

ОБТЕКАНИЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ В УСЛОВИЯХ МОЛЕКУЛЯРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В. А. Перепухов (Москва)

При исследовании круглой пластины, расположенной под нулевым углом атаки к потоку сильно разреженного газа, имеют место различные типы течений, реализация которых зависит от соотношения между числом Маха M_∞ и числом Кнудсена K_∞ в набегающем потоке.

В работе [1] приведен анализ различных типов течений, которые наблюдаются при обтекании тел в рамках теории первых межмолекулярных столкновений, там же было впервые указано на возможность существования молекулярного пограничного слоя.

В работе [2] исследовалась эта задача при условии, что числа Кнудсена и Маха $K_\infty \gg M_\infty \gg 1$. Ниже предлагается решение аналогичной задачи при условии, что $K_\infty^2 \gg M_\infty \gg K_\infty \gg 1$; приводится численный расчет при $M_\infty = 30$, $K_\infty = 12$.

Будем предполагать макроскопическую скорость потока U много большей тепловой скорости молекул в набегающем потоке и много большей скорости отраженных молекул.

Отражение молекул от поверхности считаем диффузным с максвелловской функцией распределения скоростей

$$f_0 = n_0 \left(\frac{h_0}{\pi} \right)^{3/2} e^{-h_0 v^2}$$

и коэффициентом аккомодации $a \sim 1$.

Молекулы моделируем твердыми шариками диаметром σ . Для того чтобы оценить вероятность столкновения различных типов молекул (отраженных и падающих) одна с другой, введем средние длины пробегов молекул (индексом 1 будем обозначать молекулы набегающего потока, индексом 2 — молекулы отраженного потока):

средняя длина пробега набегающих молекул при столкновении одной с другой

$$\lambda_{11} \sim M_\infty \lambda_0 \quad \left(\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n_\infty}, M_\infty = \frac{U}{\sqrt{2KT_\infty}} \right)$$

средняя длина пробега отраженных молекул при столкновении их с молекулами набегающего потока $\lambda_{21} \sim \lambda_0 / M_\infty$;

средняя длина пробега набегающих молекул при столкновении их с отраженными молекулами $\lambda_{12} \sim \lambda_0$;

средняя длина пробега отраженных молекул при столкновении их с отраженными молекулами $\lambda_{22} \sim \lambda_0$.

Из этих четырех длин наименьшей является λ_{21} , это приводит к тому, что отраженные молекулы будут почти полностью рассеиваться на молекулах набегающего потока на малом расстоянии от поверхности пластины. В момент столкновения отраженной молекулы с набегающей можно считать, что отраженная молекула покоится; после столкновения часть молекул прилетит назад на пластину, часть же улетит в поток, но молекулы, испытавшие столкновения, будут обладать уже не тепловой скоростью, а в среднем, скоростью порядка U . Следовательно, теперь на пластину приходит почти такое же количество молекул без столкновений и часть молекул, претерпевших столкновения, это приводит к тому, что количество молекул, попадающих на пластину и отраженных от нее, увеличивается до тех пор, пока приток молекул из бесконечности, не испытавших столкновений, будет равен части потока отраженных молекул, утекающих через концы пластины.

При этом можно показать, что средняя длина пробега молекул, испытавших столкновения, на молекулах другого сорта и, наоборот, молекул любого сорта на молекулах, испытавших столкновения, будет больше или порядка λ_0 .

Это означает, что данная задача может быть решена в рамках теории первых столкновений. Строго говоря, этот процесс справедлив при следующих соотношениях между M_∞ и K_∞ :

$$K_\infty^2 \gg M_\infty \gg K_\infty \gg 1 \quad (K_\infty = 1/2 \lambda_0 / a = (2^{3/2} \pi \sigma^2 a n_\infty)^{-1})$$

Но это условие можно ослабить, требуя

$$K_\infty^2 > M_\infty \geq K_\infty \geq 1$$

Ниже приводится пример расчета таких течений при $M_\infty = 30$, $K_\infty = 12$.

В результате столкновения молекулы, обладающей скоростью U , с неподвижной отраженной молекулой (если направление линии центров в момент столкновения ограничено телесным углом $d\Omega$), скорости молекул после столкновения будут лежать в интервалах

$$V_1, \quad V_1 + dV_1, \quad V_2, \quad V_2 + dV_2$$

где соответственно индексами 1 и 2 обозначены скорость налетающей и отраженной молекул после столкновения.

Уравнение Больцмана запишем в виде

$$(\partial f / \partial t) V dV = 2n_{\infty} n(\mathbf{r}) \sigma^2 U \cos \theta d\Omega \quad (1)$$

Здесь θ — угол между направлением линии центров и направлением скорости U в момент соударения, $n(\mathbf{r})$ — плотность отраженных молекул, n_{∞} — плотность набегающего потока, f — функция распределения молекул, испытавших столкновение в газе, V — скорость молекул после столкновения в направлении l .

Теперь необходимо найти связь между величиной разброса скоростей dV_{12} и телесным углом $d\Omega$. Пусть молекулы сталкиваются так, что линия центров находится в телесном угле с $d\Omega$.

Тогда из несложных геометрических соображений находим, что

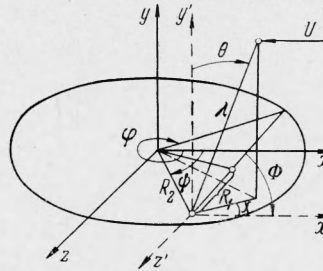
$$dV_{12} = U^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\chi \quad (2)$$

Запишем закон сохранения числа частиц N для произвольного элемента пластины dS_i .

$$n_{\infty} \left(\frac{RT_{\infty}}{2\pi} \right)^{3/2} + N_i = n_{0i} \left(\frac{RT_w}{2\pi} \right)^{3/2} \quad (3)$$

Здесь T_{∞} и T_w — температуры потока на бесконечности и температура стенки соответственно, и по-прежнему предполагается, что отражение происходит с максвелловской функцией распределения по скоростям

$$f_0 = n_{0i} \left(\frac{h_0}{\pi} \right)^{3/2} e^{-h_0 v^2}, \quad N_i = \iiint_V V_i dV \quad (4)$$



Фиг. 1

Для того чтобы в процессе решения интегрального уравнения (3) можно было вычислить многократный интеграл N_i методом Монте-Карло, необходимо перейти к системе координат такой, в которой подынтегральная функция удовлетворяла бы условиям Липшица. В связи с этим были введены следующие переменные R_1, Φ (см. фиг. 1).

Интеграл (4) в новых переменных примет вид

$$N_i = 2 \left(\frac{\kappa}{2\pi} \right)^{3/2} a n_{\infty} \sigma^2 U \int_0^{\infty} dL \int_0^{1/2\pi} d\theta \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} d\chi \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^g dR_1 \int_0^{\infty} A^{-3/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos \chi L V^2 R_1 n_{0i}(R, \Phi) \times \exp(-1/2 \kappa V^2) \exp\left(-\frac{Re_{\infty} \sqrt{A}}{2 \sqrt{2} V}\right) dV \quad (5)$$

Здесь a — радиус пластины

$$A = L^2 + R_1^2 - 2LR_1 \sin \theta \cos(\Phi - \chi), \quad g = \sqrt{1 + R_2^2 - 2R_2 \cos(\Phi - \Psi)}$$

$$V = \frac{v}{\sqrt{\kappa RT_{\infty}}}, \quad L = \frac{l}{a}, \quad R_1 = \frac{r_1}{a}, \quad R_2 = \frac{r_2}{a}, \quad N_{Re\infty} = \frac{M_{\infty}}{K_{\infty}}$$

$$\sin \Phi = \frac{\sin \varphi - R_2 \sin \psi}{\sqrt{1 + R_2^2 - 2R_2 \cos(\varphi - \psi)}}, \quad \cos \Phi = \frac{\cos \varphi - R_2 \cos \psi}{\sqrt{1 + R_2^2 - 2R_2 \cos(\varphi - \psi)}}$$

$$d\Phi = \frac{1 - R_2 \cos(\varphi - \psi)}{1 + R_2^2 - 2R_2 \cos(\varphi - \psi)} d\varphi, \quad R_1 = R_* \sqrt{1 + R_2^2 - 2R_2 \cos(\varphi - \psi)}$$

Введем обозначения

$$1 + R_2^2 - 2R_2 \cos(\varphi - \psi) = a_0^2, \quad \Theta = \sqrt{a_0^2 - b_0^2 \sin^2 \theta}$$

$$[\cos(\varphi - \chi) - R_2 \cos(\psi - \chi)] = b_0^2$$

введем новую переменную

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{L - R_* \sin \theta b_0}{R_* \Theta}, \quad dL = \frac{R_*}{\cos^2 \xi} \Theta d\xi$$

Тогда интеграл в новых обозначениях запишется так:

$$N_i = 2 \left(\frac{\kappa}{2\pi} \right)^{3/2} U a n_{\infty} \sigma^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dV \int_0^1 dR_* \int_0^{1/2\pi} d\xi \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} d\chi \int_0^{1/2\pi} n(R_*\varphi) \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos \chi V^2}{\Theta^2} \times \\ \times \{ [1 - R_2 \cos(\varphi - \psi)] \exp\left(-\frac{\kappa}{2} V^2\right) \left\{ \cos \xi [\operatorname{tg} \xi \times \Theta + b_0 \sin \theta] \exp\left(-\frac{N_{\operatorname{Re}\infty}}{2} \frac{R_*}{\sqrt{2}} \frac{R_*}{V \cos \xi} \Theta\right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b_0 \sin \theta}{\Theta} \exp\left(-\frac{\operatorname{Re}\infty}{2} \frac{R_*}{\sqrt{2}} \frac{R_*}{V} \Theta \sec \left[\frac{2}{\pi} \xi \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{b_0 \sin \theta}{\Theta} \right) \right] \right) \times \right. \\ \left. \left. \times \cos \left(\frac{2}{\pi} \xi \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b_0 \sin \theta}{\Theta} \right) \left[b_0 \sin \theta - \Theta \operatorname{tg} \left(2 \frac{\xi}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b_0 \sin \theta}{\Theta} \right) \right] \right\} d\theta \right.$$

При решении интегрального уравнения для плотности отраженных молекул (3) на поверхности $n_{oi}(R, \psi)$ использовался метод последовательных приближений, причем за нулевое приближение было выбрано

$$n_{oi} = N_{\operatorname{Re}\infty} n_{\infty} = \frac{M_{\infty}}{K_{\infty}} n_{\infty} = 2.5 n_{\infty}.$$

С учетом столкновения выражения для импульсов вдоль осей x и y и потока энергии примут вид

$$P_x = P_{x\infty} + P_{x+}, \quad P_y = P_{y\infty} = P_{y+}$$

$$P_{x+} = 2m(h_0/\pi)^{3/2} n_{\infty} \sigma^2 U^2 I [n_0(r_2, \varphi) \cos^3 \theta \sin^3 \theta \cos^2 \chi]$$

$$P_{y+} = 2m(h_0/\pi)^{3/2} n_{\infty} \sigma^2 U^2 I [n_0(r_2, \varphi) \cos^2 \theta \sin^4 \theta \cos^3 \chi]$$

$$E = E_{\infty} + E_+, \quad E_+ = 1/2 U P_{x+}$$

где индексом ∞ обозначены соответствующие потоки молекулярных признаков, имеющие место при свободномолекулярном обтекании, а индексом $+$ обозначены соответствующие потоки молекулярных признаков, обусловленные столкновениями, I — интеграл, аналогичный (6), в котором вместо $n_0(r_2, \varphi) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos \chi$ стоит выражение, указанное в квадратных скобках. Результаты расчетов с ошибкой 10% распределения давления по пластине и падающей энергии приведены на фиг. 2, 3, где

$$P_{x+}^* = \frac{P_{x+}}{0.00291} = \frac{2E_+}{0.00291}, \quad P_{y+}^* = \frac{P_{y+}}{0.00291}$$

Для аэродинамических коэффициентов C_x и C_y получены следующие формулы с ошибкой 4%:

$$C_x = \frac{2}{\sqrt{2\pi\kappa} M_{\infty}} + 0.145 \frac{1}{K_{\infty}}, \quad \frac{C_x}{C_x^*} = 1.537$$

$$C_y = \frac{2}{2\pi\kappa M_{\infty}^2} + 0.0912 \frac{1}{K_{\infty}}, \quad \frac{C_y}{C_y^*} = 31.1$$

Здесь величины со звездочками равны соответствующим значениям аэродинамических коэффициентов в свободномолекулярном потоке.

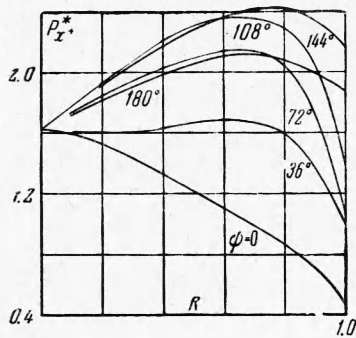
Расчеты подтвердили предположение [1], о том, что при обтекании плоской пластины в условиях молекулярного пограничного слоя силы, действующие на нее, могут быть во много раз больше сил, действующих в свободномолекулярном потоке.

Автор благодарит М. Н. Когана за обсуждение результатов и интерес к работе.

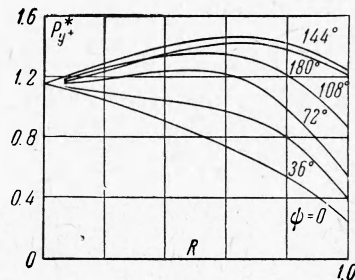
Поступила 29.VII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. О гиперзвуковых течениях разреженного газа. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3, стр. 520.
2. Перепухов В. А. Обтекание плоской пластины, расположенной под нулевым углом атаки, потоком сильно разреженного газа. Вычисл. матем. и матем. физика, 1963, т. 3, № 3, стр. 581.



Фиг. 2



Фиг. 3