УДК 539.3

КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛОСЫ В НАПРЯЖЕНИЯХ

П. И. Анферов, Т. А. Пьяных, И. В. Шевелева

Сибирский федеральный университет, 660041 Красноярск, Россия
E-mails: Panferov@sfu-kras.ru, Ostanina.t@mail.ru, sheveliv@gmail.com

С использованием интегральных преобразований Фурье и Лапласа численно получено аналитическое решение квазистатической задачи термоупругости для полосы с постоянными свойствами. Приведены результаты численных расчетов.

Ключевые слова: теория термоупругости, плоская деформация полосы, уравнения равновесия, уравнения совместности деформаций в напряжениях, преобразования Фурье и Лапласа.

DOI: 10.15372/PMTF20220619

Введение. Эффективным методом обработки поверхностей металлических деталей является воздействие локализованных источников тепла, например лазерного излучения или пучков электронов [1–3]. В общем случае анализ возникающих при этом тепловых напряжений существенно затруднен, что обусловлено нелинейностью уравнения теплопроводности, связанностью полей температур и деформаций, наличием в уравнениях движения инерционных членов. На практике часто реализуются условия, соответствующие квазистатическому приближению, когда указанными выше эффектами можно пренебречь [4–6]. В этом случае напряжения зависят от времени неявно, через температуру. В условиях плоской деформации расчет термических напряжений существенно упрощается [7]. Для расчета термоупругих напряжений при плоской деформации применяется теория функций комплексной переменной [8], а также комбинация термоупругого потенциала перемещений и бигармонической функции напряжений [9, 10]. При этом напряжения выражаются через вторые производные от указанных функций. В данной работе термоупругие напряжения определяются непосредственно из уравнений равновесия и условия совместности при плоской деформации полосы.

1. Формулировка задачи. Рассматривается бесконечная полоса ($|x_1| < \infty$, $0 \leqslant x_2 \leqslant b$), начальная температура которой равна T_0. В момент времени $\tau = 0$ на одном крае ($x_2 = b$) полосы создается тепловой поток $q(x_1)$, действующий на отрезке ($|x_1| \leqslant d_1 = \text{const}$), другой край ($x_2 = 0$) теплоизолирован. Материал полосы считается однородным изотропным, его физико-механические свойства не зависят от температуры. Дальнейшие вычисления проводятся в безразмерных координатах $x = x_1/b$, $y = x_2/b$, $d = d_1/b$ и при безразмерном времени $t = a\tau/b^2$ (a — температуропроводность материала полосы). Обозначим через θ разность текущей температуры T и начальной T_0:

$$\theta = T - T_0.$$

© Анферов П. И., Пьяных Т. А., Шевелева И. В., 2022

Функция θ находится из решения начально-краевой задачи

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=\frac{\partial\theta}{\partial t}; \tag{1}$$

$$\theta(x,y,0)=0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial\theta(x,0,t)}{\partial y}\equiv 0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial\theta(x,1,t)}{\partial y}=\frac{q(x)h(t)b}{\lambda}, \tag{4}$$

где $q(x)$ — тепловой поток; $h(t)$ — единичная функция Хевисайда; λ — теплопроводность материала полосы.

Напряжения определяются из уравнений равновесия [11]

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=0 \tag{5}$$

и условия совместности деформаций в напряжениях

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0. \tag{6}$$

Гармоническая функция f связана с диагональными компонентами тензора напряжений и разностью температур равенством [11]

$$f=\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\beta\theta, \tag{7}$$

постоянная β равна

$$\beta=\frac{\alpha E}{1-\nu},$$

где α — коэффициент линейного теплового расширения; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга материала полосы. Указанные величины полагаются не зависящими от температуры. Граничные условия для уравнений (5) имеют вид

$$\sigma_{yy}(x,0)=\sigma_{xy}(x,0)\equiv 0,\qquad \sigma_{yy}(x,1)=\sigma_{xy}(x,1)\equiv 0. \tag{8}$$

Поскольку значения σ_{xx} на границах полосы не выражаются через внешние силы, граничные условия для уравнения (6) отсутствуют. Таким образом, решая задачу Дирихле для уравнения Лапласа известными методами, невозможно найти функцию f.

Искомые величины представим интегралами Фурье в комплексной форме:

$$\sigma_{jk}(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\bar\sigma_{jk}(\omega,y,t)\,\mathrm{e}^{i\omega x}\,d\omega,$$

$$\theta(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\bar\theta(\omega,y,t)\,\mathrm{e}^{i\omega x}\,d\omega,\qquad f(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\bar f(\omega,y,t)\,\mathrm{e}^{i\omega x}\,d\omega.$$

Здесь и далее черта над символом означает преобразование Фурье для функции:

$$\bar\sigma_{jk}(\omega,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sigma_{jk}(x,y,t)\,\mathrm{e}^{-i\omega x}\,dx; \tag{9}$$

$$\bar\theta(\omega,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\theta(x,y,t)\,\mathrm{e}^{-i\omega x}\,dx. \tag{10}$$

2. Вычисление температуры с помощью преобразования Фурье. Применим преобразование Фурье (10) ко всем членам уравнения (1) и условиям (2)–(4):

$$\frac{\partial^2\bar\theta}{\partial y^2} - \omega^2\bar\theta = \frac{\partial\bar\theta}{\partial t}, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1; \tag{11}$$

$$\bar\theta(\omega, y, 0) = 0; \tag{12}$$

$$\frac{\partial\bar\theta}{\partial y}(\omega, 0, t) = 0; \tag{13}$$

$$\frac{\partial\bar\theta}{\partial y}(\omega, 1, t) = Q(\omega)h(t). \tag{14}$$

Здесь $Q(\omega) = (b/\lambda)\bar q(\omega)$.

Применив преобразование Лапласа ко всем членам уравнения (11) и его граничным условиям (13), (14), с учетом начального условия (12) получаем краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2\bar\theta^*}{\partial y^2} - (p + \omega^2)\bar\theta^* = 0; \tag{15}$$

$$\frac{\partial\bar\theta^*(\omega, 0, p)}{\partial y} = 0; \tag{16}$$

$$\frac{\partial\bar\theta^*(\omega, 1, p)}{\partial y} = \frac{1}{p}\,Q(\omega), \tag{17}$$

где индекс “$*$” обозначает изображение по Лапласу функции $\bar\theta(\omega, y, t)$:

$$\bar\theta^*(\omega, y, p) = \int\limits_0^\infty \bar\theta(\omega, y, t)\,\mathrm{e}^{-pt}\;dt,$$

p — комплексная переменная. Общим решением уравнения (15) является функция

$$\bar\theta^* = C_1\,\mathrm{sh}\,(y\sqrt{p + \omega^2}\,) + C_2\,\mathrm{ch}\,(y\sqrt{p + \omega^2}\,), \tag{18}$$

где C_1, C_2 — постоянные.

С учетом граничных условий (16), (17) запишем функцию $\bar\theta^*(\omega, y, p)$ (18) в виде

$$\bar\theta^*(\omega, y, p) = Q(\omega)\Phi(\omega, y, p). \tag{19}$$

Функция $\Phi(\omega, y, p)$ задается формулой

$$\Phi(\omega, y, p) = \frac{\mathrm{ch}\,(y\sqrt{p + \omega^2}\,)}{p\sqrt{p + \omega^2}\,\mathrm{sh}\,(\sqrt{p + \omega^2}\,)}. \tag{20}$$

При $\omega = 0$ оригинал для изображения (20) известен [12]:

$$\Phi(0, y, p) \risingdotseq t - \frac{1}{6}\,(1 - 3y^2) - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\mu_n^2}\cos\,(\mu_n y)\,\mathrm{e}^{-\mu_n^2 t}\,. \tag{21}$$

Здесь $\mu_n = \pi n$; знак “$\risingdotseq$” означает обратное преобразование Лапласа.

Из формулы (21) с использованием теоремы дифференцирования оригинала при нулевом начальном условии (12) получаем соответствие [13]

$$p\Phi(0, y, p) \risingdotseq 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\,(\mu_n y)\,\mathrm{e}^{-\mu_n^2 t}\,. \tag{22}$$

Согласно теореме затухания из (20), (22) следует [13]

$$p\Phi(\omega, y, p) \risingdotseq \mathrm{e}^{-\omega^2 t} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cos(\mu_n y)\,\mathrm{e}^{-\alpha_n t}, \tag{23}$$

где $\alpha_n = \mu_n^2 + \omega^2$.

С использованием теоремы интегрирования оригинала [13] для изображения (20) из (23) находим

$$\Phi(\omega, y, p) \risingdotseq \frac{\mathrm{e}^{-\omega^2 t} - 1}{-\omega^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos(\mu_n y)}{\alpha_n}\,\mathrm{e}^{-\alpha_n t} + \varphi(y). \tag{24}$$

Здесь $\varphi(y)$ — сумма ряда Фурье при $t = 0$ [14]:

$$\varphi(y) = 2\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos(\pi n y)}{\pi^2 n^2 + \omega^2} = \frac{\operatorname{ch}(\omega y)}{\omega \operatorname{sh}(\omega)} - \frac{1}{\omega^2}. \tag{25}$$

Из формул (19), (21), (24), (25) находим преобразование Фурье для температуры:

— при $\omega = 0$

$$\bar\theta(0, y, p) = Q(0)\Big(t - \frac{1}{6}(1 - 3y^2) - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\mu_n^2}\cos(\mu_n y)\,\mathrm{e}^{-\mu_n^2 t}\Big); \tag{26}$$

— при $\omega \neq 0$

$$\bar\theta(\omega, y, p) = Q(\omega)\Big(\frac{\operatorname{ch}(\omega y)}{\omega \operatorname{sh}(\omega)} - \frac{\mathrm{e}^{-\omega^2 t}}{\omega^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\cos(\mu_n y)\Big). \tag{27}$$

Здесь

$$A_n(t) = \frac{(-1)^n}{\alpha_n}\,\mathrm{e}^{-\alpha_n t}.$$

3. Вычисление преобразований Фурье для напряжений. Применим преобразование Фурье (9) ко всем членам уравнений (5)–(7) и граничным условиям (8):

$$\frac{\partial \bar\sigma_{xy}}{\partial y} + i\omega\bar\sigma_{xx} = 0; \tag{28}$$

$$\frac{\partial \bar\sigma_{yy}}{\partial y} + i\omega\bar\sigma_{yx} = 0; \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2 \bar f}{\partial y^2} - \omega^2 \bar f = 0; \tag{30}$$

$$\bar f = \bar\sigma_{xx} + \bar\sigma_{yy} + \bar\beta\theta. \tag{31}$$

Граничные условия для уравнений (28), (29) имеют вид

$$\bar\sigma_{yy}(\omega, 0) = \bar\sigma_{xy}(\omega, 0) = 0, \qquad \bar\sigma_{yy}(\omega, 1) = \bar\sigma_{xy}(\omega, 1) = 0. \tag{32}$$

Выразим $\bar\sigma_{xx}$ из равенства (31):

$$\bar\sigma_{xx} = \bar f - \bar\sigma_{yy} - \beta\bar\theta. \tag{33}$$

В случае плоской деформации для $\bar\sigma_{zz}$ известна формула [11]

$$\bar\sigma_{zz} = \nu(\bar\sigma_{xx} + \bar\sigma_{yy}) - \alpha E\bar\theta. \tag{34}$$

С учетом (31) из (34) получаем

$$\bar\sigma_{zz} = \nu\bar f - \beta\bar\theta.$$

Подставляя $\bar\sigma_{xx}$ из (33) в (28):

$$i\,\frac{\partial \bar\sigma_{xy}}{\partial y} + \omega\bar\sigma_{yy} = \omega(\bar f - \beta\bar\theta), \tag{35}$$

складывая почленно уравнения (35) и (29), а затем вычитая (35) из (29) и вводя обозначения

$$\sigma_1 = \bar{\sigma}_{yy} + i\bar{\sigma}_{xy}, \qquad \sigma_2 = \bar{\sigma}_{yy} - i\bar{\sigma}_{xy}, \tag{36}$$

запишем два дифференциальных уравнения

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial y} + \omega\sigma_1 = \omega(\bar{f} - \beta\bar{\theta}), \qquad \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} - \omega\sigma_2 = -\omega(\bar{f} - \beta\bar{\theta}). \tag{37}$$

В соответствии с формулами (36), (32) функции σ_1, σ_2 должны удовлетворять условиям

$$\sigma_1(\omega, 0) = \sigma_2(\omega, 0) = 0; \tag{38}$$

$$\sigma_1(\omega, 1) = \sigma_2(\omega, 1) = 0. \tag{39}$$

Из равенств (36) следует

$$\bar{\sigma}_{yy} = \frac{1}{2}\,(\sigma_1 + \sigma_2), \qquad \bar{\sigma}_{xy} = \frac{1}{2i}\,(\sigma_1 - \sigma_2). \tag{40}$$

Частные решения уравнений (37), удовлетворяющие условиям (38), представим в виде равенств

$$\begin{gathered} \sigma_1(\omega, y) = \omega\,\mathrm{e}^{-\omega y} \int\limits_0^y (\bar{f}(\omega, y) - \beta\bar{\theta}(\omega, y))\,\mathrm{e}^{\omega y}\,dy, \\ \sigma_2(\omega, y) = \omega\,\mathrm{e}^{\omega y} \int\limits_0^y (-\bar{f}(\omega, y) + \beta\bar{\theta}(\omega, y))\,\mathrm{e}^{-\omega y}\,dy. \end{gathered} \tag{41}$$

Общими решениями уравнения (30) являются функции

$$\bar{f}(\omega, y) = A\,\mathrm{e}^{-\omega y} + B\,\mathrm{e}^{\omega y}, \qquad \omega \neq 0; \tag{42}$$

$$\bar{f}(0, y) = A_0 y + B_0, \qquad \omega = 0, \tag{43}$$

где A, B, A_0, B_0 — постоянные.

Подставляя функцию $\bar{f}$ из (42) в подынтегральные выражения в (41), после ряда вычислений запишем

$$\begin{gathered} \sigma_1(\omega, y) = Ay\omega\,\mathrm{e}^{-\omega y} + B\,\mathrm{sh}\,(\omega y) - R_1(\omega, y), \\ \sigma_2(\omega, y) = -A\,\mathrm{sh}\,(\omega y) - By\omega\,\mathrm{e}^{\omega y} + R_2(\omega, y), \end{gathered} \tag{44}$$

где

$$R_1(\omega, y) = \beta\omega\,\mathrm{e}^{-\omega y} \int\limits_0^y \bar{\theta}(\omega, y)\,\mathrm{e}^{\omega y}\,dy, \qquad R_2(\omega, y) = \beta\omega\,\mathrm{e}^{\omega y} \int\limits_0^y \bar{\theta}(\omega, y)\,\mathrm{e}^{-\omega y}\,dy. \tag{45}$$

Подставляя $\bar{\theta}(\omega, y, t)$ из формулы (27) в подынтегральные выражения в (45) и проводя вычисления, получаем

$$R_1(\omega, y, t) = \beta Q(\omega) F(\omega, y, t), \qquad R_2(\omega, y, t) = -\beta Q(\omega) F(-\omega, y, t).$$

Здесь

$$F(\omega, y, t) = u(\omega, y, t) - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,\mathrm{e}^{-\alpha_n t}}{\alpha_n^2}\,\psi_n(\omega, y),$$

$$u(\omega, y, t) = \frac{\operatorname{sh}(\omega y) + \omega y\, \mathrm{e}^{-\omega y}}{2\omega \operatorname{sh}(\omega)} + \frac{\mathrm{e}^{-\omega^2 t}(\mathrm{e}^{-\omega y} - 1)}{\omega^2},$$

$$\psi_n(\omega, y) = [-\omega\, \mathrm{e}^{\omega y} + \omega \cos(\mu_n y) + \mu_n \sin(\mu_n y)]\omega.$$

Используя граничные условия (39) для напряжений σ_1, σ_2 (см. (44)), запишем два линейных алгебраических уравнения, из которых определяются A, B:

$$A = [R_1(\omega, 1)\omega\, \mathrm{e}^{\omega} - R_2(\omega, 1) \operatorname{sh}(\omega)][\omega^2 - \operatorname{sh}^2(\omega)]^{-1},$$

$$B = [R_2(\omega, 1)\omega\, \mathrm{e}^{-\omega} - R_1(\omega, 1) \operatorname{sh}(\omega)][\omega^2 - \operatorname{sh}^2(\omega)]^{-1}.$$

Из равенств (40) с учетом (44) для $\bar\sigma_{yy}$, $\bar\sigma_{xy}$ получаем зависимости

$$\begin{aligned} \bar\sigma_{yy} &= \frac{1}{2} A[\omega y\, \mathrm{e}^{-\omega y} - \operatorname{sh}(\omega y)] + B[\operatorname{sh}(\omega y) - \omega y\, \mathrm{e}^{\omega y}] - R_1(\omega, y) + R_2(\omega, y), \\ \bar\sigma_{xy} &= \frac{-i}{2} A[\omega y\, \mathrm{e}^{-\omega y} - \operatorname{sh}(\omega y)] + B[\operatorname{sh}(\omega y) - \omega y\, \mathrm{e}^{\omega y}] - R_1(\omega, y) - R_2(\omega, y). \end{aligned} \tag{46}$$

Из формул (41), (46) следует, что при $\omega = 0$ функции σ_1, σ_2, $\bar\sigma_{xy}$, $\bar\sigma_{yy}$ тождественно равны нулю, поэтому из равенств (33), (43) находим

$$\bar\sigma_{xx}(0, y) = A_0 y + B_0 - \beta\bar\theta(0, y, t). \tag{47}$$

Таким образом, функция $\bar\sigma_{xx}(0, y)$ выражается так же, как и в задаче термоупругости для пластины, температура которой меняется только по толщине.

Граничные условия для $\bar\sigma_{xx}$ отсутствуют, поэтому, используя принцип Сен-Венана [11], равнодействующие усилие и момент на контуре полосы принимаем равными нулю:

$$\int_0^1 \bar\sigma_{xx}(0, y)\, dy = 0; \tag{48}$$

$$\int_0^1 y\bar\sigma_{xx}(0, y)\, dy = 0. \tag{49}$$

Подставляя $\bar\sigma_{xx}$ из (47) в (48), (49), находим постоянные A_0, B_0:

$$A_0 = 6\beta \int_0^1 (2y - 1)\bar\theta(0, y, t)\, dy, \qquad B_0 = 2\beta \int_0^1 (2 - 3y)\bar\theta(0, y, t)\, dy.$$

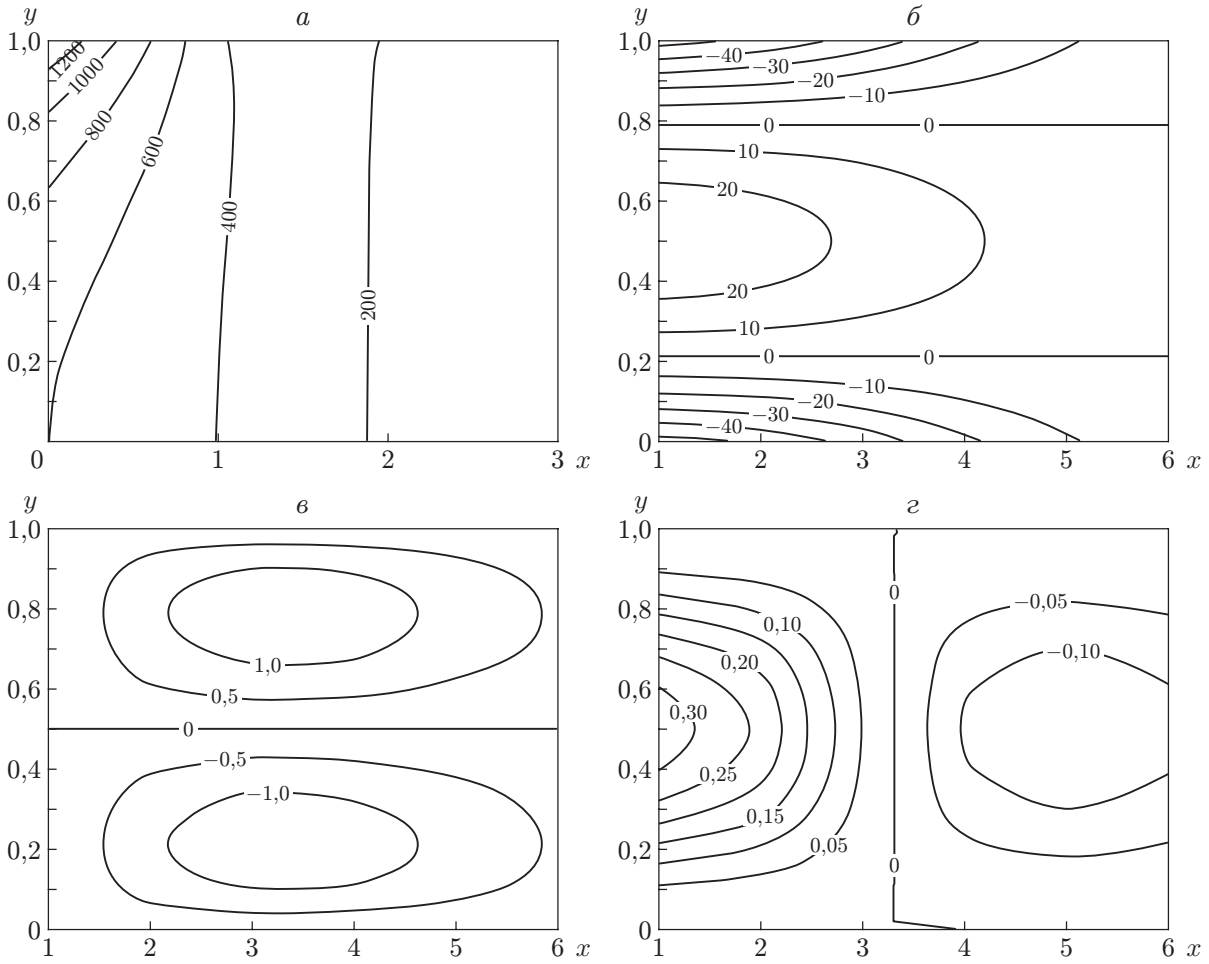
Подставляя $\bar\theta(0, y, t)$ из формулы (26) в (47), (48), получаем

$$A_0 = \beta Q(0)\Big(\frac{1}{2} - 48S(t)\Big), \qquad B_0 = \beta Q(0)\Big(t - \frac{1}{4} + 24S(t)\Big),$$

где $S(t)$ — сумма ряда:

$$S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\pi^2(2k-1)^2 t}}{\pi^4(2k-1)^4}.$$

Полученные выше зависимости позволяют вычислить аналитически преобразования Фурье для температуры и компонент тензора напряжений. Обратные преобразования Фурье для искомых величин проведены численно.



Распределения температуры θ (*а*) и напряжений σ_{xx} (*б*), σ_{xy} (*в*), σ_{yy} (*г*)

4. Пример численного моделирования Проведем расчет температуры и напряжений в полосе из стали марки Ст. 45 толщиной 0,02 м. Полоса нагревается тепловым потоком:

$$q(x) = q_0 g(x).$$

Здесь $q_0 = \text{const}$; $g(x)$ — четная финитная дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная в виде

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x}{d} - \dfrac{1}{2\pi}\sin\left(\dfrac{2\pi x}{d}\right), & -d < x \leqslant 0, \\ 1 - \dfrac{x}{d} + \dfrac{1}{2\pi}\sin\left(\dfrac{2\pi x}{d}\right), & 0 < x < d, \\ 0, & |x| \geqslant d. \end{cases}$$

Преобразование Фурье для функции $q(x)$ равно

$$\bar{q}(\omega) = q_0\,\frac{4\pi^2(\cos(d\omega) - 1)}{d\omega^2(d^2\omega^2 - 4\pi^2)}.$$

Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $q_0 = 2{,}5 \cdot 10^8$ Вт/м^2, $d = 0{,}5$.

На рисунке приведены результаты вычислений температуры (в градусах Цельсия) и напряжений (в мегапаскалях) в полосе после нагрева в течение 30 с. Из данных, приведенных на рисунке, следует, что в областях, прилегающих к границам полосы, возникают сжимающие усилия, а во внутренней области — растягивающие. Таким образом, предложенная модель адекватно описывает термоупругие процессы, происходящие при нагреве полосы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Qin Y., Zou J., Dong C., et al.** Temperature-stress fields and related phenomena induced by a high current pulsed electron beam // Nuclear Instrum. Methods Phys. Res. Sect. B. 2004. V. 225. P. 544–554.
2. **Chen H., Kysar J., Yao Y. L.** Characterization of plastic deformation induced by microscale shock peening // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 2004. V. 71. P. 713–723.
3. **Коваленко В. С.** Микро- и нанообработка сверхмощными лазерными импульсами // Оборудование и эксперимент для профессионалов. 2003. № 4. С. 4–14.
4. **Кудинов В. А., Кузнецова А. Э., Еремин А. В., Котова Е. В.** Аналитические решения квазистатических задач термоупругости с переменными физическими свойствами среды // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2014. № 2. С. 130–135.
5. **Kulkarni V. S., Deshmukh K. C., Munjankar P. H.** Thermal stress analysis due to surface heat source // Intern. J. Adv. Appl. Math. Mech. 2014. N 2. P. 139–149.
6. **Муратиков К. Л.** Расчет нестационарных термоупругих деформаций в твердотельных объектах в рамках квазистатического приближения // Журн. техн. физики. 2011. Т. 81, вып. 2. С. 58–63.
7. **Khobragade N. W.** Thermal stresses of a thin circular plate with internal heat source // Intern. J. Engng Innovat. Technol. 2013. V. 3. P. 66–71.
8. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954.
9. **Melan E.** Wärmespannungen: Infolge stationärer Temperatirfelder / E. Melan, H. Parkus. Wien: Springer Verlag, 1953.
10. **Parkus H.** Instationäre Wärmespannungen. Wien: Springer Verlag, 1959.
11. **Коваленко А. Д.** Основы термоупругости. Киев: Наук. думка, 1970.
12. **Лыков А. В.** Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967.
13. **Лаврентьев М. А.** Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. СПб.: Лань, 2002.
14. **Градштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию 22/III 2022 г.,
после доработки — 18/V 2022 г.
Принята к публикации 26/V 2022 г.