УДК 532.546
DOI: 10.15372/PMTF202215138

ФИЛЬТРАЦИЯ СИЛЬНО СМЕШИВАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ НА ОСНОВЕ ДВУХМАСШТАБНОЙ ГОМОГЕНИЗАЦИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА И КАНА — ХИЛЛИАРДА

В. В. Шелухин, В. В. Крутько*, К. В. Трусов**

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
* ООО "Газпромнефть НТЦ", Санкт-Петербург, Россия
** Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, Россия
E-mails: shelukhin@list.ru, krutko.vv@gazpromneft-ntc.ru, k.trusov@g.nsu.ru

Для плоских течений приводятся результаты численного анализа уравнений фильтрации сильно смешиваемых жидкостей, полученных на основе двухмасштабной гомогенизации уравнений Навье — Стокса и Кана — Хиллиарда. Показано, что в общем случае тензор проницаемости является анизотропным. Для одномерных течений исследована динамика смешиваемости и показано, что вытеснение одной фазы путем закачки другой фазы может происходить даже при отсутствии перепада давления в образце.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, уравнения Кана — Хиллиарда, фильтрация смешиваемых жидкостей, двухмасштабная гомогенизация

Введение. Результаты многочисленных физических экспериментов и соответствующей цифровой 3D-обработки кернов свидетельствуют о надежности математических моделей многофазных течений, основанных на понятии фазового поля, уравнениях Навье — Стокса и Кана — Хиллиарда [1, 2]. Однако для прогнозирования характера течений в больших объемах пористой среды учет сложной системы микроканалов приводит к вычислительным трудностям. Поэтому развиваются методы осреднений уравнений Навье — Стокса и Кана — Хиллиарда.

Наиболее распространенным и эффективным подходом к осреднению уравнений для неоднородных сред является метод двухмасштабных разложений, применявшийся для решения типичных задач осреднения в работе [3]. Такой метод применяется в тех случаях, когда процессы, происходящие в масштабе пор и в масштабе, например, прискважинной зоны, существенно различаются. Вывод закона фильтрации Дарси из уравнений течения Навье — Стокса выполнен в работе [4]. Двухмасштабная гомогенизация уравнений Навье — Стокса — Кана — Хиллиарда не приводит к разделению масштабов, т. е. не удается получить модель, описывающую макро- и микропроцессы по отдельности [5, 6]. Однако в работе [7] такое разделение масштабов удалось выполнить для случая сильной смешиваемости, когда жидкости разделены диффузной границей конечной ширины, не зависящей от отношения масштабов.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ по теме "Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики" (номер темы: FZMW-2020-0008).

Целью данной работы является анализ разработанной в [7] модели вытеснения, при котором происходит смешивание жидкостей. С использованием уравнений, описывающих микропроцессы, исследуется анизотропная проницаемость предельной гомогенизированной пористой среды. Для оценки сил капиллярного вытеснения применяются уравнения, описывающие макропроцессы.

1. Описание модели. Согласно теории Кана — Хиллиарда [8] в случае неравновесных процессов свободная энергия двухкомпонентной смеси определяется объемной и поверхностной составляющими:

$$f = \gamma\omega(\varphi_2) + \hat{\alpha}|\nabla\varphi_2|^2/2.$$

Здесь φ_2 — объемная доля второго компонента; $\omega(\varphi_2)$ — безразмерный объемный потенциал. Размерные параметры γ и $\hat{\alpha}$ обычно выбираются следующим образом [9]:

$$\hat{\alpha} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\,\sigma\delta, \qquad \gamma = \frac{3}{2\sqrt{2}}\,\frac{\sigma}{\delta}$$

(σ — поверхностное натяжение; δ — характерная длина, пропорциональная ширине межфазной границы). Пусть $\bar{\rho}_i$, φ_i — плотности материалов компонентов и объемные доли компонентов, причем $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$. Тогда $\rho_i = \bar{\rho}_i\varphi_i$ — парциальные плотности компонентов, $\rho = \rho_1 + \rho_2$ — полная плотность.

В соответствии с [5] представление для объемной энергии имеет вид

$$w(\varphi_2) = \varphi_2^2(1 - \varphi_2)^2.$$

Так как химический потенциал μ представляет собой вариационную производную от f, то [7]

$$\mu = \gamma w'(\varphi_2) - \hat{\alpha}\,\Delta\varphi_2, \qquad w'(\varphi) = \frac{dw(\varphi)}{d\varphi}.$$

Пусть $\boldsymbol{v}$ — скорость смеси, $\boldsymbol{j}$ — диффузионный поток. Тогда закон сохранения массы второго компонента имеет вид

$$\rho_{2t} + \operatorname{div}(\rho_2\boldsymbol{v} + \bar{\rho}_2\boldsymbol{j}) = 0, \qquad \boldsymbol{j} = -\beta\,\nabla\mu,$$

где β — коэффициент мобильности.

Введем следующие обозначения: p — давление, $\boldsymbol{g}$ — ускорение свободного падения, τ — диссипативная часть тензора напряжений, D^v — симметричная часть матрицы $\nabla\boldsymbol{v}$, т. е. $2D^v = \nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^*$, η — сдвиговая вязкость, I — единичная матрица. В предположении, что смесь несжимаема, законы сохранения импульса и массы сводятся к уравнениям

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0,$$

$$\rho\Big(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\Big) = -\nabla p + \operatorname{div}\tau + \rho\boldsymbol{g}.$$

В работе [10] с помощью принципа виртуальной мощности обосновано следующее представление для тензора τ:

$$\tau = 2\eta D^v + \hat{\alpha}S, \quad S = \frac{1}{3}\,|\nabla\varphi|^2\cdot I - \nabla\varphi\otimes\nabla\varphi, \quad (\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})_{ij} = a_ib_j.$$

Выражения для вязкости и плотности смеси имеют вид

$$\eta = \eta_1(1 - \varphi_2) + \eta_2\varphi_2, \qquad \rho = \bar{\rho}_1(1 - \varphi_2) + \bar{\rho}_2\varphi_2,$$

где η_i — вязкости компонентов.

Пусть H, V, $T = H/V$ — характерные длина, скорость и время соответственно. Введем обозначение $\varphi = \varphi_2$ и безразмерные параметры

$$\boldsymbol{x}' = \frac{\boldsymbol{x}}{H}, \quad \boldsymbol{v}' = \frac{\boldsymbol{v}}{V}, \quad p' = \frac{Hp}{V\eta_1}, \quad \mu' = \frac{H\mu}{V\eta_1}, \quad \boldsymbol{j}' = \frac{\boldsymbol{j}}{V}, \quad \eta' = \frac{\eta}{\eta_1}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\bar\rho_1},$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\bar\rho_1 VH}{\eta_1}, \quad \Lambda = \frac{\hat\alpha}{H\eta_1 V}, \quad \Gamma = \frac{\gamma H}{\eta_1 V}, \quad B = \frac{\beta}{\eta_1} H^2.$$

Тогда уравнения для двухкомпонентной смешиваемой жидкости принимают вид

$$\mu' = \Gamma \frac{d\, w(\varphi)}{d\varphi} - \Lambda\, \Delta'\varphi; \tag{1}$$

$$\boldsymbol{j}' = -B\nabla'\mu', \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t'} + \mathrm{div}'(\varphi\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{j}') = 0,$$

$$\rho'\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}'}{\partial t'} + (\boldsymbol{v}'\cdot\nabla')\boldsymbol{v}'\right) = -\nabla'p' + \mathrm{div}\,(2\eta'(\varphi)D') - \rho'\,\mathrm{Fr}\cdot\mathrm{Re}\,\boldsymbol{e}_z +$$

$$+ \Lambda\,\mathrm{div}'\,\left(\frac{1}{3}\,|\nabla'\varphi|^2\cdot I - \nabla'\varphi\otimes\nabla'\varphi\right), \tag{2}$$

$$\eta'(\varphi) = \varphi\eta_2/\eta_1 + 1 - \varphi,$$

$$\mathrm{div}'\,\boldsymbol{v}' = 0,$$

где $\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_3$ — единичный вектор, направление которого противоположно направлению силы тяжести. Отметим, что φ имеет смысл объемной доли второго компонента.

Опуская штрихи и полагая число Рейнольдса малым, уравнения (1), (2) можно представить в виде

$$\mu = \Gamma w'(\varphi) - \Lambda\,\Delta\varphi, \qquad \boldsymbol{j} = -B\nabla\mu,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\varphi\boldsymbol{v} + \boldsymbol{j}) = 0, \tag{3}$$

$$0 = -\nabla p + 2\,\mathrm{div}\,(\eta(\varphi)D) + \Lambda\,\mathrm{div}\left(\frac{1}{3}\,|\nabla\varphi|^2\cdot I - \nabla\varphi\otimes\nabla\varphi\right),$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0.$$

Математически корректными граничными условиями на непроницаемых границах являются условия

$$\boldsymbol{v} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \quad \mu = 0 \quad \left(\text{или} \quad \frac{\partial\mu}{\partial n} = 0\right). \tag{4}$$

Условие $\partial\varphi/\partial n = 0$ соответствует углу смачиваемости, равному 90°.

2. Смешиваемость. Рассмотрим течения в перфорированной области Ω_f^ε, являющейся частью перфорированного пространства с периодической структурой (рис. 1). Опишем ее детально с помощью единичного куба $Y = (0,1)^n$ при $n = 2, 3$. Эта ячейка периодичности состоит из жидкой Y_f и твердой Y_s частей. Если Ω — область в $\mathbb{R}^n$, то ее перфорированная часть $\Omega_f^\varepsilon = \bigcup\limits_{z\in\mathbb{Z}^n} \varepsilon(Y_f + z)\cap\Omega$ представляет собой область, занятую жидкостью, где $Y_f + z$ — сдвиг области Y_f на вектор z; $\varepsilon(Y_f + z)$ — "сжатие" области $Y_f + z$ в ε раз. Параметр ε представляет собой отношение размера l (см. рис. 1) ячейки периодичности εY к размеру L области Ω: $\varepsilon = l/L$.

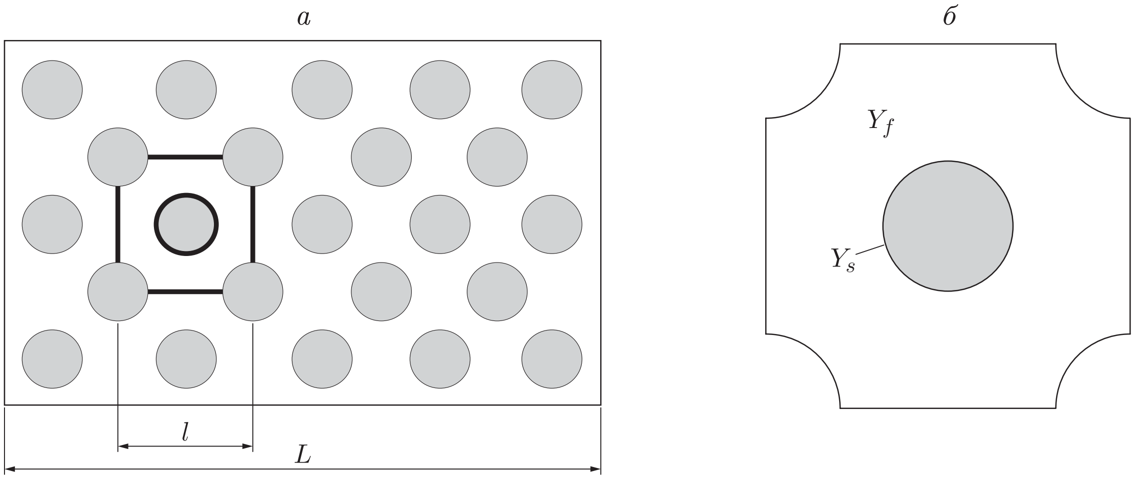

Рис. 1. Схемы безразмерной области Ω пространства с периодической структурой (*а*) и жидкой части Y_f ячейки периодичности Y (*б*)

Как показано в [7, 10], для задачи (3), (4) справедливо энергетическое равенство

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon}\frac{\Gamma w(\varphi)}{\Lambda}+\frac{|\nabla\varphi|^2}{2}\,dx+\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon}\frac{B|\nabla\mu|^2}{\Lambda R}+\frac{2\eta\,|\nabla\boldsymbol{v}|^2}{\Lambda}\,dx=0. \qquad (5)$$

В силу (1) равенство

$$\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon} w(\varphi(x,t))\,dx=0$$

справедливо только в отсутствие смешиваемости, т. е. когда φ принимает значения 0 и 1. Поэтому выполнение условия для начальной концентрации

$$\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon} w(\varphi_0(x))\,dx\leqslant\nu,\qquad \varphi_0=\varphi\big|_{t=0}$$

при малом значении ν свидетельствует о слабой начальной смешиваемости. Задавая константу c_0, ограничимся следующим классом начальных данных:

$$\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon}|\nabla\varphi_0|^2\,dx\leqslant c_0. \qquad (6)$$

Из (5), (6) следует

$$\int\limits_{\Omega_f^\varepsilon} w(\varphi(x,t))\,dx\leqslant 2\nu \qquad (7)$$

при условии, что отношение Λ/Γ достаточно мало. Таким образом, слабая начальная смешиваемость сохраняется при малом значении Λ/Γ.

Пусть δ_0 — безразмерная ширина межфазной границы. В [9] полагается, что $\Gamma\sim 1/\delta_0$, $\Lambda\sim\delta_0$, поэтому $\Lambda/\Gamma\sim\delta_0^2$. Введенный математический критерий слабой смешиваемости (7) согласуется с условием малой толщины межфазной границы.

3. Гомогенизация. В настоящей работе рассматривается случай сильной смешиваемости, когда $\Gamma(\varepsilon) \sim 1$, $\Lambda(\varepsilon) \sim 1$ при $\varepsilon = l/L \to 0$, и не рассматривается вопрос о степени смешиваемости реальных жидкостей в рамках сформулированных критериев, так как это требует проведения дополнительного исследования. Поскольку жидкость идеально смешивается сама с собой, с другой жидкостью она хорошо смешивается в случае, если химические составы этих жидкостей подобраны определенным образом.

В соответствии с методом двухмасштабной гомогенизации [7] решение $\boldsymbol{v}^\varepsilon$, φ^ε, p^ε, μ^ε задачи (3), (4) находим в виде асимптотических рядов

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}^\varepsilon(x) &= \varepsilon^2\boldsymbol{v}^0(x,y) + \varepsilon^3\boldsymbol{v}^1(x,y) + \ldots, \qquad y = x/\varepsilon,\\
p^\varepsilon(x) &= p^0(x) + \varepsilon p^1(x,y) + \ldots, \qquad y = x/\varepsilon,\\
\varphi^\varepsilon(x) &= \varphi^0(x) + \varepsilon \varphi^1(x,y) + \ldots, \qquad y = x/\varepsilon,\\
\mu^\varepsilon(x) &= \mu^0(x) + \varepsilon \mu^1(x,y) + \ldots, \qquad y = x/\varepsilon,\\
\boldsymbol{j}^\varepsilon(x) &= \boldsymbol{j}^0(x) + \varepsilon \boldsymbol{j}^1(x,y) + \ldots, \qquad y = x/\varepsilon.
\end{aligned}$$

Коэффициенты $f^i(x,y)$ полагаются Y-периодическими по переменной y.

Введем среднюю по переменной y скорость

$$\tilde{\boldsymbol{v}}(x) = \frac{1}{|Y|}\int\limits_{Y_f} \boldsymbol{v}^0(x,y)\,dy,$$

и обозначим

$$\eta(\varphi^0) = \frac{\varphi^0\eta_2}{\eta_1} + 1 - \varphi^0,$$

$$S^0(x) = \frac{1}{3}\,|\nabla_x\varphi^0|^2\cdot I - \nabla_x\varphi^0\otimes\nabla_x\varphi^0, \qquad C^0(x) = -p^0\cdot I + \Lambda S^0.$$

Пусть $\boldsymbol{u}^j(y)$ — решение Y-периодической задачи

$$\Delta_y\boldsymbol{u}^j - \nabla_y q^j = -\boldsymbol{e}^j, \qquad \operatorname{div}_y\boldsymbol{u}^j = 0, \qquad \boldsymbol{u}^j\big|_{y\in\partial Y_f} = 0, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{e}^j$ — единичный вектор оси y_j.

В работе [7] установлено, что скорость удовлетворяет следующему обобщенному закону фильтрации Дарси:

$$\tilde{v}_i = \frac{K_{ij}}{\eta(\varphi^0)}\,\frac{\partial C^0_{jk}(x)}{\partial x_k}$$

или

$$\tilde{\boldsymbol{v}}(x) = \frac{K}{\eta(\varphi^0)}\cdot\operatorname{div}_x C^0, \qquad K_{ij} = \int\limits_{Y_f}\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{u}^j\,dy, \tag{9}$$

где K — постоянный тензор проницаемости. Нетрудно показать, что матрица K симметрична. Действительно, если умножить первое уравнение системы (8) скалярно на вектор $\boldsymbol{u}^i$ и проинтегрировать по частям, то получится равенство

$$\int\limits_{Y_f}\nabla\boldsymbol{u}^j\cdot\nabla\boldsymbol{u}^i\,dy = \int\limits_{Y_f}\boldsymbol{e}^j\cdot\boldsymbol{u}^i\,dy.$$

Поэтому $K_{ij} = K_{ji}$. Из свойств задачи (8) следует также, что матрица K является положительно-определенной [4].

Формулу (9) можно записать в виде

$$\tilde{\boldsymbol{v}}(x) = -\frac{K}{\eta(\varphi^0)} \cdot \nabla_x p^0 + \Lambda \frac{K}{\eta(\varphi^0)} \operatorname{div}_x S^0(x), \quad S^0 = \frac{1}{3} |\nabla_x \varphi^0|^2 \cdot I - \nabla_x \varphi^0 \otimes \nabla_x \varphi^0. \qquad (10)$$

Уравнение (10) представим в координатном виде

$$\tilde{v}_i(x) = -\frac{K_{ij}}{\eta(\varphi^0)} \frac{\partial p^0}{\partial x_j} + \Lambda \frac{K_{ij}}{\eta(\varphi^0)} \frac{\partial}{\partial x_k} \Big(\frac{1}{3} \delta_{jk} |\nabla_x \varphi^0|^2 - \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}\Big). \qquad (11)$$

В работе [7] обоснован вывод уравнений

$$\operatorname{div}_x \tilde{\boldsymbol{v}} = 0,$$
$$\frac{\partial \varphi^0}{\partial t} = \operatorname{div}_x (B \nabla_x \mu^0), \qquad \mu^0(x) = \Gamma w'(\varphi^0) - \Lambda \Delta_x \varphi^0. \qquad (12)$$

Заметим, что уравнения (11), (12) для неизвестных $\tilde{\boldsymbol{v}}(x)$, $p^0(x)$, $\varphi^0(x)$, $\mu^0(x)$, описывающие макропроцессы, выполняются не в перфорированной области Ω_f^ε, а во всей области Ω. При вычислении макротензора K используется решение уравнений (8), описывающих микропроцессы.

Таким образом, метод двухмасштабной гомогенизации в случае сильной смешиваемости позволяет обосновать уравнения фильтрации (11), (12) в области Ω однородной (гомогенизированной) пористой среды на основе решений системы уравнений Навье — Стокса и Кана — Хиллиарда в перфорированной области Ω_f^ε и последующего предельного перехода при $\varepsilon \to 0$.

4. Проницаемость. Поясним последнюю формулу системы (9) для тензора проницаемости K гомогенизированной среды, которая получается при $\varepsilon \to 0$. Фактически эта формула представляет собой теорему, сформулированную в теории гомогенизации следующим образом [4]. Чем меньше размер кубической ячейки периодичности по сравнению с размером выделенной области Ω, тем "ближе" неоднородная пористая среда, составленная с помощью трансляций представительной ячейки, к однородной (гомогенизированной) пористой среде с постоянной проницаемостью, заданной формулой (9).

Важное свойство гомогенизированной (предельной) пористой среды состоит в том, что ее матрица проницаемости K определяется однозначно и является не только симметричной, но и положительно-определенной [4]. Однако математическое доказательство формулы (9) затруднено вследствие наличия ряда ограничений. Главное ограничение заключается в том, что следы пор на противоположных гранях представительной ячейки "приближенной" периодической неоднородной среды должны быть идентичными. Отметим, что требование симметричности тензора проницаемости хорошо известно в теории фильтрации [11]; равенства $K_{ij} = K_{ji}$ следуют из соотношений взаимности Онзагера для необратимых процессов [12]. Обоснование симметричности матрицы K с использованием термодинамики изложено кратко в приложении.

В лабораторных экспериментах, основанных на прокачке жидкости через керн, обычно вычисляется лишь однонаправленная проницаемость, когда кубик породы считается помещенным в изолирующую трубу с квадратным сечением и исследуется течение под действием перепада давления вдоль оси трубы. При наличии данных об изотропности породы достаточно измерений только однонаправленной проницаемости. Если однонаправленные проницаемости измерить также вдоль двух других ортогональных осей, то можно скомбинировать диагональную матрицу, которая обычно принимается в качестве тензора проницаемости. При этом керн считается анизотропным, если диагональные элементы различаются.

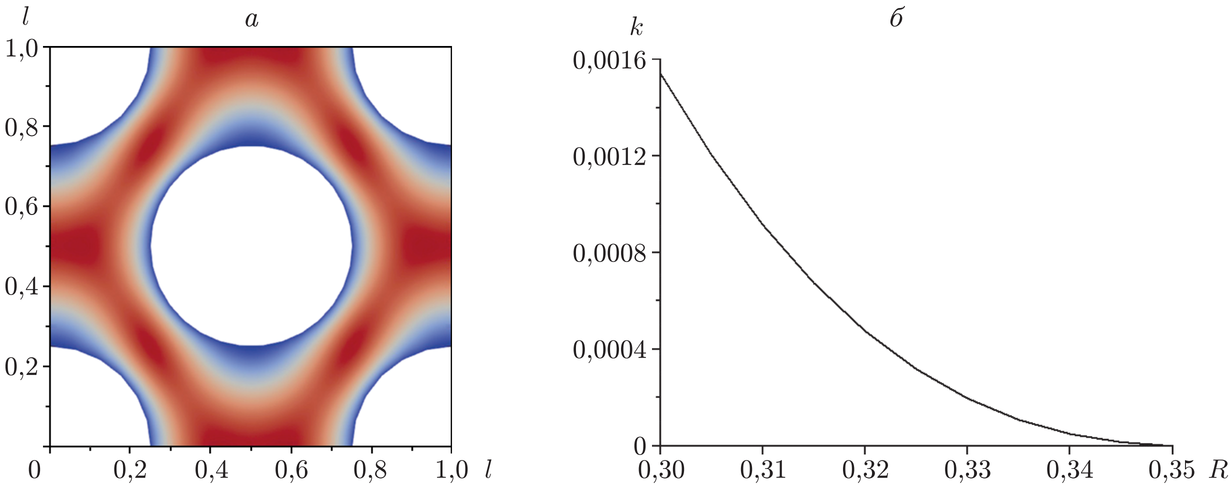

Рис. 2. Микроструктура ячейки (см. рис. 1,*б*), полученная с помощью пяти кругов одинакового радиуса (четыре круга в вершинах единичного квадрата и один круг в центре) (*а*), и соответствующая ей зависимость безразмерной изотропной проницаемости Дарси $k = K_{11} = K_{22}$ от радиуса кругов R (*б*)

В последнее время используется другой подход, позволяющий получить полную матрицу проницаемости реального кубического керна, которая содержит также внедиагональные элементы [13–17]. Сначала на основе цифровой обработки керна путем рентгеновского сканирования воссоздается геометрия поровых каналов. Затем методами вычислительной гидродинамики непосредственно решаются уравнения Навье — Стокса (или другие уравнения) для этой системы каналов при заданных перепадах давления и вычисляется средняя скорость $\langle \boldsymbol{v} \rangle$. После этого подбирается матрица K, такая что

$$\eta\phi\langle \boldsymbol{v} \rangle = -K\nabla p,$$

где ϕ — пористость; η — вязкость. Трудности, возникающие при использовании такого подхода, связаны с оптимальным выбором краевых условий как на стенках поровых каналов, так и на внешних границах кубического цифрового керна. Заметим, что в работах [13, 14] следы пор на противоположных гранях считаются идентичными и на этих следах формулируются периодические краевые условия для уравнений Навье — Стокса. Для того чтобы свести задачу к периодической, в работе [13] разработан метод поправки керна вблизи его границ, а в работе [14] керн заменяется на другой, который статистически подобен исходному. В [13, 14] симметричность тензора K не гарантируется, поэтому для того, чтобы выполнялись соотношения взаимности Онзагера, этот тензор симметризуется путем перехода к матрице $0{,}5(K_{ij} + K_{ji})$. Данная работа, в которой анализируется структура тензора проницаемости, появилась в результате обсуждения методов вычисления проницаемости реальных кернов.

На рис. 2–5 приведены результаты вычисления безразмерного тензора проницаемости Дарси (9). Следует отметить, что исследуется проницаемость не синтетических кернов, представленных на рис. 2–5, а предельной однородной пористой среды, в случае когда размер ячейки неоднородной пористой среды с периодической структурой стремится к нулю (при фиксированной области Ω). Далее в вычислениях используются следующие значения безразмерных параметров: $\Lambda = \Gamma = B = 1$, $\eta_2/\eta_1 = 10^{-2}$.

Матрица K определяется с помощью решения $(\boldsymbol{u}^j, q^j)$ неоднородной гидродинамической задачи Стокса (8) в области Y_f с периодическими краевыми условиями. Используется решатель FreeFEM++, который имеется в открытом доступе, предназначен, главным

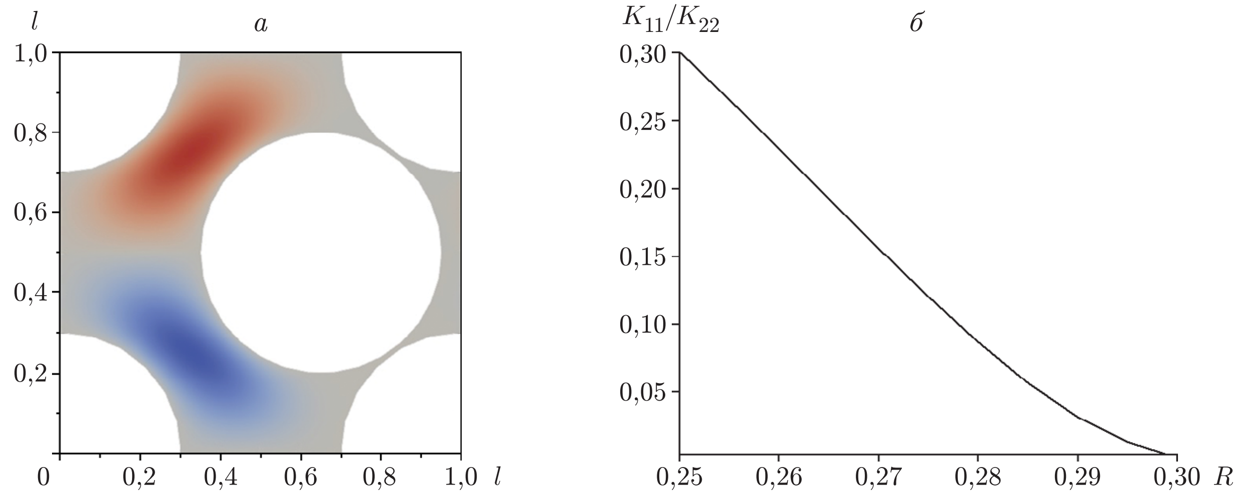

Рис. 3. Микроструктура жидкой части Y_f ячейки периодичности, полученная с помощью пяти кругов одинакового радиуса $R = 0{,}30$ (четыре круга в вершинах единичного квадрата и один круг в центре), в случае когда центр внутреннего круга сдвинут вправо на расстояние $\Delta_x = 0{,}15$ (*а*), и соответствующая ей зависимость отношения компонент K_{11}/K_{22} от радиуса R при $\Delta_x = 0{,}15$ (*б*)

образом, для решения эллиптических и параболических уравнений и основан на методе конечных элементов. Приведем постановку граничных условий для области Y_f, показанной на рис. 1,*б*. Для того чтобы получить эту область, нужно удалить из единичного квадрата $Y = (0,1)^2$ "твердую" область Y_s, которая состоит из пяти частей: внутреннего круга и четырех круговых секторов (расположенных в вершинах квадрата) с углом, равным 90°. Радиусы секторов и внутреннего круга одинаковы. Граница ∂Y_f состоит из пяти криволинейных участков и четырех отрезков прямых линий. На криволинейном участке границы ставится условие прилипания $\boldsymbol{u}^j = 0$. Кроме того, требуется выполнение условия Y-периодичности, согласно которому значения вектор-функции $\boldsymbol{u}^j$ на противоположных прямолинейных участках границы равны. Математическая корректность такой постановки доказана в [4]. Аналогично формулируются граничные условия для других областей Y_f, показанных на рис. 3–5. Сходимость численного решения устанавливалась путем сгущения сетки. Для визуализации вычислений применялся пакет ParaView.

Из микроструктуры, представленной на рис. 1,*б*, при $\varepsilon \to 0$ получаем изотропную однородную пористую среду, так как вычисленный на ее основе по формуле (9) тензор проницаемости с точностью до множителя равен единичной матрице. Периодическая ячейка построена с помощью пяти кругов одинакового радиуса R, при этом четыре круга находятся в вершинах единичного квадрата, а один круг — в центре. Из рис. 2,*а* следует, что жидкая область Y_f теряет связность при $R \simeq 0{,}35$. При этом значении R пористая структура становится непроницаемой, что соответствует результатам вычисления $K_{11}(R)$ при $0{,}25 < R < 0{,}35$ (см. рис. 2,*б*).

Из микроструктуры, приведенной на рис. 3, при $\varepsilon \to 0$ получаем анизотропную однородную пористую среду, так как диагональные элементы соответствующего тензора проницаемости неодинаковы. В отличие от изотропного случая (см. рис. 2) центр внутреннего круга сдвинут вправо на расстояние $\Delta_x = 0{,}15$, поэтому проницаемость в вертикальном направлении x_2 больше, чем в горизонтальном направлении x_1. Об этом свидетельствуют результаты вычисления отношения компонент K_{11}/K_{22} при увеличении радиуса всех одинаковых кругов от $R = 0{,}25$ до $R = 0{,}3$ (см. рис. 3,*б*). Нетрудно показать, что при $R = 0{,}3$

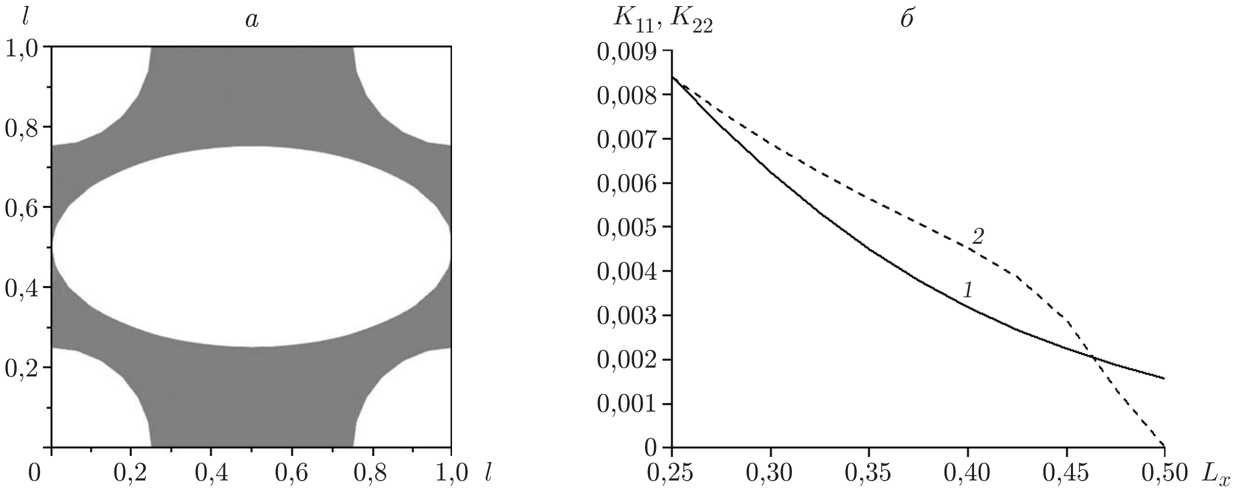

Рис. 4. Микроструктура жидкой части Y_f ячейки периодичности, в случае когда в центре находится эллипс с большой полуосью длиной $L_x = 0{,}5$, а в вершинах — круги одинакового радиуса $R = 0{,}25$ (*а*), и соответствующие ей зависимости безразмерных проницаемостей K_{11} (*1*) и K_{22} (*2*) от длины полуоси эллипса L_x при $L_y = 0{,}25$ (*б*)

нарушается связность описанной микроструктуры в горизонтальном направлении. Поэтому при $R = 0{,}3$ $\;K_{11} = 0$.

Необычная предельная проницаемость имеет место для микроструктуры, показанной на рис. 4. В отличие от микроструктуры в изотропном случае (см. рис. 2) в данном случае в центре находится эллипс с полуосями L_x и L_y. Пусть радиус одинаковых кругов в вершинах ячейки равен 0,25, длина малой полуоси L_y фиксированна и равна 0,25. Полученная в результате гомогенизации матрица K имеет следующие свойства. При изменении L_x в диапазоне от 0,25 до 0,50 зависимость разности проницаемостей $\Delta = K_{22} - K_{11}$ от L_x является немонотонной: сначала возрастает от нуля при $L_x = 0{,}25$, затем убывает до нуля при $L_x \approx 0{,}4625$. Проницаемость K_{22} монотонно убывает и обращается в нуль при $L_x = 0{,}5$. В данном случае при анализе проницаемости следует учитывать, что внедиагональные элементы матрицы не равны нулю.

Во всех рассмотренных выше случаях внедиагональные элементы тензора проницаемости гомогенизированной среды малы, точнее, $K_{12}/K_{11} \approx 10^{-4}$. Наибольшие по модулю значения внедиагональных элементов матрицы K наблюдаются для микроструктуры, приведенной на рис. 5. В этом случае в вершинах ячейки периодичности Y располагаются одинаковые непроницаемые круговые секторы радиусом R с углом, равным $270°$, а внутри — круг такого же радиуса. Заметим, что диагональные элементы K_{11} и K_{22} положительны и в силу симметрии равны, а внедиагональные элементы K_{12} и K_{21} равны и отрицательны. Для того чтобы выяснить, почему элементы K_{12} и K_{21} отрицательны, рассмотрим течение под действием положительного перепада давления $\Delta_2 p = p|_{x_2=0} - p|_{x_2=1}$ в вертикальном направлении x_2 в отсутствие горизонтального перепада давления, т. е. при $p|_{x_1=0} - p|_{x_1=1} = 0$. В этом случае $v_1 = v_2 K_{12}/K_{22} = v_2 K_{12}/K_{11}$. В силу геометрии ячейки в отрицательном направлении оси x_1 препятствий для течения меньше, поэтому $v_1 < 0$ и, следовательно, $K_{12} < 0$. Из результатов расчетов, представленных на рис. 5,*б*, следует, что $v_1 \approx -0{,}5 v_2$ при некотором значении радиуса R. Поэтому фильтрация в направлении оси x_1 может быть соизмеримой с фильтрацией в направлении оси x_2 даже в отсутствие перепада давления в направлении оси x_1. Это означает, что в данном случае имеет место значительная анизотропия.

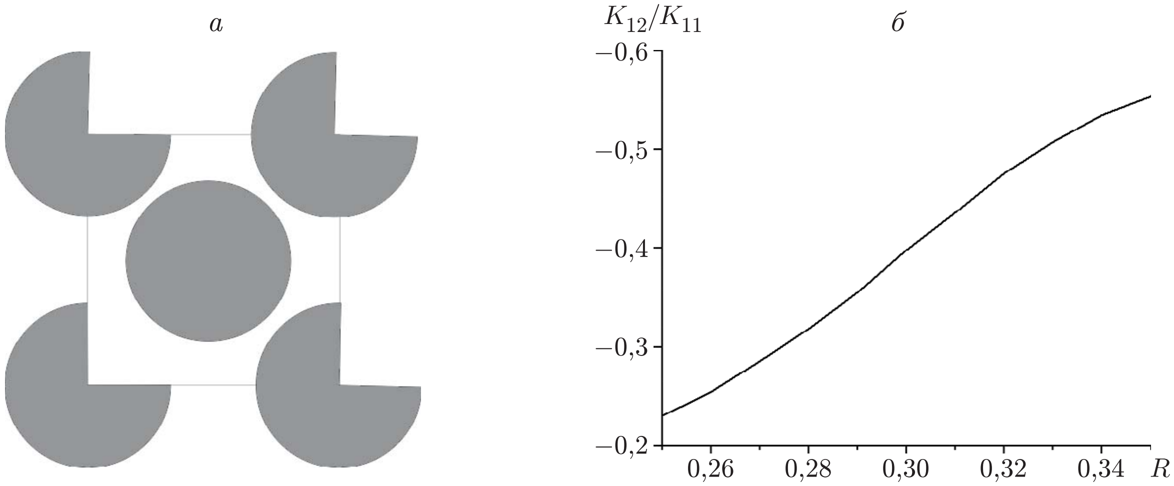

Рис. 5. Микроструктура ячейки, приводящая к среде с анизотропным тензором K, в случае когда в вершинах ячейки периодичности Y располагаются одинаковые непроницаемые круговые секторы радиусом R с углом, равным 270°, а в центре — круг такого же радиуса R (*а*), и соответствующая ей зависимость отношения проницаемостей K_{12}/K_{11} от радиуса кругов R в микроструктуре (*б*)

5. Нелинейный закон Дарси. В случае если тензор проницаемости изотропный, т. е. $K_{ij} = k\delta_{ij}$, уравнения (11), (12) допускают одномерное решение, зависящее лишь от одной пространственной переменной x. Действительно, пусть $v(x,t)$ — скорость вдоль оси x, тогда уравнения трехмерного течения принимают вид

$$\frac{\eta(\varphi)}{k}\,v = -p_x - \frac{2\Lambda}{3}\,\frac{d}{dx}\,\varphi_x^2, \qquad v_x = 0; \tag{13}$$

$$\varphi_t = B\mu_{xx}, \qquad \mu = \Gamma\omega'(\varphi) - \Lambda\varphi_{xx}, \tag{14}$$

где $\eta = \varphi\eta_2/\eta_1 + 1 - \varphi$. Зададим граничные и начальные условия для интервала течения $0 < x < 1$ в следующем виде:

$$\varphi\big|_{x=0} = 1, \qquad \varphi_x\big|_{x=1} = \mu_x\big|_{x=0} = \mu_x\big|_{x=1} = 0, \qquad \varphi\big|_{t=0} = 0. \tag{15}$$

Будем предполагать, что известен перепад давления

$$p\big|_{x=0} - p\big|_{x=1} = \Delta p \geqslant 0.$$

Исследуем некоторые свойства решений. Во-первых, ясно, что скорость не зависит от пространственной переменной и $v = v(t)$. Во-вторых, система уравнений (13), (14) распадается, так как параметр порядка и химический потенциал могут быть определены из уравнений (14) независимо от давления и скорости фильтрации. Однако последние характеристики существенно зависят от параметра порядка и химического потенциала. О динамике смешения при начальном состоянии $\varphi = 0$, когда на левой границе образца поддерживается граничное условие $\varphi = 1$, можно судить по рис. 6,*а*, на котором представлены пространственные распределения φ в различные моменты времени.

Начально-краевая задача (14), (15) для двух скалярных функций φ, μ на одномерном пространственном интервале $0 < x < 1$ решалась численно с помощью решателя FreeFEM++. При дискретизации по времени применялась неявная схема, контроль за сходимостью осуществлялся путем сгущения сетки.

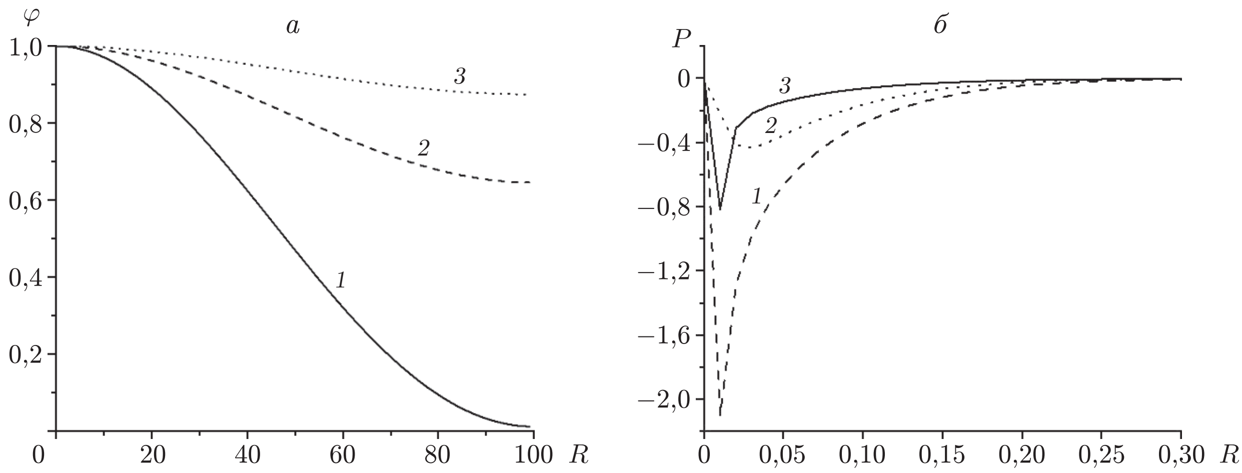

Рис. 6. Профили концентрации φ (*а*) и приведенного давления P при $\Delta p = 0$ (*б*) в различные безразмерные моменты времени:
1 — $t = 10$, *2* — $t = 15$, *3* — $t = 25$

Из уравнений, граничных и начальных условий следует

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 \eta(\varphi)\,dx = 0, \qquad \int\limits_0^1 \eta(\varphi)\,dx = 1.$$

Если функция $\varphi(x,t)$ известна, то скорость $v(t)$ определяется путем интегрирования уравнения (13) по интервалу $0 < x < 1$ и для нее получается представление

$$\frac{v}{k} = \Delta p + \frac{2\Lambda}{3}\,\varphi_x^2\big|_{x=0}. \tag{16}$$

Из (16) следует вывод о нелинейности фильтрации. Во-первых, течение может иметь место только за счет капиллярных эффектов в отсутствие силы тяжести и перепада давления. Во-вторых, увеличение перепада давления в n раз не приводит к такому же увеличению скорости. Вычисления показывают, что скорость убывает со временем.

Если функция $\varphi(x,t)$ известна, то можно также определить поле давления $p(x,t)$. Действительно, интегрируя уравнение (13) по интервалу $(x,1)$, получаем следующую формулу для $P(x,t) = p - p|_{x=1}$:

$$P(x,t) = -\frac{2\Lambda}{3}\,\varphi_x^2 + \Big(\Delta p + \frac{2\Lambda}{3}\,\varphi_x^2\big|_{x=0}\Big)\int\limits_x^1 \eta(\varphi)\,dx. \tag{17}$$

В силу (17) давление монотонно убывает по переменной x, если перепад давления Δp достаточно большой. Это объясняется тем, что функция $\varphi(x,t)$ не зависит от Δp. Однако при малых значениях Δp давление не является монотонной функцией по переменной x. Например, при $\Delta p = 0$ левая часть равенства (17) обращается в нуль как при $x = 0$, так и при $x = 1$. На рис. 6,*б* представлены профили приведенного давления $P = p - p|_{x=1}$ в различные моменты времени при $\Delta p = 0$. Видно, что давление со временем выравнивается по всей длине образца. Большие градиенты давления в начальные моменты времени уравновешиваются поверхностным натяжением.

Заключение. Исследованы гомогенизированные уравнения фильтрации двухкомпонентной смешиваемой жидкости в случае сильной смешиваемости. В рамках теории фазового поля, основанной на понятии параметра порядка, при выводе таких уравнений используется теория двухмасштабной гомогенизации уравнений Навье — Стокса и Кана —

Хиллиарда для течения двухкомпонентной смешиваемой жидкости в перфорированной области. При сильной смешиваемости масштабы разделяются, т. е. уравнения, описывающие микропроцессы, могут быть решены независимо от уравнений, описывающих макропроцессы, несмотря на то что эти уравнения "перевязаны". Установлено, что при оценке проницаемости гомогенизированной пористой среды важную роль играют уравнения, описывающие микропроцессы. С использованием численных методов исследована анизотропная проницаемость для двумерных течений. Для случая одномерных течений в пористом образце установлено, что смешиваемая фильтрация может происходить даже в отсутствие перепада давления лишь за счет капиллярных сил.

Приложение. Рассмотрим пористую среду как термодинамическую систему. В случае необратимых процессов с диссипацией производство энтропии σ принято представлять в виде $\sigma = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y}$, где $\boldsymbol{X}$ — термодинамическая сила; $\boldsymbol{Y}$ — термодинамический поток [18]. Выберем в качестве $\boldsymbol{X}$ скорость фильтрации $\boldsymbol{u}$. С учетом результатов экспериментов Дарси можно предположить, что поток пропорционален градиенту давления: $\boldsymbol{Y} = c_0 \nabla p$ (c_0 — размерный множитель). В состоянии равновесия $\boldsymbol{X} = 0$ и $\boldsymbol{Y} = 0$. При малых отклонениях от состояния равновесия $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ связаны линейно: $Y_i = L_{ij} X_j$ (L_{ij} — кинетические коэффициенты) [12]. Следовательно, $u_i = -\eta^{-1} K_{ij}\, \partial p / \partial x_j$, $K = -c_0 \eta L^{-1}$ (η — вязкость; K — тензор проницаемости). Согласно теореме Онзагера $L_{ij} = L_{ji}$ [12], значит, $K_{ij} = K_{ji}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Anderson D. M., McFadden G. B., Wheeler A. A.** Diffuse-interface methods in fluid mechanics // Annual Rev. Fluid Mech. 1998. V. 30. P. 139–165.
2. **Балашов В. А., Савенков Е. Б., Четверушкин Б. Н.** Вычислительные технологии программного комплекса DiMP-Hydro для моделирования микротечений // Мат. моделирование. 2019. Т. 31, № 7. С. 21–44.
3. **Бахвалов Н. С.** Осредненные характеристики тел с периодической структурой // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218, № 5. С. 1046–1048.
4. **Санчес-Паленсия Э.** Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
5. **Banas L., Mahato H. S.** Homogenization of evolutionary Stokes — Cahn — Hilliard equations for two-phase porous media flow // Asymptotic Anal. 2017. V. 105, N 1/2. P. 77–95.
6. **Lakhmara N., Mahato H. S.** Homogenization of a coupled incompressible Stokes — Cahn — Hilliard system modeling binary fluid mixture in a porous medium // Nonlinear Anal. 2022. V. 222. 112927.
7. **Амира Ю., Шелухин В. В.** Гомогенизация уравнений смешиваемых жидкостей // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 4. С. 191–200.
8. **Cahn J. W., Hilliard J. E.** Free energy of a nonuniform system. Interfacial free energy // J. Chem. Phys. 1958. V. 28. P. 258–266.
9. **Metzger S., Knabner P.** Homogenization of two-phase flow in porous media from pore to Darcy scale: A phase-field approach // Multiscale Model. Simulat. 2021. V. 19, N 1. P. 320–343.
10. **Старовойтов В. Н.** Модель движения двухкомпонентной жидкости с учетом капиллярных сил // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 85–92.
11. **Бэр Я.** Физико-математические основы фильтрации воды / Я. Бэр, Д. Заславски, С. Ирмей. М.: Мир, 1971.
12. **де Гроот С. Р.** Термодинамика необратимых процессов. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
13. **Guibert R., Horgue P., Debenest G., Quintard M.** A comparison of various methods for the numerical evaluation of porous media permeability tensors from pore-scale geometry // Math. Geosci. 2016. V. 48, N 3. P. 329–347.

14. **Gerke K. M., Karsanina M. V., Katsman R.** Calculation of tensorial flow properties on pore level: Exploring the influence of boundary conditions on the permeability of three-dimensional stochastic reconstructions // Phys. Rev. E. 2019. V. 100, N 5. 053312.
15. **Galindo-Torres S. A., Scheuermann A., Li L.** Numerical study on the permeability in a tensorial form for laminar flow in anisotropic porous media // Phys. Rev. E. 2012. V. 86, N 4. 046306.
16. **Thibodeaux T. W., Sheng Q., Thompson K. E.** Rapid estimation of essential porous media properties using image-based pore-scale network modeling // Industr. Engng Chem. Res. 2015. V. 54, N 16. P. 4474–4486.
17. **Scandelli H., Ahmadi-Senichault A., Levet C., Lachaud J.** Computation of the permeability tensor of non-periodic anisotropic porous media from 3D images // Transport Porous Media. 2022. V. 142. P. 669–697.
18. **Румер Ю. Б.** Термодинамика, статистическая физика и кинетика / Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин. М.: Наука, 1972.

Поступила в редакцию 12/V 2022 г.,
после доработки — 15/X 2022 г.
Принята к публикации 28/XI 2022 г.