

УДК 532.522.2:538.4

МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭВОЛЮЦИИ ДЛИННОВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ СТРУЕ С ТОКОМ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ. СТОЛКНОВЕНИЕ ЗАМАГНИЧЕННЫХ СТРУЙ

В. В. Никулин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

В рамках магнитогидродинамического подхода выведена система уравнений, описывающая нелинейную эволюцию длинноволновых осесимметричных возмущений на жидкой проводящей струе с поверхностным электрическим током, расположенной вдоль оси проводящего твердого цилиндра в продольном магнитном поле. Считается, что жидкость невязкая, несжимаемая и, так же как стенки цилиндра, идеально проводящая. Показано, что если продольное поле однородное, а осевое течение бесдвиговое, то в зависимости от параметров задачи данная система может быть либо гиперболической, либо эллиптически-гиперболической. Определены границы областей гиперболичности и эллиптичности в пространстве решений. В области гиперболичности получены уравнения характеристик и условия на них. Рассмотрена задача о распаде разрыва скорости на струе. Найдены условия, когда существует непрерывное автомодельное решение в области гиперболичности, соответствующее столкновению струй.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, струя, длинноволновое приближение.

Введение. Аналитические исследования эволюции возмущений на жидких проводниках со свободными границами до настоящего времени выполнялись в линейном приближении и в основном спектральными методами [1–3]. В последнее время для этих задач удалось применить прямой метод Ляпунова [4]. Однако аналитических исследований нелинейной стадии развития возмущений проведено недостаточно.

При изучении нелинейных задач из-за их сложности часто используются различные приближенные модели, описывающие существенные особенности рассматриваемых процессов. Одним из таких упрощений является асимптотическое приближение длинных волн или мелкой воды, используемое при исследовании волн в жидкости [5, 6]. В рамках модели мелкой воды оказалось возможным исследовать важные закономерности нелинейных эффектов, характерных для рассматриваемых течений, разработать точную теорию, а также решить прикладные задачи. Кроме того, данная теория получила математическое обоснование при изучении течения однородной жидкости в тонком слое [7, 8].

В настоящей работе длинноволновое приближение распространяется на случай струйного МГД-течения со свободной границей. Предложена модель, в рамках которой описывается нелинейное поведение длинноволновых возмущений на жидкой проводящей струе с поверхностным электрическим током в продольном магнитном поле. Данная модель позволяет выполнять аналитические исследования и имеет определенный физический смысл,

что подтверждают результаты, полученные в случае, когда продольное магнитное поле однородное, а осевое течение бесдвиговое.

1. Постановка задачи. Изучается жидкая проводящая струя неограниченной длины в продольном магнитном поле, по поверхности которой течет постоянный электрический ток J . Струя расположена вдоль оси бесконечно проводящего цилиндра радиуса r_0 . Вводится цилиндрическая система координат (r^*, φ, z^*) , ее ось z^* совпадает с осью струи. Используются следующие обозначения: $v_1, v_2, v_3, H_1, H_2, H_3, H_1^*, H_2^*, H_3^*$ — компоненты скорости жидкости, магнитного поля внутри и вне струи, соответствующие системе координат (r^*, φ, z^*) , P — давление, ρ — плотность, t^* — время. Полагается, что при движении жидкости в проводящей струе $v_2 \equiv 0, H_2 \equiv 0$. Кроме того, считается, что это движение является осесимметричным, а сама жидкость — невязкой, несжимаемой и идеально проводящей. Действие сил поверхностного натяжения на свободной границе струи не учитывается.

В силу данных предположений уравнения одножидкостной идеальной магнитной гидродинамики [9] принимают вид

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial t^*} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial r^*} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z^*} \right) &= -\frac{\partial P_*}{\partial r^*} + \frac{H_1}{4\pi} \frac{\partial H_1}{\partial r^*} + \frac{H_3}{4\pi} \frac{\partial H_1}{\partial z^*}, \\ \rho \left(\frac{\partial v_3}{\partial t^*} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial r^*} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z^*} \right) &= -\frac{\partial P_*}{\partial z^*} + \frac{H_1}{4\pi} \frac{\partial H_3}{\partial r^*} + \frac{H_3}{4\pi} \frac{\partial H_3}{\partial r^*}, \\ \frac{\partial(Ar^*)}{\partial t^*} + v_1 \frac{\partial(Ar^*)}{\partial r^*} + v_3 \frac{\partial(Ar^*)}{\partial z^*} &= 0, \\ H_1 &= -\frac{\partial A}{\partial z^*}, \quad H_3 = \frac{1}{r^*} \frac{\partial(Ar^*)}{\partial r^*}, \\ \frac{1}{r^*} \frac{\partial(v_1 r^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial v_3}{\partial z^*} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $P_* \equiv P + (H_1^2 + H_3^2)/(8\pi)$ — модифицированное давление; A — азимутальная компонента векторного потенциала (магнитная проницаемость проводящей струи полагается равной единице).

Вне струи при пренебрежении током смещения уравнения магнитного поля имеют вид

$$\frac{\partial H_1^*}{\partial z^*} - \frac{\partial H_3^*}{\partial r^*} = 0, \quad H_2^* = \frac{2J}{r^*}, \quad \frac{\partial H_3^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(H_1^* r^*)}{\partial r^*} = 0. \quad (1.2)$$

На оси проводящей струи, ее границе ($r^* = r_1(z^*, t^*)$) и стенках цилиндра ставятся следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} v_1 &= 0, \quad H_1 = 0 \quad (r^* = 0), \\ P_* &= \frac{(H_1^*)^2 + (H_2^*)^2 + (H_3^*)^2}{8\pi}, \quad v_1 = \frac{\partial r_1}{\partial t^*} + v_3 \frac{\partial r_1}{\partial z^*} \quad (r^* = r_1(z^*, t^*)), \\ H_1 - H_3 \frac{\partial r_1}{\partial z^*} &= 0, \quad H_1^* - H_3^* \frac{\partial r_1}{\partial z^*} = 0 \quad (r^* = r_1(z^*, t^*)), \\ H_1^* &= 0 \quad (r^* = r_0). \end{aligned} \quad (1.3)$$

При переходе к длинноволновому приближению введем безразмерные переменные и величины $t, \eta, z, q, w, p_*, h, H, a, h^*, \varkappa, H^*$:

$$\begin{aligned} r^{*2} &= \eta L^2 \delta^2, \quad z^* = zL, \quad t^* = tL/v_0, \quad 2v_1 r^* = qv_0 L \delta^2, \quad v_3 = wv_0, \quad P_* = p_* \rho v_0^2, \\ 2H_1 r^* &= hL \delta^2 H_0, \quad H_3 = HH_0, \quad 2Ar^* = a \delta^2 L^2 H_0, \end{aligned}$$

$$2H_1^* r^* = h^* L \delta^2 H_0, \quad H_2^* r^* = \varkappa L \delta H_0, \quad H_3^* = H^* H_0.$$

Здесь L — характерный масштаб вдоль оси z^* ; H_0 — характерная величина магнитного поля, равная H_2^* при $r^* = r_{10}$ ($H_0 = 2J/r_{10}$); r_{10} — характерный радиус струи; $v_0 = H_0/(4\pi\rho)^{1/2}$ — характерная скорость; $\delta = r_{10}/L$. Считается, что $\delta \ll 1$. В безразмерных переменных уравнения (1.1), (1.2) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \delta^2(q_t + qq_\eta - q^2/(2\eta) + wq_z) &= -4\eta p_{*\eta} + \delta^2(hh_\eta - h^2/(2\eta) + Hh_z), \\ w_t + qw_\eta + ww_z &= -p_{*z} + hH_\eta + HH_z, \quad q_\eta + w_z = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$a_t + qa_\eta + wa_z = 0, \quad h = -a_z, \quad H = a_\eta;$$

$$\delta^2 h_z^* - 4\eta H_\eta^* = 0, \quad \varkappa = 1, \quad H_z^* + h_\eta^* = 0. \quad (1.5)$$

Здесь и далее нижний индекс обозначает соответствующую частную производную. Краевые условия (1.3) принимают вид

$$q = 0, \quad h = 0 \quad (\eta = 0),$$

$$q = \eta_{1t} + w\eta_{1z} \quad (\eta = \eta_1), \quad (1.6)$$

$$p_* = \delta^2(h^*)^2/(8\eta_1) + 1/(2\eta_1) + (H^*)^2/2 \quad (\eta = \eta_1),$$

$$h - H\eta_{1z} = 0 \quad (\eta = \eta_1);$$

$$h^* - H^*\eta_{1z} = 0 \quad (\eta = \eta_1), \quad h^* = 0 \quad (\eta = \eta_0), \quad (1.7)$$

где $\eta_1(t, z)$ и η_0 соответствуют $r_1(t, z)$ и r_0 .

При переходе в (1.4)–(1.7) к длинноволновому приближению слагаемые, пропорциональные δ^2 , опускаются. В этом случае система (1.5) с условиями (1.7) имеет решение $h^* = H_z^*(\eta_0 - \eta)$, $H^* = H^*(t, z) = \Phi/(\eta_0 - \eta_1)$, где $\Phi = \text{const}$ — безразмерный осевой поток магнитного поля между струей и стенками цилиндра. Тогда условие для p_* из (1.6) (с учетом $\delta^2 \rightarrow 0$) принимает вид

$$p_* = 1/(2\eta_1) + \Phi^2/[2(\eta_0 - \eta_1)^2]. \quad (1.8)$$

Для системы (1.4) длинноволновое представление не является окончательным, поскольку она может быть еще упрощена путем перехода (см. [4, 10]) к смешанным эйлерово-лагранжевым переменным t' , z' , ν , определяемым соотношениями

$$t = t', \quad z = z', \quad \eta = R(t', z', \nu), \quad \nu \in [0, 1].$$

При этом полагается, что функция R удовлетворяет уравнению и краевым условиям

$$q = R_{t'} + wR_{z'}, \quad R(t', z', 0) = 0, \quad R(t', z', 1) = \eta_1(t', z'). \quad (1.9)$$

Таким образом, переменную ν можно интерпретировать как номер соответствующей жидкой линии. Кроме того, из (1.9) следует, что краевые условия (1.6) (для функции q) выполняются автоматически. Отметим, что при такой замене переменных неизвестная свободная граница $\eta = \eta_1$ переходит в известную фиксированную границу $\nu = 1$.

В новых смешанных эйлерово-лагранжевых переменных (при пренебрежении слагаемыми с δ^2) уравнения (1.4) запишутся в виде

$$\begin{aligned} p_{*\nu} &= 0, \\ R_\nu(w_t + ww_z) &= -R_\nu p_{*z} + hH_\nu + R_\nu HH_z - HR_z H_\nu, \\ q_\nu + R_\nu w_z - R_z w_\nu &= 0, \\ a_t + wa_z &= 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$h = -a_z + (R_z/R_\nu)a_\nu, \quad H = a_\nu/R_\nu.$$

Здесь и ниже штрихи у переменных t' , z' опускаются.

Краевые условия (1.6) для магнитного поля в терминах функции a имеют вид $a_z = 0$ при $\nu = 0, 1$. Уравнения (1.10) дополняются следующими начальными условиями: $w(0, z, \nu) = w_0(z, \nu)$, $R(0, z, \nu) = R_0(z, \nu)$, где исходя из требования взаимной однозначности перехода к смешанным эйлерово-лагранжевым переменным $R_0(z, \nu)$ считается монотонно возрастающей функцией аргумента ν . В качестве начального условия для функции a примем следующее: $a(0, z, \nu) = a_0(\nu)$. Это условие выполняется в том случае, если в качестве жидких линий выбрать такие, которые при $t = 0$ совпадают с силовыми линиями магнитного поля (поскольку вдоль силовой линии $a = \text{const}$). Тогда, как следует из четвертого уравнения системы (1.10), функция $a(t, z, \nu) = a_0(\nu)$ будет ее решением, удовлетворяющим соответствующим краевым условиям. Таким образом, выбор функции $a(t, z, \nu) = a_0(\nu)$ ограничивает круг рассматриваемых задач лишь требованием достаточной гладкости начальных силовых линий. Ниже считается, что $a(t, z, \nu) = a_0(\nu)$.

С использованием первого уравнения системы (1.10) и краевого условия (1.8) определяется p_* . Заменяя p_{*z} полученным выражением для p_* , а q — представлением (1.9) и полагая $a = a_0(\nu)$, из (1.10) получим уравнения

$$\begin{aligned} w_t + ww_z &= \left(\frac{1}{2R_1^2} - \frac{\Phi^2}{(\eta_0 - R_1)^3} \right) R_{1z} - \frac{(a_0\nu)^2}{(R_\nu)^3} R_{\nu z}, \\ (R_\nu)_t + (wR_\nu)_z &= 0, \\ h &= R_z a_0\nu / R_\nu, \quad H = a_0\nu / R_\nu. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь R_1 — значение функции R при $\nu = 1$, причем согласно третьему соотношению в (1.9) $R_1(t, z) \equiv \eta_1(t, z)$.

2. Случай бессдвигового осевого течения и однородного продольного магнитного поля. Рассмотрим класс частных решений системы (1.11) вида $w = w(t, z)$, $R = \nu R_1(t, z)$, $a_0(\nu) = \nu b_0$ (b_0 — постоянная). Данный класс решений имеет следующую физическую интерпретацию. При $t < 0$ струя цилиндрической формы находится в однородном магнитном поле, по ее поверхности протекает ток J , течение в ней бессдвиговое. В момент времени $t = 0$ на струе создаются возмущения, при этом магнитное поле считается замороженным. Исследуем эволюцию этих возмущений.

Для указанного класса решений система (1.11) принимает вид

$$\begin{aligned} w_t + ww_z + \left(\frac{b_0^2}{R_1^3} + \frac{b_1^2(\eta_0 - 1)^2}{(\eta_0 - R_1)^3} - \frac{1}{2R_1^2} \right) R_{1z} &= 0, \\ R_{1t} + R_1 w_z + w R_{1z} &= 0, \\ h &= \nu b_0 R_{1z} / R_1, \quad H = b_0 / R_1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $b_1 = \Phi / (\eta_0 - 1)$. Отсюда и из определения b_0 следует, что b_0, b_1 — отношения невозмущенных продольных полей внутри и снаружи струи к характерному полю (т. е. к азимутальному полю на ее границе). Таким образом, данный класс решений описывается системой двух квазилинейных уравнений в частных производных. Исследуем ее тип. Для этого найдем характеристики на некотором решении (w, R_1) .

Отметим, что полученная система аналогична уравнениям газовой динамики, описывающим одномерные неустановившиеся изэнтропические движения газа с плоскими волнами [11]. При этом R_1 имеет смысл плотности, а выражение

$$c(R_1) = (b_0^2/R_1^2 + b_1^2(\eta_0 - 1)^2 R_1 / (\eta_0 - R_1)^3 - 1 / (2R_1))^{1/2}$$

имеет смысл скорости звука.

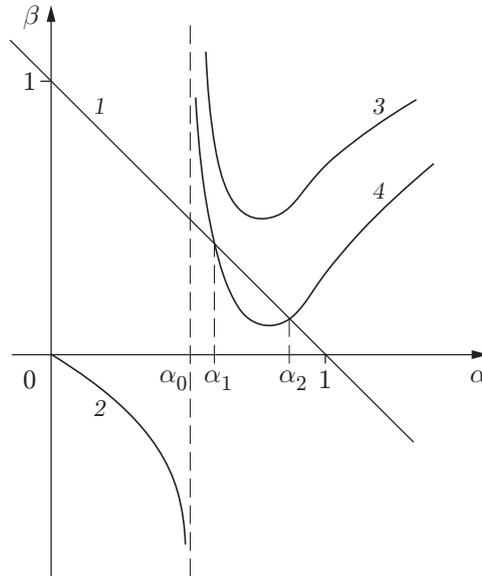


Рис. 1

Уравнение характеристик системы (2.1) имеет вид $dz/dt = w \pm c$. Отсюда следует, что при $c^2 > 0$ система гиперболическая, при $c^2 < 0$ — эллиптическая.

Определим области гиперболичности и эллиптичности системы, поскольку это принципиально важно для понимания характера решений. Ясное геометрическое представление об этих областях можно получить, если ввести величины α и β соотношениями

$$\alpha = R_1/\eta_0, \quad \beta = (\eta_0 - R_1)/\eta_0, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad 0 < \beta \leq 1.$$

Тогда равенство $c^2 = 0$ выполняется в точках пересечения двух кривых на плоскости (α, β) :

$$\beta = 1 - \alpha, \quad \beta = \frac{(2b_1^2(\eta_0 - 1)^2)^{1/3}\alpha}{\eta_0^{1/3}(\alpha - 2b_0^2/\eta_0)^{1/3}}, \tag{2.2}$$

находящихся в области определения величин α и β . Отсюда следует, что при $2b_0^2/\eta_0 > 1$ точки пересечения отсутствуют и система всегда гиперболическая. При $2b_0^2/\eta_0 = \alpha_0 < 1$ возможны два случая (рис. 1). На рис. 1 кривая 1 соответствует первому уравнению в (2.2), кривые 2, 3 и 2, 4 — второму. Система либо всегда гиперболическая (кривая 3), либо эллиптически-гиперболическая: при $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ она эллиптическая (кривая 4), вне этого отрезка — гиперболическая. Введя обозначения $R_{1*} = \alpha_1\eta_0$, $R_{2*} = \alpha_2\eta_0$, получим, что при $0 < R_1 < R_{1*}$, $R_1 > R_{2*}$ система гиперболическая, а при $R_{1*} < R_1 < R_{2*}$ — эллиптическая. Отметим, что условие гиперболичности на стационарном решении, соответствующем бесшумному течению в цилиндрической струе постоянного радиуса $R_1 = 1$, есть $b_0^2 + b_1^2/(\eta_0 - 1) - 1/2 > 0$, т. е. совпадает с необходимым и достаточным условием линейной устойчивости такого течения, полученным спектральным методом [1].

Существенным для аналитических исследований является то, что в области гиперболичности инварианты Римана, т. е. функции $s(w, R_1)$ и $l(w, R_1)$, остающиеся постоянными на характеристиках, находятся в явном виде:

$$s = w - \sigma(R_1), \quad l = w + \sigma(R_1), \quad \sigma(R_1) = \int_{R_1}^{R_*} \frac{c(\xi)}{\xi} d\xi. \tag{2.3}$$

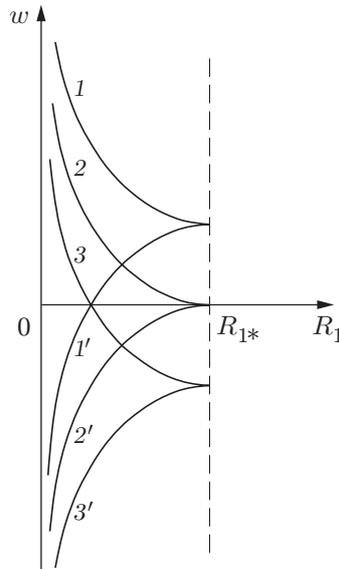


Рис. 2

Здесь R_* — некоторая постоянная из интервала $(0, \eta_0)$, если система гиперболическая, и $R_* = R_{1*}$, если система смешанного типа (во втором случае в области гиперболичности рассматривается только интервал $(0, R_{1*})$). При этом инварианты s и l сохраняются вдоль характеристик, описываемых уравнениями $dz/dt = w + c$ и $dz/dt = w - c$ соответственно (т. е. $s_t + (w + c)s_z = 0$, $l_t + (w - c)l_z = 0$). По аналогии с газовой динамикой, следуя [6], назовем плоскость переменных (w, R_1) плоскостью годографа. При исследовании гиперболических систем используется графическое представление характеристик на плоскости годографа. Рассмотрим случай, когда существует область эллиптичности. Поведение характеристик на плоскости годографа в полосе $0 < R_1 < R_{1*}$ показано на рис. 2. Кривые 1–3 соответствуют линии $s = \text{const}$, а кривые 1'–3' — линии $l = \text{const}$ при различных значениях констант. При переходе через линию $R_1 = R_{1*}$ (переходную линию) меняется тип системы. Отметим, что в отличие от [6], где на переходных линиях характеристики имели как касания второго порядка, так и точки возврата, на переходной линии $R_1 = R_{1*}$ имеются только точки возврата. Поведение характеристик вблизи переходной линии важно для изучения вопроса о возможности выхода решения из области гиперболичности в процессе эволюции [12].

Рассмотрим случай $\eta_0 \gg 1$, когда радиус внешнего цилиндра много больше радиуса струи. Переходя к пределу $\eta_0 \rightarrow \infty$, получим

$$c = [b_0^2/R_1^2 - 1/(2R_1)]^{1/2}. \quad (2.4)$$

Отсюда следует, что в данном случае система является системой смешанного типа: она гиперболична в полосе $0 < R_1 < 2b_0^2$ и эллиптична в области $R_1 > 2b_0^2$.

3. Столкновение замагниченных струй. Применим теорию, изложенную в п. 2, к решению конкретной задачи. Сначала выполним математическое исследование, затем обсудим возможность физического приложения. Для упрощения аналитических выкладок рассмотрим случай $\eta_0 \gg 1$, т. е. зависимость $c(R_1)$ возьмем в виде (2.4). При таком упрощении сохраняются основные особенности исследуемых уравнений.

В момент времени $t = 0$ на первоначально неподвижной цилиндрической струе, радиус которой равен единице, задано следующее возмущение: жидкость, расположенная в области $z < 0$, приобретает скорость w_1 , а жидкость, расположенная в области $z > 0$, — скорость w_2 , причем $w_1 > w_2$. Считаем, что начальные условия принадлежат области

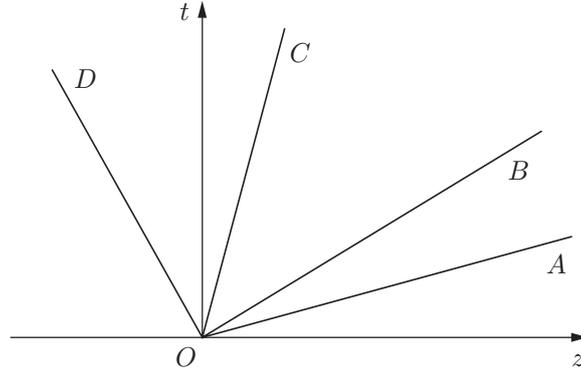


Рис. 3

гиперболичности, т. е. выполнено неравенство $2b_0^2 > 1$. Определим, при каких значениях w_1, w_2 в последующие моменты времени ($t > 0$) возможно непрерывное движение, и найдем его.

Будем искать решение в виде комбинации простых центрированных волн и движений с постоянной скоростью. В силу отмеченной выше аналогии между уравнениями (2.1) и уравнениями газовой динамики свойства простых волн также аналогичны. Назовем l - и s -волнами простые волны, в которых постоянны инварианты l, s (тогда характеристики, вдоль которых постоянны инварианты s, l , будут прямолинейными). Определим, как меняется тангенс угла наклона характеристик в плоскости (z, t) в l - и s -волнах при изменении радиуса струи R_1 . Рассмотрим l -волну. Положим $k_1 = w + c, l = l_0 = w + \sigma(R_1)$. Отсюда $k_1 = l_0 + c(R_1) - \sigma(R_1)$. Дифференцируя k_1 по R_1 и учитывая выражения (2.3), (2.4) для σ и c , получим

$$\frac{dk_1}{dR_1} = \frac{dc}{dR_1} + \frac{c}{R_1} = -\frac{2^{1/2}}{4(2b_0^2 - R_1)^{1/2}} < 0. \quad (3.1)$$

Для s -волны положим $k_2 = w - c, s = s_0 = w - \sigma(R_1)$. Отсюда

$$\frac{dk_2}{dR_1} = -\frac{dk_1}{dR_1} > 0. \quad (3.2)$$

Картина течения в плоскости (z, t) с учетом (3.1), (3.2) представлена на рис. 3. В секторах AOB и COD расположены l - и s -волны с $l_0 = w_2 + \sigma(1)$ и $s_0 = w_1 - \sigma(1)$ соответственно. Вдоль луча OA ($z = [w_2 + c(1)]t$) l -волна примыкает к области течения с постоянными w и R_1 : $w = w_2, R_1 = 1$. Вдоль лучей OB и OC l - и s -волны также примыкают к области течения с постоянными w и R_1 : $w = w_3, R_1 = R_{13}$. Уравнение луча OB $z = [w_3 + c(R_{13})]t$, уравнение луча OC $z = [w_3 - c(R_{13})]t$. Вдоль луча OD ($z = [w_1 - c(1)]t$) s -волна примыкает к области течения с постоянными w и R_1 : $w = w_1, R_1 = 1$. В силу того что область гиперболичности расположена левее прямой $R_1 = R_{1*}$ (в рассматриваемом случае $R_{1*} = 2b_0^2$), движение, соответствующее рис. 3, возможно не для всех значений w_1 и w_2 . Поскольку l - и s -волны примыкают к одной и той же области течения с $w = w_3, R_1 = R_{13}$, на плоскости годографа (см. рис. 2) графики l_0 - и s_0 -волн должны пересечься в точке (w_3, R_{13}) . Очевидно, это возможно только при $l_0 > s_0$. Подставляя выражения для l_0 и s_0 , получим, что указанное движение может реализоваться лишь в случае

$$w_1 - w_2 \leq 2\sigma(1) = 2 \int_1^{2b_0^2} \frac{c(\xi)}{\xi} d\xi,$$

т. е. если разность скоростей не очень велика. При $w_1 - w_2 = 2\sigma(1)$ постоянное решение (w_3, R_{13}) попадает на границу раздела областей гиперболичности и эллиптичности. Определим значения w_3 и R_{13} . Для l_0 - и s_0 -волн имеем $l_0 = w_3 + \sigma(R_{13})$, $s_0 = w_3 - \sigma(R_{13})$. Подставляя в эти равенства выражения для l_0 и s_0 , получим

$$w_3 = (w_1 + w_2)/2, \quad \sigma(R_{13}) = \sigma(1) - (w_1 - w_2)/2.$$

Последнее соотношение служит для нахождения R_{13} . Из неравенств (3.1), (3.2) следует, что $R_{13} > 1$. Таким образом, в каждую из областей с постоянными скоростями и радиусами $(w_1, 1)$ и $(w_2, 1)$ распространяются утолщения с относительными скоростями $c(1)$ и $-c(1)$ соответственно.

Полученные результаты обобщаются на случай, когда жидкость при $z < 0$ и $z > 0$ имеет разные плотности: ρ_1 и ρ_2 . Если в качестве обезразмеривающей плотности взять ρ_2 , то в уравнениях для жидкости с плотностью ρ_1 при конвективных членах появится множитель ρ_1/ρ_2 . Тогда “скорость звука” c и функция σ для этой жидкости при одинаковых значениях R_1 будут в $(\rho_1/\rho_2)^{1/2}$ раз меньше соответствующих значений для жидкости с плотностью ρ_2 . В результате w_3 и R_{13} находятся из соотношений

$$w_3 = \frac{w_1(\rho_1/\rho_2)^{1/2} + w_2}{1 + (\rho_1/\rho_2)^{1/2}}, \quad \sigma(R_{13}) = \sigma(1) - \frac{(w_1 - w_2)(\rho_1/\rho_2)^{1/2}}{1 + (\rho_1/\rho_2)^{1/2}}.$$

Из последнего равенства следует, что решение возможно, если

$$w_1 - w_2 \leq \sigma(1)[1 + (\rho_1/\rho_2)^{1/2}]/(\rho_1/\rho_2)^{1/2}.$$

Кроме того, между лучами OB и OC появится луч $z = w_3 t$, соответствующий контактному разрыву между жидкостями с плотностями ρ_1 и ρ_2 .

Данное решение может быть использовано при анализе столкновения замагниченных струй. Оно описывает распространение возмущений по струям, дает критическое значение разности скоростей, до которого существует непрерывное автомодельное решение. Если разность превысит это значение, то, возможно, возникнут новые эффекты, например, произойдет разрушение струй.

Заключение. Таким образом, в работе построена модель, описывающая нелинейную эволюцию длинноволновых осесимметричных возмущений на жидкой проводящей струе с поверхностным электрическим током, расположенной вдоль оси проводящего твердого цилиндра в продольном магнитном поле. Показаны возможности использования модели для аналитических исследований. Особенностью модельной системы уравнений является то, что в случае, когда продольное поле однородное, а осевое течение бессдвиговое, она может быть либо гиперболической, либо эллиптически-гиперболической. Существенно, что в области гиперболичности инварианты Римана вычисляются в явном виде, что важно для аналитических исследований. Возможность перехода решения из гиперболической области в эллиптическую может означать, например, то, что устойчивость некоторого стационарного решения по линейному приближению (что соответствует гиперболичности системы на данном решении) не гарантирует того, что неустойчивость не появится на нелинейной стадии развития возмущений (когда система перейдет в область эллиптичности). Возможно, это является одной из причин того, что проводники в продольном магнитном поле при протекании по ним электрического тока разрушаются даже в том случае, когда величина продольного поля намного превышает порог линейной устойчивости [13]. Решена задача о распаде разрыва скорости на струе. Полагается, что данное решение может быть использовано при анализе столкновения замагниченных струй.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Chandrasekhar S.** Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961.
2. **Gupta A. S.** On the capillary instability of a jet carrying an axial current with or without a longitudinal magnetic field // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1964. V. 278, N 1373. P. 214–227.
3. **Гельфгат Ю. М., Олышанский С. В., Явнайст Г. А.** Исследование разрушения жидкометаллической струи под действием осевого тока // Магнит. гидродинамика. 1973. № 2. С. 49–54.
4. **Губарев Ю. Г., Никулин В. В.** Линейная длинноволновая неустойчивость одного класса стационарных струйных течений идеальной жидкости в поле собственного электрического тока // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2001. № 2. С. 64–75.
5. **Стокер Дж. Дж.** Волны на воде: Математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
6. **Овсянников Л. В.** Модели двухслойной “мелкой воды” // ПМТФ. 1979. № 2. С. 3–14.
7. **Овсянников Л. В.** К обоснованию теории мелкой воды // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1973. Вып. 15. С. 104–125.
8. **Овсянников Л. В.** Обоснование теории мелкой воды // Тр. Всесоюз. конф. по уравнениям с частными производными, посвящ. 75-летию со дня рождения акад. И. Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. С. 185–188.
9. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
10. **Захаров В. Е.** Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 15–24.
11. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
12. **Ляпидевский В. Ю.** Задача о распаде разрыва для уравнений двухслойной “мелкой воды” // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1981. Вып. 50. С. 85–97.
13. **Адамьян Ю. Э., Березкин А. Н., Василевский В. М. и др.** О влиянии аксиального сверхсильного магнитного поля на процесс расширения и нагрева плазмы при электрическом взрыве проволоочки // Мегагауссная и мегаамперная импульсная технология и применения: Тр. VII Междунар. конф. по генерации мегагауссных магнитных полей и родственными экспериментам, Саров, 5–10 авг. 1996 г. Саров: Изд-во Всерос. науч.-исслед. ин-та эксперим. физики, 1997. Т. 2. С. 752–763.

Поступила в редакцию 18/X 2002 г.
