

УДК 512.643

Классы псевдоперестановочности комплексных матриц и их овеществление

Х.Д. Икрамов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 1, Москва, 119992

E-mail: ikramov@cs.msu.su

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 16, 2023.

Икрамов Х.Д. Классы псевдоперестановочности комплексных матриц и их овеществление // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 2. — С. 199–203.

Отношение между комплексными матрицами H и A , выражаемое равенством $HA = \bar{A}H$, называется псевдоперестановочностью. Совокупность S_H всех A , псевдоперестановочных с невырожденной $n \times n$ -матрицей H , называется классом псевдоперестановочности, определяемым этой матрицей. Всякий класс S_H является подпространством пространства $M_n(\mathbf{C})$, рассматриваемого как вещественное векторное пространство размерности $2n^2$. В предположении $\dim_{\mathbf{R}} S_H = n^2$ найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы все матрицы из S_H могли быть овеществлены одним и тем же подобием.

DOI: 10.15372/SJNM20230206

Ключевые слова: *центроэрмитовы матрицы, кросс-матрицы, блочный кватернион, псевдоподобие, лемма Шура.*

Ikramov Kh.D. Pseudo-commutation classes of complex matrices and their decomplexification // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 2. — P. 199–203.

The relation between complex matrices H and A given by the equality $HA = \bar{A}H$ is called the pseudo-commutation. The set S_H of all A that pseudo-commute with a nonsingular $n \times n$ matrix H is called the pseudo-commutation class defined by H . Every class S_H is a subspace of the space $M_n(\mathbf{C})$ interpreted as a real vector space of dimension $2n^2$. Under the assumption $\dim_{\mathbf{R}} S_H = n^2$, we find a necessary and sufficient condition for the possibility to decomplexify all the matrices in S_H by one and the same similarity transformation.

Keywords: *centrohermitian matrices, cross-matrices, block quaternion, consimilarity, Schur's lemma.*

1. Пусть H — фиксированная невырожденная $n \times n$ -матрица. Рассмотрим класс S_H комплексных $n \times n$ -матриц A , удовлетворяющих соотношению

$$HA = \bar{A}H. \quad (1)$$

Матрицы A и H , связанные таким образом, будем называть *псевдоперестановочными*, а S_H — классом псевдоперестановочности, определяемым матрицей H .

Наиболее известным классом псевдоперестановочности является класс центроэрмитовых $n \times n$ -матриц, для которых

$$H = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \dots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \equiv P_n.$$

Более популярное определение $n \times n$ -матриц этого класса дается соотношением, которому подчиняются их элементы:

$$a_{ij} = \overline{a_{n+1-j, n+1-i}} \quad \forall i, j.$$

Приведем еще несколько примеров классов псевдоперестановочности.

Пример 1. Назовем *кросс-матрицей* матрицу A четного порядка $n = 2m$ и следующей блочной структуры:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{11} \end{pmatrix}.$$

Множеству кросс-матриц в качестве класса псевдоперестановочности соответствует матрица

$$H = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. *Блочным кватернионом* будем называть матрицу A четного порядка $n = 2m$ и блочного вида

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ -A_{12} & A_{11} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Блочные кватернионы образуют класс псевдоперестановочности, определяемый матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Пример 3. Положим

$$H = I_p \oplus -I_q, \quad p + q = n. \quad (4)$$

Матрицу A из класса псевдоперестановочности, задаваемого матрицей (4), представим в блочной форме

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где блоки A_{11} и A_{22} суть квадратные матрицы порядков p и q соответственно. Тогда эти блоки вещественны, в то время как внедиагональные блоки A_{12} и A_{21} имеют чисто мнимые элементы.

Возвращаясь к общему определению класса псевдоперестановочности (1), заметим, что любая матрица A из такого класса подобна матрице $\bar{A}$, а потому подобна некоторой вещественной матрице [1, следствие 3.4.1.7]. При этом весь класс центроэрмитовых матриц фиксированного порядка n может быть овеществлен одним и тем же подобием [2]. Точный вид этого подобия зависит от четности числа n ; так, для четного $n = 2m$ в качестве трансформирующей матрицы овеществляющего подобия может быть взята унитарная матрица

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_m & iI_m \\ P_m & -iP_m \end{pmatrix}.$$

Цель этой статьи — обсудить, верно ли аналогичное утверждение по отношению к другим классам псевдоперестановочности, т. е. можно ли все матрицы данного класса овеществить одним и тем же подобием? Мы ответим на этот вопрос при некотором дополнительном предположении. Заметим, что при любой (невырожденной) матрице H

класс S_H является подпространством (и даже вещественной алгеброй) в пространстве $M_n(\mathbf{C})$ комплексных $n \times n$ -матриц, рассматриваемом как вещественное векторное пространство размерности $2n^2$. В зависимости от H размерность S_H может быть весьма различной. Так, если H — диагональная матрица с положительными и попарно различными диагональными элементами, то $\dim_{\mathbf{R}} S_H = n$. С другой стороны, легко видеть, что размерность подпространства центроэрмитовых матриц, как и классов псевдоперестановочности из примеров 1–3, равна n^2 .

Наше дополнительное предположение об H формулируется так:

$$\dim_{\mathbf{R}} S_H = n^2. \quad (5)$$

При этом предположении мы доказываем в пункте 2, что класс S_H тогда и только тогда может быть преобразован одновременным подобием в пространство $M_n(\mathbf{R})$, когда

$$H\bar{H} = \mu I_n \quad (6)$$

для некоторого положительного числа μ . Комментарии к этому утверждению даны в п. 3.

В заключение п. 1 скажем несколько слов о практическом смысле процедуры овеществления комплексной матрицы. Перемножение комплексных чисел $z = x + iy$ и $w = u + iv$ включает в себя четыре вещественных умножения (вычисление произведений xu, xv, yu, yv) и, следовательно, по крайней мере в четыре раза “дороже” одного вещественного умножения. Еще хуже соотношение трудоемкости при делении комплексных и вещественных чисел. Если несложным подобием комплексную матрицу можно превратить в вещественную, то это в несколько раз сократит арифметическую работу при последующем решении линейно-алгебраической задачи. Еще больший выигрыш достигается в случае, когда одним и тем же подобием овеществляется целый класс матриц, как это происходит в центроэрмитовом случае. Работа по овеществлению центроэрмитовой матрицы порядка n обходится в $O(n^2)$ флопов, тогда как решение типовых задач линейной алгебры требует не менее $O(n^3)$ арифметических операций.

2. Предположим, что все матрицы A класса S_H подвергнуты подобию с трансформирующей матрицей Q :

$$A \rightarrow Q^{-1}AQ = \tilde{A}. \quad (7)$$

Переписывая равенство (1) в виде

$$(\bar{Q}^{-1}HQ)(Q^{-1}AQ) = \overline{(Q^{-1}AQ)}(\bar{Q}^{-1}HQ), \quad (8)$$

закключаем, что преобразованные матрицы $\tilde{A}$ сами составляют класс псевдоперестановочности, определяемый матрицей

$$\tilde{H} = \bar{Q}^{-1}HQ. \quad (9)$$

В теории матриц переход от H к $\tilde{H}$ называется псевдоподобием.

Если класс S_H , подчиненный условию (5), может быть одновременным подобием преобразован в $M_n(\mathbf{R})$, то матрица (9) должна, согласно (8), удовлетворять соотношению

$$\tilde{H}\tilde{A} = \tilde{A}\tilde{H}$$

для любой вещественной матрицы $\tilde{A}$. Теперь из леммы Шура (см., например, [3, задача 5.4.40]) следует, что $\tilde{H}$ — скалярная матрица:

$$\tilde{H} = \bar{Q}^{-1}HQ = \alpha I_n, \quad \alpha \in \mathbf{C}.$$

Отсюда выводим

$$H = \alpha \overline{Q} Q^{-1}, \quad \overline{H} = \overline{\alpha} Q \overline{Q}^{-1}$$

и

$$H \overline{H} = |\alpha|^2 I_n,$$

т. е. при $\mu = |\alpha|^2$ выполняется соотношение (6).

Пусть, напротив, выполнено (6). Согласно [1, лемма 4.6.9], матрица H может быть представлена в виде

$$H = \sqrt{\mu} \overline{Q} Q^{-1}$$

для некоторой невырожденной матрицы Q . Полагая $\alpha = \sqrt{\mu}$, находим

$$HQ = \alpha \overline{Q}.$$

Если $A \in S_H$, то для матрицы $\tilde{A} = Q^{-1} A Q$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{A}} &= \overline{Q}^{-1} \overline{A Q} = \overline{Q}^{-1} (H A H^{-1}) \overline{Q} = (\overline{Q}^{-1} H) A (H^{-1}) \overline{Q} \\ &= (\alpha Q^{-1}) A \left(\frac{1}{\alpha} Q \right) = Q^{-1} A Q = \tilde{A}. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица $\tilde{A}$ вещественна. Учитывая условие (5), образом класса S_H под действием подобия (7) является все пространство $M_n(\mathbf{R})$.

3. Вещественные матрицы H в примерах 1 и 3 очевидным образом удовлетворяют условию (6) с $\mu = 1$:

$$H^2 = I_n.$$

В качестве трансформирующей матрицы Q , овеществляющей весь класс кросс-матриц, можно взять унитарную матрицу

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_m & -iI_m \\ I_m & iI_m \end{pmatrix}.$$

Еще проще указать овеществляющую матрицу для примера 3. Годится, например, матрица

$$Q = I_p \oplus iI_q.$$

Однако для блочных кватернионов ситуация иная. Так как квадратом матрицы (3) является матрица $-I_n$, то соотношение (6) не выполнено, и класс блочных кватернионов не может быть овеществлен единым подобием, хотя всякий блочный кватернион допускает индивидуальное овеществление. Но и это индивидуальное овеществление не может, вообще говоря, быть достигнуто унитарным подобием.

В обоснование последнего утверждения сошлемся на следующий результат из [4].

Теорема. Матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ тогда и только тогда может быть овеществлена унитарным подобием, когда A и $\bar{A}$ унитарно подобны и подобие между ними можно осуществить посредством матрицы P , одновременно унитарной и симметричной.

Матрица A из формулы (2) унитарно подобна матрице

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \overline{A_{11}} & \overline{A_{12}} \\ -A_{12} & A_{11} \end{pmatrix}.$$

Подобие между A и $\bar{A}$ осуществляет, например, унитарная матрица

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

При этом выполняется не только соотношение подобия

$$\bar{A} = P^* A P = P^\top A P, \quad (11)$$

но и подобие

$$\overline{A^*} = P^* A^* P = P^\top A^* P.$$

Очевидно, что матрица (10) не симметрична. Однако в общем случае это не исключает существования, наряду с P , другой унитарной матрицы $\tilde{P}$, удовлетворяющей соотношению типа (11) и при этом симметричной.

Одновременное существование таких двух унитарных матриц P и $\tilde{P}$ возможно лишь в случае, если матрица A приводима (см. [5, теорема 4]), т. е. может быть посредством унитарного подобия приведена к прямой сумме матриц меньшего порядка. Поэтому для неприводимого кватерниона A наличие кососимметричной матрицы (10) исключает возможность унитарного овеществления.

Литература

1. **Horn R.A., Johnson C.R.** Matrix Analysis. Second edition. — Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
2. **Lee A.** Centrohermitian and skew-centrohermitian matrices // Linear Algebra Appl. — 1980. — Vol. 29. — P. 205–210.
3. **Икрамов Х.Д.** Задачник по линейной алгебре. — СПб.: Изд-во Лань, 2006.
4. **Икрамов Х.Д.** О комплексных матрицах, унитарно подобных вещественным матрицам // Мат. заметки. — 2010. — Vol. 87, № 6. — С. 840–847.
5. **Икрамов Х.Д.** Об эффективных алгоритмах декомплексификации матриц посредством унитарных подобий и конгруэнций // Мат. заметки. — 2012. — Vol. 92, № 6. — С. 856–863.

Поступила в редакцию 27 октября 2022 г.

После рецензирования без замечаний 04 ноября 2022 г.

Принята к печати 30 января 2023 г.

Литература в транслитерации

1. **Horn R.A., Johnson C.R.** Matrix Analysis. Second edition. — Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
2. **Lee A.** Centrohermitian and skew-centrohermitian matrices // Linear Algebra Appl. — 1980. — Vol. 29. — P. 205–210.
3. **Ikramov Kh.D.** Zadachnik po lineinoi algebre. — SPb.: Izd-vo Lan', 2006.
4. **Ikramov Kh.D.** O kompleksnykh matritsakh, unitarno podobnykh veschestvennym matritsam // Mat. zametki. — 2010. — Vol. 87, № 6. — S. 840–847.
5. **Ikramov Kh.D.** Ob effektivnykh algoritmakh dekompleksifikatsii matrits posredstvom unitarnykh podobii i kongruentsii // Mat. zametki. — 2012. — Vol. 92, № 6. — S. 856–863.

