \\ (dy^n - y_t^n, w_h) - (dt(y^n - R_h y^n), w_h) \quad \forall w_h \in W_h. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Теперь разложение Тейлора в \tilde{y}_h^n дает

$$\begin{aligned} f(y^n) - f(\tilde{y}_h^n) - f'(\tilde{y}_h^n)(\bar{y}_h^n - \tilde{y}_h^n) \\ = f(\tilde{y}_h^n) + f'(\tilde{y}_h^n)(y^n - \tilde{y}_h^n) + \frac{1}{2}f''(\theta)(y^n - \tilde{y}_h^n)^2 - f(\tilde{y}_h^n) - f'(\tilde{y}_h^n)(\bar{y}_h^n - \tilde{y}_h^n) \\ = f'(\tilde{y}_h^n)(y^n - \bar{y}_h^n) + \frac{1}{2}f''(\theta)(y^n - \tilde{y}_h^n)^2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

для некоторой функции θ . Как в теореме 4.1, нам необходимо оценить ошибку $\|(y^n - \tilde{y}_h^n)^2\|^2$. Используя вложение $\|v\|_{0,4} \leq C\|v\|_1$, неравенство Пуанкаре $\|v\| \leq C\|\nabla v\|$ и (4.10), имеем

$$\|(y^n - \tilde{y}_h^n)^2\|^2 = \|y^n - \tilde{y}_h^n\|_{0,4}^4 \leq C\|\nabla(y^n - \tilde{y}_h^n)\|^4 \leq C(\Delta t + h + H^3|\ln H|)^4. \quad (4.22)$$

Теперь, используя (4.22) и такой же анализ, как в теоремах 3.1 и 3.2, мы завершаем доказательство. \square

5. Численные эксперименты

В данном пункте мы проверим априорные оценки ошибки для метода двухсеточной дискретизации для нелинейных параболических интегро-дифференциальных уравнений. Для упрощения вычислений рассмотрим двухшаговую двухсеточную схему (4.1)–(4.6) вместо схемы (4.1)–(4.9) и возьмем $h = H^2$ в следующем численном примере.

Рассмотрим полулинейное параболическое интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} y_t - \operatorname{div}(A(t)\nabla y) + \int_0^t \operatorname{div}(B(t,s)\nabla y) ds &= y^3 + g(x,t), \quad x \in \Omega, t \in J, \\ y(x,t) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, t \in J, \\ y(x,0) &= y_0(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

при $\Omega = [0, 1]^2$ и $J = [0, 1]$. Для простоты пусть $A(t) = \mathbf{I}$, $B(t,s) = \mathbf{I}$, где \mathbf{I} — единичная матрица в численной реализации. Выберем $g(x,t)$ таким образом, что точное решение имеет следующий вид:

$$y(x,t) = \sin(\pi t) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2).$$

Теперь явная формулировка $g(x,t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} g(x,t) &= (\pi \cos(\pi t) + 2\pi^2 \sin(\pi t)(\cos(\pi t) + 2) + 2\pi(\cos(\pi t) - 1)) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) - \\ &(\sin(\pi t) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2))^3. \end{aligned}$$

Сначала в таблицах 1, 2 мы представим численные ошибки $\|\nabla(y^n - y_h^n)\|$, $\|\mathbf{p}^n - \mathbf{p}_h^n\|$, $\|\nabla(y^n - \tilde{y}_h^n)\|$ и $\|\mathbf{p}^n - \tilde{\mathbf{p}}_h^n\|$ при решении смешанным методом конечных элементов (СМКЭ) и двухсеточным методом соответственно.

Таблица 1. Результаты $\|\nabla(y^n - y_h^n)\|$ и $\|\mathbf{p}^n - \mathbf{p}_h^n\|$ при использовании СМКЭ ($n = N/2$)

$h = \Delta t$	$\ \nabla(y^n - y_h^n)\ $	Сходимость	$\ \mathbf{p}^n - \mathbf{p}_h^n\ $	Сходимость
1/16	2.5505e-1	–	1.5227e-1	–
1/36	1.1434e-1	0.99	6.7827e-2	1.00
1/64	6.4482e-2	1.00	3.8239e-2	1.00
1/100	4.1313e-2	1.00	2.4479e-2	1.00

Таблица 2. Результаты $\|\nabla(y^n - \tilde{y}_h^n)\|$ и $\|\mathbf{p}^n - \tilde{\mathbf{p}}_h^n\|$ при использовании двухсеточного метода ($n = N/2$)

H	$h = \Delta t$	$\ \nabla(y^n - \tilde{y}_h^n)\ $	Сходимость	$\ \mathbf{p}^n - \tilde{\mathbf{p}}_h^n\ $	Сходимость
1/4	1/16	2.5645e-1	–	1.5282e-1	–
1/6	1/36	1.1473e-1	0.99	6.8078e-2	1.00
1/8	1/64	6.4617e-2	1.00	3.8291e-2	1.00
1/10	1/100	4.1370e-2	1.00	2.4501e-2	1.00

Легко увидеть, что двухсеточный метод и смешанный метод конечных элементов имеют одинаковый порядок сходимости. Эти численные результаты находятся в хорошем соответствии с результатами теоретического анализа. Во-вторых, сравнение времени вычисления двух методов в таблицах 3 и 4 показывает, что время вычисления для двухсеточного метода значительно меньше, чем для СМКЭ. И наконец, на рисунках 1–3 приведены графики точного решения y , решения y смешанным методом конечных элементов и решение y двухсеточным методом на 36×36 треугольной сетке при $t = 0.5$ соответственно.

Таблица 3. Время вычисления СМКЭ ($h = 1/16$) и двухсеточным методом ($H = 1/4, h = 1/16$)

Временной уровень	Время вычисления (СМКЭ)	Время вычисления (двухсеточный метод)
4	65 с	52 с
8	52 с	37 с
12	74 с	42 с
16	56 с	34 с

Таблица 4. Время вычисления СМКЭ ($h = 1/36$) и двухсеточным методом ($H = 1/6, h = 1/36$)

Временной уровень	Время вычисления (СМКЭ)	Время вычисления (двухсеточный метод)
6	893 с	688 с
12	741 с	347 с
18	729 с	264 с
24	804 с	287 с
30	1311 с	401 с
36	1043 с	354 с

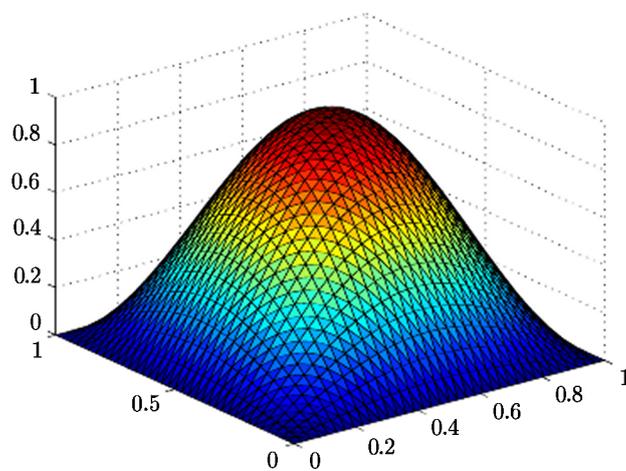


Рис. 1. Профиль точного решения y на 36×36 треугольной сетке при $t = 0.5$

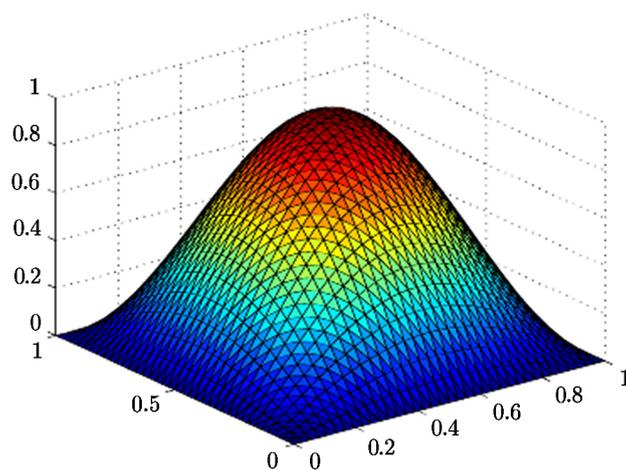


Рис. 2. Профиль решения y смешанным методом конечных элементов на 36×36 треугольной сетке при $t = 0.5$

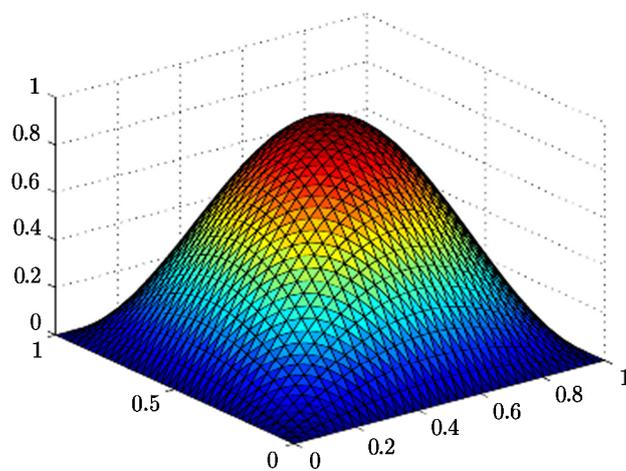


Рис. 3. Профиль двухсеточного решения y на 36×36 треугольной сетке при $t = 0.5$

6. Выводы

В данной статье мы представили двухсеточный алгоритм для полулинейных параболических интегро-дифференциальных уравнений, дискретизируемых при помощи нового смешанного метода конечных элементов. Градиент в методе принадлежит пространству квадратично интегрируемых функций, а не классическому пространству $H(\operatorname{div}; \Omega)$. Основная суть двухсеточного метода в данной статье состоит в том, что ньютоновские итерации используются на мелкой сетке. Мы показываем, что когда грубая сетка и мелкая сетка удовлетворяют $h = \mathcal{O}(H^6 |\ln H|^2)$, двухсеточный алгоритм может достичь такой же точности решения смешанным методом конечных элементов. В нашей будущей работе мы рассмотрим более сложные двухсеточные алгоритмы для (1.1)–(1.4) и представим некоторые численные эксперименты для этих алгоритмов.

Литература

1. **Brezzi F. and Fortin M.** Mixed and Hybrid Finite Element Methods. — New York: Springer-Verlag, 1991.
2. **Bi C. and Ginting V.** Two-grid finite volume element method for linear and nonlinear elliptic problems // Numer. Math. — 2007. — Vol. 108, iss. 2. — P. 177–198.
3. **Bi C. and Ginting V.** Two-grid discontinuous Galerkin method for quasi-linear elliptic problems // J. Sci. Comput. — 2011. — Vol. 49, № 3. — P. 311–331.
4. **Chen L. and Chen Y.** Two-grid method for nonlinear reaction-diffusion equations by mixed finite element methods // J. Sci. Comput. — 2011. — Vol. 49, № 3. — P. 383–401.
5. **Chen Y., Huang Y., and Yu D.** A two-grid method for expanded mixed finite-element solution of semilinear reaction-diffusion equations // Int. J. Numer. Meth. Eng. — 2003. — Vol. 57, iss. 2. — P. 193–209.
6. **Chen Y., Liu H., and Liu S.** Analysis of two-grid methods for reaction-diffusion equations by expanded mixed finite element methods // Int. J. Numer. Meth. Eng. — 2007. — Vol. 69. — P. 408–422.
7. **Cannon J.R. and Lin Y.** A priori L^2 error estimates for finite-element methods for nonlinear diffusion equations with memory // SIAM J. Numer. Anal. — 1990. — Vol. 27. — P. 595–607.
8. **Chen S.C. and Chen H.R.** New mixed element schemes for a second-order elliptic problem // Mathematica Numerica Sinica. — 2010. — Vol. 32, № 2. — P. 213–218.
9. **Ciarlet P.G.** The Finite Element Method for Elliptic Problems. — Amsterdam: North-Holland, 1978.
10. **Dawson C., Wheeler M.F., and Woodward C.S.** A two-grid finite difference scheme for nonlinear parabolic equations // SIAM J. Numer. Anal. — 1998. — Vol. 35. — P. 435–452.
11. **Dawson C.N. and Wheeler M.F.** Two-grid methods for mixed finite element approximations of nonlinear parabolic equations // Contemp. Maths. — 1994. — Vol. 180. — P. 191–203.
12. **Douglas J. and Roberts J.E.** Global estimates for mixed methods for second order elliptic equations // Math. Comp. — 1985. — Vol. 44. — P. 39–52.
13. **Ewing R.E., Lin Y.P., Sun T., Wang J.P., and Zhang S.H.** Sharp L^2 -error estimates and superconvergence of mixed finite element methods for non-Fickian flows in porous media // SIAM J. Numer. Anal. — 2002. — Vol. 40, № 4. — P. 1538–1560.
14. **Yanik E.G. and Fairweather G.** Finite element methods for parabolic and hyperbolic partial integro-differential equations // Nonlinear Anal. — 1988. — Vol. 12. — P. 785–809.
15. **Grisvard P.** Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. — Boston: Pitman Advanced Pub., 1985.

16. **Huang Y., Shi Z.H., Tang T., and Xue W.** A multilevel successive iteration method for nonlinear elliptic problems // *Math. Comput.* — 2004. — Vol. 73, № 246. — P. 525–539.
17. **Huang Y. and Xue W.** Convergence of finite element approximations and multilevel linearization for Ginzburg-Landau model of d-wave superconductors // *Adv. Comput. Math.* — 2002. — Vol. 17. — P. 309–330.
18. **Lin Y.** Galerkin methods for nonlinear parabolic integrodifferential equations with nonlinear boundary conditions // *SIAM J. Numer. Anal.* — 1990. — Vol. 27. — P. 608–621.
19. **Pani A.K.** An H^1 -Galerkin mixed finite element method for parabolic partial differential equations // *SIAM J. Numer. Anal.* — 1998. — Vol. 35, № 2. — P. 712–727.
20. **Pani A.K. and Fairweather G.** H^1 -Galerkin mixed finite element method for parabolic partial integro-differential equations // *IMA J. Numer. Anal.* — 2002. — Vol. 22. — P. 231–252.
21. **Russell T.F.** Time stepping along characteristics with incomplete iteration for a Galerkin approximation of miscible displacement in porous media // *SIAM J. Numer. Anal.* — 1985. — Vol. 22, № 5. — P. 970–1013.
22. **Raviart P.A. and Thomas J.M.** A mixed finite element method for second order elliptic problems // *Mathematical Aspects of Finite Element Methods.* — Berlin: Springer, 1977. — P. 292–315. — (Lecture Notes in Math.; 606).
23. **Shi F., Yu J.P., and Li K.T.** A new stabilized mixed finite-element method for Poisson equation based on two local Gauss integrations for linear element pair // *Int. J. Comput. Math.* — 2011. — Vol. 88. — P. 2293–2305.
24. **Sinha R.K., Ewing R.E., and Lazarov R.D.** Mixed finite element approximations of parabolic integro-differential equations with nonsmooth initial data // *SIAM J. Numer. Anal.* — 2009. — Vol. 47, № 5. — P. 3269–3292.
25. **Thomé V. and Zhang N.Y.** Error estimates for semidiscrete finite element methods for parabolic integro-differential equations // *Math. Comput.* — 1989. — Vol. 53. — P. 121–139.
26. **Wu L. and Allen M.B.** A two-grid method for mixed finite-element solution of reaction-diffusion equations // *Numerical Methods for Partial Differential Equations.* — 1999. — Vol. 15. — P. 317–332.
27. **Xu J.** A novel two-grid method for semilinear elliptic equations // *SIAM J. Sci. Comput.* — 1994. — Vol. 15. — P. 231–237.
28. **Xu J.** Two-grid discretization techniques for linear and nonlinear PDEs // *SIAM J. Numer. Anal.* — 1996. — Vol. 33, № 5. — P. 1759–1777.
29. **Xu J. and Zhou A.** A two-grid discretization scheme for eigenvalue problems // *Math. Comput.* — 2001. — Vol. 70. — P. 17–25.

Поступила в редакцию 20 апреля 2018 г.

После доработки 13 июля 2018 г.

Принята к публикации 21 января 2019 г.

