

КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ РЕАГИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ, ТЕРЯЮЩЕЙ ТЕКУЧЕСТЬ ПРИ ГЛУБОКИХ СТЕПЕНЯХ ПРЕВРАЩЕНИЯ

Д. А. Ваганов
(Черноголовка)

Из-за различий скоростей движения в потоке реагирующей жидкости глубина превращения у стенок может существенно превышать среднее по сечению значение, и если при глубоких степенях превращения реагирующая жидкость теряет текучесть, то на стенках происходит непрерывное нарастание застывшего слоя продуктов реакции. Так, в случае полимеризации при высоких концентрациях мономера (или в массе) наблюдается зарастание каналов реакторов и трубопроводов полимером. Это явление хорошо известно технологам, но теоретические исследования динамики процесса не проводились. В данной работе динамика процесса будет рассмотрена при следующих предположениях: температура реагирующей жидкости сохраняется постоянной, жидкость является ньютоновской, течение ламинарное, развитие процесса происходит квазистационарно. Получены соотношения, позволяющие прогнозировать темп роста неподвижного слоя продуктов реакции. Помимо гидродинамических характеристик, скорость нарастания зависит еще лишь от одного параметра, который определяется характером изменения вязкости во времени и находится из решения автономной краевой задачи.

1. Рассматривается изотермическое течение реагирующей ньютоновской жидкости, теряющей текучесть при глубоких степенях превращения. Жидкость предполагается достаточно вязкой, а изменение радиуса потока по длине трубы (проточного трубчатого реактора) — достаточно плавным, чтобы в каждом отдельном сечении течение жидкости можно было практически считать плоскопараллельным — приближение, широко используемое при теоретических исследованиях различных вопросов, касающихся течения жидкости с меняющимися свойствами (см., например, [1—3]); для нахождения скорости течения в этом приближении из общих уравнений движения ньютоновской жидкости [4] следует

$$(1.1) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad 0 \leq r \leq R(z, t), \quad 0 < z \leq L,$$

где v — осевая составляющая скорости течения; μ — вязкость жидкости; r — расстояние от оси трубы; $p = p(z, t)$ — разность между давлением на входе в трубу и давлением в данном сечении; z — расстояние от начала трубы; R — радиус потока (внутренний радиус неподвижного слоя продуктов реакции); L — длина трубы; t — время. Плотность жидкости ρ будем считать постоянной, и радиальная составляющая скорости w находится из уравнения неразрывности

$$(1.2) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rw) + \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Ввиду малости коэффициентов диффузии в жидкостях влиянием диффузии на протекание реакции в потоке можно пренебречь. В связи с этим в любой точке потока реагирующей изотермической жидкости глубина превращения и механические свойства жидкости зависят лишь от времени, в течение которого данный элемент жидкости уже находится в потоке (проточном реакторе). Движение жидкости не оказывает влияния на эти зависимости, и они могут считаться заданными.

Потеря текучести формально означает, что по истечении некоторого периода времени t_0 , определяемого скоростью химических превращений, вязкость жидкости становится «бесконечной». В соответствии с этим зависимость вязкости от времени примем заданной в виде

$$(1.3) \quad \mu_0 / \mu = f(\theta),$$

где μ_0 — значение вязкости, соответствующее исходной жидкости; θ — безразмерное время, прошедшее с момента попадания элемента жидкости

в реактор. С ростом ϕ функция $f(\phi)$ уменьшается от значения $f = 1$ при $\phi = 0$ до нуля, $f(\phi) = 0$ при $\phi > 1$. При $\phi < 1$ $f(\phi) > 0$.

Скорость роста неподвижного слоя продуктов реакции определяется условием, что время, за которое элементы жидкости достигают поверхности этого слоя, равно t_0 . Тем самым распределение $\phi = \hat{\phi}(t, z, r)$ должно быть таким, чтобы на краях потока выполнялось условие $\phi = 1$. В начале трубы (реактора) $\phi = 0$, а затем по мере смещения вниз по потоку значение ϕ возрастает. Для фиксированного элемента жидкости приращение ϕ связано с перемещением и скоростью его движения по потоку соотношением $d\phi = \dot{dz}/vt_0$.

По сравнению со средним временем пребывания жидкости в реакторе период t_0 предполагается достаточно большим, чтобы изменение свойств жидкости затрагивало лишь узкий слой, движущийся у краев потока, и заметные изменения радиуса потока происходили лишь за времена, значительно превышающие t_0 . Характеристики течения и скорости их изменения во времени в этом случае будут полностью определяться текущим распределением радиуса потока по длине трубы, и поэтому данное приближение вполне уместно назвать квазистационарным.

Указанное приближение означает, что

$$(1.4) \quad U/Qt_0 \ll 1,$$

где Q — объемный расход жидкости; U — объем канала, свободный от неподвижного слоя продуктов реакции:

$$(1.5) \quad U(z, t) = \int_0^z \pi R^2(\zeta, t) d\zeta.$$

Условие (1.4) во всяком случае выполняется вблизи начала трубы. А так как с ростом неподвижного слоя продуктов реакции свободный объем канала U уменьшается, то, даже если поначалу условие (1.4) для части трубы не выполняется, со временем при том же самом расходе жидкости по всей длине трубы будет достигнута требуемая степень малости величины U/Qt_0 . Влияние предшествующего неквазистационарного этапа могло бы быть учтено заданием соответствующего распределения радиуса потока.

С математической точки зрения рассматриваемое квазистационарное приближение соответствует главному члену асимптотики при $U/Qt_0 \rightarrow 0$.

2. Рассмотрим сначала модельный пример, в котором вплоть до истечения периода t_0 вязкость жидкости оставалась бы неизменной, $f(\phi) = 1$ при всех $\phi < 1$. Решение задачи в этом случае существенно упрощается, так как отпадает необходимость в рассмотрении гидродинамической части — для скорости течения в каждом отдельном сечении имеет место параболический Пуазейлевский профиль

$$(2.1) \quad v = (2Q/\pi R^2)(1 - r^2/R^2), \quad 0 \leq r \leq R(z, t).$$

Обозначим через $q = q(t, z, r)$ количество жидкости, пересекающей в данный момент времени сечение $z = \text{const}$ на расстояниях от оси, больших данного значения r .

$$(2.2) \quad q = \int_r^R v 2\pi r dr,$$

и проследим за значением q , соответствующим фиксированному элементу жидкости. Поскольку из (2.2) с учетом (1.2) следует

$$(2.3) \quad \partial q / \partial r = -2\pi r v, \quad \partial q / \partial z = 2\pi r w,$$

для изменения значения q , соответствующего фиксированному элементу, имеем

$$(2.4) \quad dq/dt \equiv \partial q / \partial t + v \partial q / \partial z + w \partial q / \partial r = \partial q / \partial t.$$

Подстановка (2.1) в (2.2) показывает, что в данном случае

$$(2.5) \quad q = Q(1 - r^2/R^2)^2,$$

откуда с учетом (2.1) следует

$$(2.6) \quad \partial q/\partial t = v\pi(\partial R^2/\partial t)r^2/R^2,$$

а так как в рамках квазистационарного приближения достаточно ограничиться рассмотрением элементов жидкости, движущихся у краев потока, то в (2.6) можно положить $r^2/R^2 \simeq 1$. В результате, подставляя (2.6) в (2.4) и интегрируя вдоль траектории движения, имеем

$$(2.7) \quad q = q_0 + \int_0^z \pi \frac{\partial R^2}{\partial t} \bar{a}z,$$

где q_0 — соответствующее данному элементу жидкости значение величины q на входе в трубу, а значения $\partial R^2(z, t)/\partial t$ при вычислении интеграла берутся для тех моментов времени, в которые рассматриваемый элемент жидкости пересекает данное сечение. Но, согласно сделанным допущениям, изменениями величин, происходящими за промежутки времени порядка t_0 , можно пренебречь. Поэтому в (2.7) все величины можно считать относящимися к одному и тому же моменту времени, и, меняя последовательность операций интегрирования и дифференцирования, соотношение (2.7) с учетом (1.5) можно представить в виде

$$(2.8) \quad q = q_0 + U'_t(z, t).$$

Соотношение (2.8) позволяет уже связать параметры траектории отдельного элемента жидкости со скоростью роста неподвижного слоя продуктов реакции. Так, если рассматриваемый элемент жидкости достигает поверхности неподвижного слоя продуктов на расстоянии z_0 от начала трубы, то, определяя соответствующее этому элементу значение q_0 из условия, что на поверхности неподвижного слоя $q = 0$, из (2.8) для траектории его движения получаем

$$(2.9) \quad q = U'_t(z, t) - U'_t(z_0, t).$$

Скорость движения определяется вытекающим из (2.1), (2.2) соотношением $v = 2\sqrt{qQ}/\pi R^2$, и для вычисления значения безразмерного времени $\phi(z, z_0)$, за которое рассматриваемый элемент жидкости достигает данное сечение, с учетом (1.5) имеем

$$(2.10) \quad d\phi \equiv \frac{dz}{vt_0} = \frac{1}{2t_0 \sqrt{Q}} \frac{U'_z(z, t) dz}{\sqrt{U'_t(z, t) - U'_t(z_0, t)}}.$$

При $z = z_0$ должно выполняться условие $\phi = 1$, и так как рассматриваемый элемент жидкости, а тем самым и значение z_0 выбраны произвольно, то из (2.10) очевидным образом вытекает интегральное уравнение для нахождения $\partial U/\partial t$, т. е. скорости роста неподвижного слоя продуктов реакции. Непосредственной подстановкой проверяется, что решение этого уравнения есть

$$(2.11) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\pi^2 U^2}{16 Q t_0^2}.$$

В самом деле, подставляя (2.11) в (2.10) и интегрируя, для изменения значения ϕ вдоль траектории движения элемента, достигающего при $z = z_0$ поверхности неподвижного слоя продуктов реакции, находим

$$(2.12) \quad \phi(z, z_0) = (2/\pi) \arcsin(U/U_0), \quad U_0 \equiv U(z_0, t),$$

откуда при $z = z_0$ ($U = U_0$) действительно следует $\phi = 1$. Исключая из

(2.12) с помощью (2.11), (2.9) значение U_0 , для распределения значений ϑ в итоге получим

$$(2.13) \quad \vartheta = \frac{2}{\pi} \arcsin \left[\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{\pi^2}{16} + \frac{q}{Q} \left(\frac{Qt_0}{U} \right)^2} \right].$$

Таким образом, значение ϑ зависит лишь от одного единственного комплекса переменных. Отметим также, что, применяя соотношения (2.11), (2.13), можно проверить справедливость при $U/Qt_0 \rightarrow 0$ использованных в проведенных выкладках соображений о порядке малости различных величин.

3. Перейдем теперь к рассмотрению общего случая произвольной зависимости (1.3) вязкости жидкости от времени нахождения в реакторе. При этом в соответствии с полученным выше решением модельной задачи распределение времени пребывания элементов жидкости в потоке будем искать в виде функции автомодельной переменной

$$(3.1) \quad X = (q/Q)(Qt_0/U)^2,$$

а для скорости нарастания неподвижного слоя продуктов реакции по аналогии с (2.11) предположим наличие соотношения

$$(3.2) \quad \partial U / \partial t = -a^2 (U/t_0) U / Qt_0,$$

где постоянная a подлежит определению в ходе решения задачи; при дифференцировании (3.2) по z с учетом (1.5) для скорости изменения во времени радиуса канала R вытекает

$$(3.3) \quad \partial R^2 / \partial t = -2a^2 (R^2/t_0) U / Qt_0.$$

Искомое автомодельное уравнение является следствием очевидного тождества $t_0 d\vartheta/dt = 1$, которое в данном случае принимает вид

$$(3.4) \quad t_0 (d\vartheta/dX) dX/dt = 1,$$

а значение a должно быть таким, чтобы существовало удовлетворяющее граничным условиям

$$(3.5) \quad \vartheta = 1 \text{ при } X = 0, \quad \vartheta \rightarrow 0 \text{ при } X \rightarrow \infty$$

решение $\vartheta = \vartheta(X)$ уравнения, вытекающего из (3.4) при подстановке в него выражения для dX/dt (подразумевается, естественно, что при $U/Qt_0 \rightarrow 0$ субстанциальная производная dX/dt будет функцией лишь переменной X).

Поскольку из (3.1) с учетом (2.4), (1.5) следует

$$(3.6) \quad \frac{dX}{dt} \equiv \frac{\partial X}{\partial t} + v \frac{\partial X}{\partial z} + w \frac{\partial X}{\partial r} = \frac{\partial X}{\partial t} - 2v \frac{\pi R^2}{U} X,$$

то вычисление субстанциальной производной dx/dt сводится к нахождению выражений для $\partial X/\partial t$ и v . Основой для определения скорости течения v служит вытекающее из (1.1) уравнение

$$(3.7) \quad \mu \partial v / \partial r = -(1/2) r \partial p / \partial z.$$

В соответствии с (2.3), (3.1) имеем

$$(3.8) \quad \frac{\partial v}{\partial r} \equiv \frac{\partial v}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial r} = -2\pi r v \frac{\partial v}{\partial q} = -\pi r \frac{Qt_0^2}{U^2} \frac{\partial v}{\partial X},$$

а так как при $U/Qt_0 \ll 1$ изменение свойств жидкости затрагивает лишь узкий слой у краев потока, то для $\partial p/\partial z$ в рассматриваемом предельном случае в соответствии с законом Пуазейля [4] имеем

$$(3.9) \quad \partial p / \partial z = 8\mu_0 Q / \pi R^4.$$

В результате, подставляя (3.8), (3.9) и (1.3) в (3.7) и интегрируя, для скорости течения получаем

$$(3.10) \quad v = \frac{2U}{\pi R^2 t_0} \sqrt{F(X)}, \quad F(X) = \int_0^{\bar{x}} f(\vartheta(x)) dx.$$

Для нахождения частной производной $\partial X/\partial t$ поступим следующим образом: определим зависимость $r = r(t, z, X)$, а затем полученное выражение продифференцируем по t при фиксированных z и X . Согласно (2.3), $\partial r^2/\partial q = -1/\pi v$, а подставляя сюда (3.10) и интегрируя, с учетом (3.1) имеем

$$(3.11) \quad 1 - \frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{2} \frac{U}{Q t_0} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{F(x)}}.$$

Для частной производной $\partial X/\partial t$ из (3.11) с учетом (3.2), (3.3) следует

$$(3.12) \quad \frac{1}{\sqrt{F(X)}} \frac{\partial X}{\partial t} = -4a^2 + \left(\frac{t_0}{Q} \frac{\partial Q}{\partial t} + 3a^2 \frac{U}{Q t_0} \right) \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{F(x)}}.$$

Полагая, что изменение расхода жидкости во времени если и происходит, то достаточно медленно, из (3.12) при $U/Q t_0 \rightarrow 0$ получаем

$$(3.13) \quad t_0 \partial X/\partial t = -4a^2 \sqrt{F(X)}.$$

Подстановка (3.13), (3.10) в (3.6) действительно показывает, что при $U/Q t_0 \rightarrow 0$ субстанциальная производная dX/dt есть функция одной лишь автомодельной переменной X

$$(3.14) \quad t_0 dX/dt = -4(X + a^2) \sqrt{F(X)},$$

и, таким образом, из (3.4), (3.14) вытекает автомодельное интегродифференциальное уравнение

$$(3.15) \quad \frac{dX}{d\vartheta} = -4(X + a^2) \left[\int_0^x f(\vartheta(x)) dx \right]^{1/2}.$$

Дифференцируя (3.15) и исключая значение интеграла, получаем нелинейное дифференциальное уравнение, которое, если рассматривать в качестве независимой переменной величину ϑ , имеет вид

$$(3.16) \quad Y d^2 Y/d\vartheta^2 = (dY/d\vartheta)^2 + 8Y^3 f(\vartheta), \quad Y \equiv X + a^2.$$

Решение уравнения (3.16) должно удовлетворять граничным условиям

$$(3.17) \quad Y \rightarrow \infty \text{ при } \vartheta \rightarrow 0, \quad Y = a^2, \quad dY/d\vartheta = 0 \text{ при } \vartheta = 1.$$

Эти условия, из которых первые два соответствуют (3.5), а последнее вытекает из (3.15) при $X \rightarrow 0$, полностью определяют искомое решение и значение a .

При анализе полученной краевой задачи удобно ввести переменную $y = 1/2\sqrt{Y}$, которая в отличие от Y при всех ϑ остается ограниченной. Переходя к новой переменной, из (3.16) получаем уравнение

$$(3.18) \quad y d^2 y/d\vartheta^2 = (dy/d\vartheta)^2 - f(\vartheta),$$

искомое решение которого должно удовлетворять условиям

$$(3.19) \quad y = 0 \text{ при } \vartheta = 0, \quad dy/d\vartheta = 0 \text{ при } \vartheta = 1.$$

Предположим, что условиям (3.19) удовлетворяют две интегральные кривые $y_1(\vartheta)$ и $y_2(\vartheta)$ уравнения (3.18), $y_1(1) > y_2(1)$. Так как из (3.18) для этих кривых следует $y'(0) = \sqrt{f(0)}$, то при $\vartheta \rightarrow 0$ имеем $y_1(\vartheta)/y_2(\vartheta) \rightarrow y_1'(0)/y_2'(0) = 1$. В то же время, так как уравнение (3.18) можно представить также в виде $d^2 \ln y/d\vartheta^2 = -y^{-2} f(\vartheta)$, для отношения y_1/y_2 получаем

n	a	t_*/t_0
10	0,86	0,92
5	0,92	0,86
2	1,08	0,73
1	1,30	0,60
1/2	1,65	0,47
1/4	2,20	0,36
1/8	3,00	0,26

$$\frac{d}{d\theta} \left| \ln \frac{y_1(\theta)}{y_2(\theta)} \right| = - \int_{\theta}^1 |y_1^{-2} - y_2^{-2}| f d\theta \leq 0,$$

откуда в противоречии с найденным ранее для $\theta \rightarrow 0$ предельным значением следует $y_1(\theta)/y_2(\theta) \geq y_1(1)/y_2(1) > 1$. Указанное противоречие служит доказательством единственности решения.

Численно решение задачи можно найти методом пристрелки, рассматривая различные интегральные кривые уравнения (3.18), удовлетворяющие при $\theta=1$ условию (3.19). Интегральным кривым, для которых $y(0) > 0$, соответствуют значения $y(1) > 1/2a$; если же кривая достигает оси $y = 0$ при $\theta > 0$, то $y(1) < 1/2a$.

В таблице приведены значения параметра a , полученные численно для случая $f(\theta) = 1 - \theta^n$. Кроме того, указано отношение $t_*/t_0 = (\pi/4)/a$. Введенная здесь величина t_* представляет собой характеристический для каждого заданного закона измерения вязкости период времени. Чем меньше n , т. е. чем раньше вязкость жидкости начинает заметно отличаться от исходной, тем меньше значение t_* . С ростом n зависимость $f(\theta)$ приближается к рассмотренному в предыдущем разделе случаю скачкообразного изменения вязкости, в котором $a = \pi/4$, и величина t_* стремится к t_0 .

4. Таким образом, помимо гидродинамических характеристик, единственным параметром, определяющим скорость нарастания неподвижного слоя продуктов реакции, есть величина t_* :

$$(4.1) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = - \frac{\pi^2 U^2}{16 Q t_*^2},$$

а интегрируя (4.1), для изменения во времени свободного объема U и радиуса канала R после простых преобразований получаем

$$(4.2) \quad R(z, 0)/R(z, t) = U(z, 0)/U(z, t) = 1 + G(t)U(z, 0),$$

где функция $G(t)$ определяется условием

$$(4.3) \quad dG/dt = \pi^2/16 Q t_*^2, \quad G(0) = 0.$$

При любом конечном значении G радиус канала отличен от нуля и возможно движение жидкости.

Полученные соотношения полностью определяют поведение системы. Так, если в начальный момент на стенках трубы еще нет застывшего слоя продуктов реакции ($R(z, 0) = R_0$), то из (4.2) для радиуса потока следует

$$(4.4) \quad R_0/R = 1 + \Phi(t)z/L, \quad \Phi(t) = G(t)\pi R_0^2 L,$$

а для перепада давления из (3.9), (4.4) получаем

$$(4.5) \quad P = \frac{8\mu_0 Q}{\pi} \int_0^L \frac{dz}{R^2(z, t)} = \frac{8\mu_0 L Q (\Phi + 1)^5 - 1}{\pi R_0^4 5\Phi}.$$

В случае постоянного перепада давления из (4.5) для расхода жидкости следует

$$(4.6) \quad \frac{Q}{Q_0} = \frac{5\Phi}{(1 + \Phi)^5 - 1}, \quad Q_0 = Q(0) = \frac{\pi R_0^4 P}{8\mu_0 L},$$

и для нахождения зависимости $\Phi(t)$ из (4.3), (4.6) имеем

$$(4.7) \quad \tau = \frac{\pi^2 \pi R_0^2 L}{16 Q t_*^2} t = \int_0^\Phi \frac{5\phi d\phi}{(1 + \phi)^5 - 1}.$$

Вытекающие из (4.7), (4.6) зависимости $\Phi(\tau)$ и $Q(\tau)$ представлены на фигуре, откуда видно, что на большей части диапазона изменения расход жидкости удовлетворительно аппроксимируется двумя первыми членами разложения в ряд Тейлора, $Q/Q_0 \approx 1 - 2\tau$. Движение жидкости прекращается при

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} \frac{5\Phi d\Phi}{(1+\Phi)^2 - 1} \approx 0,5756.$$

Если же постоянным поддерживается расход жидкости, то $\Phi = \tau$ и из (4.5) для перепада давления получаем

$$\frac{P}{P_0} = \frac{(1+\tau)^5 - 1}{5\tau}, \quad P_0 \equiv P(0) = \frac{8\mu_0 QL}{\pi R_0^4},$$

а из (4.4) для изменения во времени радиуса канала имеем

$$(4.8) \quad \frac{R_0}{R} = 1 + \frac{\pi^2 \pi R_0^2 z}{16 Q t_*^2} t.$$

Линейность изменения отношения R_0/R позволяет эмпирически определить величину t_* из опытов с постоянным расходом жидкости.

В заключение укажем, что если наряду с изменением вязкости происходит также изменение плотности жидкости от исходного значения ρ_0 до ρ_1 , то вместо (4.1) будем иметь

$$(4.9) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = - \frac{\pi^2 \rho_0 U^2}{16 \rho_1 Q t_*^2}$$

и в выражениях (4.3), (4.7) и (4.8) появятся соответствующие (4.9) дополнения. Величина t_* при этом, как и прежде, определяется соотношением $t_*/t_0 \equiv (\pi/4)/a$, только в уравнениях (3.16), (3.18), служащих для нахождения параметра a (или t_*), вместо (1.3) будет стоять уже функция $f(\theta) = \mu_0 \rho_0 / \rho \mu$.

Автор благодарит В. Г. Абрамова и А. М. Столина за ценные советы и обсуждения.

Поступила 6 II 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Pearson J. R. A. Variable-viscosity flows in channels with high heat generation.— J. Fluid Mech., 1977, vol. 83, N 1.
2. Ockendon H., Ockendon J. R. Variable-viscosity flows in heated and cooled channels.— J. Fluid Mech., 1977, vol. 83, N 1.
3. Ваганов Д. А. Некоторые двумерные эффекты при течении реагирующей жидкости со свойствами, меняющимися с глубиной превращения.— ПМТФ, 1977, № 1.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.

УДК 536.21 : 620.191.33

ЭФФЕКТИВНАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ СИЛЬНОПОРИСТОЙ СРЕДЫ

В. И. Селяков

(Москва)

Вопрос об эффективной проводимости среды с малой концентрацией включений рассматривался во многих работах (например, в [1]). Случай среды с хаотическим распределением круговых включений, характеризующимся бинарной коррелятивной